力学系理論および特異点理論の数理流体力学への応用

(研究課題番号　14204007)

平成14年度～16年度科学研究費補助金　基盤研究(A)(1)

研究成果報告書

平成17年3月

研究代表者　　岡本　久
京都大学数理解析研究所・教授

はしがき

本報告書は平成 14 年度～ 16 年度科学研究費補助金

基盤研究 (A)(1) 「力学系理論および特異点理論の数理流体力学への応用」
課題番号 14204007

の研究成果報告書である。本研究の研究組織および研究経費は次の通りである。

研究組織

研究代表者	岡本　久	京都大学数理解析研究所・教授
研究分担者	山田道夫	京都大学数理解析研究所・教授
同上	大木谷耕司	京都大学数理解析研究所・助教授
同上	大浦拓哉	京都大学数理解析研究所・助手
同上	上田肇一	京都大学数理解析研究所・助手
同上	木村芳文	名古屋大学大学院多元数科学研究科・教授
同上	東海林まゆみ	日本女子大学理学部・教授
同上	長山雅晴	金沢大学大学院自然科学研究科・助教授
同上	坂上貴之	北海道大学大学院理学研究科・助教授

研究経費

	直接経費	間接経費	合計
平成 14 年度	6,600 千円	1,980 千円	8,580 千円
平成 15 年度	6,600 千円	1,980 千円	8,580 千円
平成 16 年度	5,900 千円	1,770 千円	7,670 千円
計	19,100 千円	5,730 千円	24,830 千円

研究分担課題: 総括および解の爆発・水面波・渦層の研究

岡本　久
京都大学数理解析研究所・教授

研究のまとめ

Navier-Stokes 方程式は流体力学の基礎となる偏微分方程式である．同方程式については解の滑らかさの問題が最も著名であるが, 他にも解決すべき問題が山積している．これは物理学や工学への応用を視野に入れたとき, 特に強く認識されることである．本研究ではこうした諸問題の解決を目指してきた．

本研究では (1)Navier-Stokes 方程式における新しい解, 特に内部遷移層などの (擬) 特異点を含む解の発見, (2) 水面波の分岐現象, 特に孤立波の新しい数値計算法, などで進展を見た．

岡本と Kim Sunchul は菱形の周期流を考え, 分岐解の構造とレイノルズ数無限大での漸近挙動を考察した．丁寧な数値計算によって複雑な分岐解を計算し, 不思議な安定性の交換を発見した．岡本と A. Craik は Navier-Stokes 方程式から導かれる, ある種の 3 次元力学系を考察し, その漸近挙動を分類した．これは 2 次の非線形項を持つ一見単純な常微分方程式であるが, ほぼまっすぐな渦巻解と 90 度曲がる渦巻解が同居しており, なぜこの違いが生ずるのかが謎であった．岡本と Craik はある種の不安定周期解が存在することを数値的に確かめ, これによって 90 度の曲がりが出たり出なかったりするメカニズムを明らかにした．

岡本と X. Chen は, Navier-Stokes 方程式から導かれる Proudman-Johnson 方程式を考え, 斉次境界条件の場合には解の爆発が起きないことを証明した．これは 10 年間ほど解答が望まれてきた問題である．非斉次境界条件の場合には数値実験が進行中であるが, 確定的な結果はまだ得られていない．

岡本と長山雅晴は, Navier-Stokes 方程式の, 軸対象な相似解を考察してその解がレイノルズ数無限大の極限で内部遷移層を持つことを発見した．さらに, 適当な仮定の下で内部遷移層の存在を証明することができた．Navier-Stokes 方程式における内部遷移層はこれまでほとんど例がなく, 新しい遷移層を見つけることだけでも意義は大きいが, 存在証明もつけることが出来たのは大きな喜びである．

岡本, 中村健一, 柳下浩紀, は Navier-Stokes 方程式のある種の自己相似解が有限時間で爆発することを証明した．

水面波における Crapper の波に関する一意性定理を証明した．また, Navier-Stokes 方程式に関するいくつかの厳密解の一意性定理の証明にも成功した．

参考文献

[1] M. Nagayama and H. Okamoto, On the interior layer appearing in the similarity solutions of the Navier-Stokes equations, Japan J. Indust. Appl. Math., vol. 19 (2002), pp. 277–300.

[2] A. D. D. Craik and H. Okamoto, A three-dimensional autonomous system with unbounded 'bending' solutions, Physica D, vol. 164, (2002), pp. 168–186

[3] X. Chen and H. Okamoto, Global Existence of Solutions to the generalized Proudman–Johnson Equation, Proc. Japan Acad., vol. 78 (2002), pp. 136–139.

[4] M. Nagayama, H. Okamoto and J. Zhu, On the blow-up of some similarity solutions of the Navier-Stokes equations, Quader. di Mat. vol. 10 (2003), pp. 137–162.

[5] K. Kobayashi, H. Okamoto, and J. Zhu, Numerical computation of water and solitary waves by the double exponential transform, J. Comp. Appl. Math., vol. 152 (2003), pp. 229–241.

[6] S.-C. Kim and H. Okamoto, Bifurcations and inviscid limit of rhombic Navier-Stokes flows in tori, IMA J. Appl. Math., vol. 68 (2003), 119–134.

[7] X. Chen and H. Okamoto, A Blow-up problem modified from similarity solutions of the Euler equations, J. Math. Sci., Univ. Tokyo, vol. 10 (2003), pp373–389

[8] H. Ikeda, K. Kondo, H. Okamoto and S. Yotsutani, On the global branches of the solutions to a nonlocal boundary-value problem arising in Oseen's spiral flows, Commun. Pure Appl. Anal. , vol. 2 (2003), p 373–382.

[9] K.-I. Nakamura, H. Okamoto, H. Yagisita, Blow-up solutions appearing in the vorticity dynamics with linear strain, J. Math. Fluid Mech., vol. 6 (2004), pp. 157–168.

[10] K. Kobayashi and H. Okamoto, Uniqueness issues on permanent progressive water-waves, J. Nonlinear Math. Phys., vol. 11, (2004), pp 472–479.

[11] H. Okamoto, Uniqueness of Crapper's pure capillary waves of permanent shape, J. Math. Sci., Univ. Tokyo., vol. 12 (2005), in Press

[12] Tosio Kato's Method and Principle for Evolution Equations in Mathematical Physics, (共同編集者) 2002, UTP Press

[13] (10 名による共著), 数学七つの未解決問題,, 森北出版, (2002). 第 7 章 (158–183 ページ) が岡本と藤田宏による共同解説.

[14] 現象の数理, 放送大学教材 (2003 年, 3 月刊行), 230 ページ

[15] 岡本 久, 中村健一, 柳下浩紀, Navier-Stokes 方程式の非有解な解は爆発し得る, 数理解析研究所講究録 1322 巻 (2003), 102–106.

[16] 岡本 久, 知られざるグリーン, 数学セミナー 2003 年 7 月号, 45–49.

[17] 岡本 久, 計算機実験と数学 変わり者の独り言, 土木学会誌, vol. 88, 2003 年 8 月号, 32–32.

[18] (翻訳) ピーター D. ラックス, 数学と数値計算, 「数学の最先端」第 4 巻, アーノルド他編, 砂田利一監訳, (2003) pp 26–47.

[19] 岡本 久, 応用解析等教科書の個人的な概観, 応用数理, 第 14 巻 (2004), 97–101.

[20] 岡本 久, Crapper の表面張力波の一意性について, 数理解析研究所講究録, 第 1368 巻, (2004), pp. 136-143.

- 国際シンポジウムにおける招待講演
  1. Nonlinear Waves, 2004 年 1 月, ドイツ, オーベルボルファッハ研究所
  2. 第 7 回日中セミナー, 2004 年 8 月, 中国湖南省湘譚大学
  3. US-Japan Workshop on Dynamics and Computations, 2004 年 3 月、神奈川県、湘南国際村センター
  4. 数学解析のこれまでと今後の展望, 2004 年 7 月, 湘南国際村センター
  5. The 6th International Workshop on Mathematical Aspects of Fluid and Plasma Dynamics, 2004 年 9 月, 京都大学
  6. Developments in Navier-Stokes Equations & Turbulence Research, 2004 年 12 月, シンガポール大学
- 国際シンポジウム主催
  1. 第 1 回京都大学・ソウル大学若手数学者交流会, 2003 年 11 月, 京都大学
  2. 第 7 回日中数値解析セミナー, 2004 年 8 月, 中国湖南省湘譚大学, 中国科学院の Shi Zhong-ci 教授との共催.
  3. International Workshop: Thirty Years of the Double Exponential Transforms. 2004 年 9 月, 京都大学
  4. 第 2 回京都大学・ソウル大学若手数学者交流会, 2004 年 9 月, 京都大学ソウル大学の Kim Myung Hwan 教授と共催.

研究分担課題：地球規模の流体現象のモデル化と数値シミュレーション

山田道夫
京都大学数理解析研究所・教授

上記の分担課題とその関連事項につき，以下のような研究成果が得られた．

本研究では，主として回転球面上の部分領域を流れ領域とする流体運動について，研究を行い成果を得た．

山田と谷口由紀（学術振興会特別研究員）と石岡圭一（京都大学理学研究科）は，回転半球面における非圧縮性2次元 Navier-Stokes 流体の運動に現れる流れパターンの形成現象を調べた．従来，回転する全球面上における2次元流体運動は，分担者らによって大気運動との関連から詳しく調べられ，球面上一様な乱流初期条件から出発した流れ場には，南北の極域に東風の帯状流（周極ジェット）が発生し中低緯度域には縞構造が形成されることが見出されている．本研究課題では，このような流れの構造が境界の存在によってどのように変化するかに注目し，地球科学的には海を念頭において，回転球面上で赤道に境界（海岸）をもつ南半球の流れを数値的に調べた．この数値計算に使用した数値スキームは，本研究のために開発したもので，球面上の円領域をステレオ写像によって等角写像した平面円盤で Fourier-Chebyshev 展開を用いるスペクトル法である．対称性を考慮した多くの初期条件を用いたアンサンブルを調べ，乱流初期条件からの流れパターン形成に注目した．その結果，赤道境界で剛体境界条件を用いた場合，南半球に西風帯状流が発生することを見出した．これは，全球面の場合の東風帯状流と対照的であり，赤道剛体境界において，角運動量の選択的散逸が起こっていることを意味している．そこで赤道境界条件を，剛体境界条件からストレスフリー条件に変更して同様のアンサンブル実験を行ったところ，今度は南半球に東風帯状流が発生することを見出した．この結果は，境界条件の違いは，流れの全体的なパターンに決定的な影響を与えることを意味しており，例えば海洋の数値シミュレーションにおける境界条件の採択において注意が必要であることを示唆している．実際，海洋シミュレーションでは，海岸境界において海深が浅くなることを考慮した定式化が行われているが，このような境界の扱いが及ぼす影響については，現在も研究が進展している段階である．本研究で明らかにされた知見を，これらと関連してさらに応用することが期待される．

また，回転半球面において特に境界が子午線と一致する場合（縦半球）は，帯状流の形成は不可能となる．このときは従来から，帯状風によって駆動される黒潮のように西岸に張り付いた流れの形成が知られているが，この流れ（西岸強化流）の不安定性を数値的に調べた．帯状風の強さを分岐パラメータとし，大規模渦（gyre）の大きさを変化させて，この不安定性（局所不安定性）を追跡し，不安定性の発生中心が相対的に小さな gyre に位置することを見出した．さらに詳細な性質を調べるため，この研究は継続中である．またこのほか，古典力学における三体問題において角運動量ゼロとなる配置や，乱流シェルモデルにおける間欠性について力学系的立場から研究を行った．

研究発表リスト

References

1. 研究発表（学会誌など，英文）

1. Y.Taniguchi, M.Yamada and K.Ishioka: 'Flow pattern formation in a two-dimensional flow on the rotating hemisphere bounded by the meridional line' Theoretical and Applied Mechanics, Volume 51 - Proc.of the 51st Japan National Cogress on Theor. Appl. Mech, 2002. pp. 217-223.

2. S.Yoden, K.Ishioka, M.Yamada and Y.-Y.Hayashi: 'Pattern Formation in Two- Dimensional Turbulence on a Rotating Sphere' Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulnece, ed. Y.Kaneda and T.Gotoh, Springer, 2002, pp. 317-326.

3. S.Kato and M.Yamada: 'Unstable periodic solutions embedded in a shell model turbulence' Phys.Rev.E., 68, 025302(R), 2003.

4. T.Fujiwara, H.Fukuda, A.Kameyama, H.Ozaki and M.Yamada: 'Synchronised Similar Triangles for Three-Body Orbit with Zero Angular Momentum' J.Phys.A: Math.Gen., 37, 10571-10584, 2004

5. Yuki Taniguchi, Michio Yamada and Keiichi Ishioka: 'Spontaneous formation of zonal current in two-dimensional Navier-Stokes flow on a rotating hemisphere', submitted to Fluid Dynamics Research

6. Yuki Taniguchi, Michio Yamada and Keiichi Ishioka: 'Boundary effect on the zonal current in two-dimensional Navier-Stokes flow on a rotating hemisphere', submitted to Fluid Dynamics Research

7. Yuki Taniguchi, Michio Yamada and Keiichi Ishioka: 'Instability of westward intensified flow in two-dimensional Navier-Stokes flow on a rotating hemisphere', preprint

2. 和文論文，解説，著書など

8. 山田道夫: 「層流から乱流へ」パリティ、17-10, 丸善、21-26, 2002 年.

9. 玉置哲男、田辺章、中村雅彦、佐々木文夫、水町渉、山田道夫: 「実地震波の波形を利用した人工地震波の作成」, 日本地震工学会論文集、第3巻, 第3号, pp.1-12, 2003.

10. 山田道夫・佐々木文夫: 「ウェーブレット解析」, スペクトル解析ハンドブック (共著), 日野幹雄 ed., 朝倉書店, pp.66-83, 2004.

11. 山田道夫: 「ウェーブレット解析入門」, システム制御情報学会, マルチメディアライブラリー, 2004年, DVD 全4巻.

12. 山田道夫: 「ウェーブレットと乱流」, 数学のたのしみ 2004 秋, ウェーブレット解析の展開, 日本評論社, 2004, pp.35-48.

3. 研究発表 (招待講演)

13. 山田道夫 (02/02/08): 「乱流の特異性と不安定周期軌道」, 非線形非平衡現象を支配する特異性の解明, 広島大学中央図書館.

14. M. Yamada (02/08/06): 「Unstable Periodic Orbits in a Model Turbulence」, The 6th Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics, University of Tsukuba, Ibaraki, Japan.

15. 山田道夫 (02/08/09): 「乱流における流れ構造と不安定解」, 第20回西日本乱流シンポジウム, 広島市.

16. 山田道夫 (02/10/08): 「ウェーブレットによる風解析」, 風工学会講演会, 日大理工学部、東京神田駿河台.

17. 山田道夫 (03/02/): 「乱流シェルモデルの統計性質」, 東大教養、東京駒場,

18. 加藤整・山田道夫 (03/02/27): 「乱流の統計性質と不安定周期解」, 2003.2.27, 統計数理研共同研究集会.

19. 山田道夫 (03/07/7-10): 「ウェーブレットによる地球科学データ解析例」, 数理研研究会「偏微分方程式と時間周波数解析」.

20. 谷口由紀, 山田道夫, 石岡圭一 (03/07/15): 「回転半球面上の西岸強化流の安定性」, 数理研研究会「連続体方程式の解の特異性と分岐」.

21. 山田道夫 (04/02/19): 「回転する球面上の流体方程式 – 地球科学における流れの問題」, 北海道大学理学研究科数学専攻, 21 世紀 COE プログラム special months, 'Navier-Stokes 方程式'.

22. 山田道夫 (04/02/20): 「シェルモデルにおける乱流」, 北海道大学電子科学研究所研究集会, 「非線形ダイナミクスに内在する不安定軌道の数理」.

23. 山田道夫 (04/05/14): 「流体乱流の少数次元モデルとカオス構造」, 京都大学数学教室 力学系セミナー.

24. 山田道夫 (04/06/02, 京大数理研) 「回転球面上の流体運動」, 京都大学数学大談話会.

4. 研究発表 (学会講演等)

25. 加藤整・山田道夫: 「シェルモデル乱流の不安定周期解」, 研究集会「乱れの発生、維持機構および統計法則の数理」, (2002.1.16-18, 京大数理研).

26. 山田道夫: 「乱流の統計性質と不安定周期軌道」, 研究集会「流体現象と非線形現象論」, (2002.3.13-15, 九大応力研).

27. 石谷彰彦・石岡圭一・山田道夫: 「相転移と断熱膨張を伴う対流のパターン」, 研究集会「乱流による輸送、拡散、混合の数理」, (2003.1.15-17(15), 京大数理研).

28. 加藤整・山田道夫: 「乱流の統計性質と不安定周期解」, (2003.2.27, 統計数理研共同研究集会).

29. 小西丈予・石岡圭一・山田道夫: 「f 平面浅水系における軸対称孤立渦の安定性」, (2004.5.17, 気象学会, 学術総合センター, ポスターセッション).

30. 小西丈予・石岡圭一・山田道夫: 「f 平面浅水系における軸対称孤立渦の安定性」, (2004.8.11, 日本流体力学会年会, 名古屋大学工学部).

31. 谷口由紀・山田道夫・石岡圭一: 「回転球面上の南半球における流体運動」, (2004.9.13, 日本物理学会秋季大会, 青森大学), (同大会, 領域 11 「地球流体・乱流」セッション座長).

32. 谷口由紀・山田道夫・石岡圭一: 「回転球面上の南半球における流体運動」, (2004.9.18, 日本応用数理学会年会, 中央大学).

33. 谷口由紀・山田道夫・石岡圭一:「回転半球面上の 2 次元流体運動に対する境界条件の影響」, (2004.10.8, 京大数理研研究会「波の非線形現象の数理とその応用」代表者: 吉永隆夫 (阪大基礎工)).

34. 手嶋あかり・林泰一・我妻ゆき子・寺尾徹・山田道夫:「バクラデシュの伝染病に対する気象要素のインパクト」, 2004 年 10 月 7 日, 日本気象学会秋季学会 2004 年 10 月 6 ~ 8 日, アクロス福岡 (福岡市).

35. A. Teshima, M. Yamada, T. Hayashi*, Y. Wagatsuma, T. Terao:「Climate impact on seasonal patterns of diarrheal diseases in Tropical area」, (Dec.3, 2004, The 6th International Study Conference on GEWEX in Asia and GAME, December 3-5 2004, at Kyoto International Community House, Kyoto, Japan).

研究分担課題: Navier-Stokes 方程式の特異点の数値的研究

大木谷 耕司
京都大学数理解析研究所・助教授

インパルス定式化による乱流の研究 (P. Constantin 教授との共同研究)

ナビエ - ストークス方程式の擬スペクトル法による直接数値計算をインパルス定式化によって実行し、その結果を解析した。

標準的な記号で、非圧縮性 ナヴィエ - ストークス 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{u}, \ \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

である。これをインパルス $\boldsymbol{w}$ を用いると、以下のように書ける。

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} = -(\nabla \boldsymbol{u})^T \boldsymbol{w} + \nu \triangle \boldsymbol{w}, \tag{2}$$

ここで T は転置行列である。速度 $\boldsymbol{u}$ は、非圧縮射影により得られる $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{w}]$ 。

さらに、ここでは、粘性拡散を伴った粒子ラベル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ の導入し、

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = \nu \triangle \boldsymbol{A}, \tag{3}$$

および、それによる速度の分解（ウエーバー変換の粘性流体版)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}[(\nabla \boldsymbol{A})^T \boldsymbol{v}] \tag{4}$$

を用いた。

ナヴィエ - ストークス 方程式との整合性条件から、擬速度 $\boldsymbol{v}$ は以下の方程式に従う：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = 2\nu \boldsymbol{C} : \nabla \boldsymbol{v} + \nu \triangle \boldsymbol{v}, \tag{5}$$

ここで $\boldsymbol{C} : \nabla \boldsymbol{v}$ の第 i 成分は $C_{m,k;i} \dfrac{\partial v_m}{\partial x_k}$ であり、また $C_{m,k;i} \equiv \dfrac{\partial x_j}{\partial A_i} \dfrac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_k}$ である。

非粘性流では $\det(\nabla \boldsymbol{A})$ は時間によらないので $\boldsymbol{A}$ は、滑らかな時間発展で可逆のままである。粘性流では、この行列式は一般に保存されない。

２種類の初期条件に対して数値実験を行った。１つは、２本の交差する渦管という、渦のつなぎ替えが起きる初期条件、もう１つは、滑らかなランダムな初期条件から発展する、一様等方性減衰乱流の数値実験である。

いずれの場合にも、粘性拡散効果のため、$\det(\nabla \boldsymbol{A})$ 短時間に極端に小さくなってしまうことを発見した。そこで、流体粒子のラベル変数の可逆性を保つために行列式が小さくなる時 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}$ とリセットを行った。その結果、リセットが頻繁に起きる時間帯が、渦のつなぎ替えに正確に対応していること、また、リセット間隔は乱れの小スケールのもつ特徴的な時間に近いことを明らかにした。さらに $\det(\nabla \boldsymbol{A})$ の小さい領域が渦構造と対応していることも分かった。

次に、非粘性極限におけるナビエストークス方程式を接続 $\boldsymbol{C}$ の振る舞いにより、特異摂動論的な特徴づけを行った。接続に異常な振る舞いがなければ、ナビエストークス方程式の流れは極限でオイラー方程式の流れにスムースにつながる。逆に、何らかの異常があればオイラー方程式の解の特異性を示唆する。

ここでは、引き続くリセット時間帯 $[t_j, t_{j+1}]$ で次の無次元量注目し、

$$\lim_{\nu\to 0} \nu \int_{t_j}^{t_{j+1}} ||C||_p^2 \mathrm{d}t > A_p > 0, \ \ ||\boldsymbol{C}||_p \equiv \left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int |\boldsymbol{C}|^p \boldsymbol{dx}\right)^{1/p}$$

となる定数 A_p の存在を指示する数値結果を得た。この結果は、オイラー方程式はナビエストークス方程式の単純な極限ではないことを示唆している。

伸長項に対する対流の効果 (岡本 久 教授 との共同研究)

2次元非圧縮オイラー方程式の解は正則であることは良く知られている。この場合、渦度勾配 $\boldsymbol{\chi} = \nabla \times \omega$ を支配する方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$$

となる。対流項は、$\boldsymbol{\chi}$ のノルムの増加には寄与しないこと良く知られている。しかし、この事は対流項が $\boldsymbol{\chi}$ の伸長に影響を与えないと言うわけではない。ここでは、対流効果が解の正則性／特異性に如何に影響するかを2次元流体方程式の場合に考える。

このために、上の方程式から仮想的に対流項を取り去った方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = (\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$$

をとりあげる。この場合、初期 $t=0$ で $\nabla\cdot\boldsymbol{\chi}=0$ でも $t>0$ では $\nabla\cdot\boldsymbol{\chi}\neq 0$ である。そこで $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\chi}$ の関係として以下の2つを考える。

$$\text{Case 1: } \boldsymbol{u} = (-\triangle)^{-1}\boldsymbol{\chi}$$

$$\text{Case 2: } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}[(-\triangle)^{-1}\boldsymbol{\chi}],$$

ここで $\boldsymbol{P}$ は非圧縮射影である。変形された方程式の数値実験を行ったところ、いずれのケースでも $|\boldsymbol{\chi}|$ の急激な増加が観察され、有限時間における特異点の発生を示唆している。また、ケース2の場合の増加はケース1に比べると穏やかであることも判明した。このことは、オイラー方程式の対流項は特異点の形成を抑制する効果があること、とりわけ、非圧縮性の条件はその抑制効果を際立たせることが明らかになった。

磁気流体力学方程式の研究

理想的な磁気流体力学においては、速度 $\boldsymbol{u}$, 磁場 $\boldsymbol{B}(=\nabla\times\boldsymbol{A})$ は次の方程式を満足する。

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p + (\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B},$$

$$\frac{D\boldsymbol{B}}{Dt} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}),$$

ただし $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$。この場合の Beale-Kato-Majda 流の正則性判定基準は、もし時刻 T で解の爆発が起きるならば

$$\int_0^T (\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty + \|\boldsymbol{J}\|_\infty) dt \to \infty$$

となることが知られている。(Caflisch *et al.* 1997) ここで $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{J}$ は各々、渦度、電流である。この基準が、流体場と磁場の双方の最大値ノルムを含むのは Elsasser 変数を用いて速度、磁場を対称/反対称化した形の方程式を用いて解析を行ったためである。理想流体の場合、磁場は凍結場であることは周知であるが、もう 1 つ隠れた凍結場が知られている。(Vladimirov-Moffat 1995) これは、MHD 方程式が、磁気ヘリシティ $\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} d\boldsymbol{x}$ とともにクロスヘリシティ $\int \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{B} d\boldsymbol{x}$ を保存することから想像できる。実際、補助変数 $\boldsymbol{m}$ を

$$\frac{D\boldsymbol{m}}{Dt} = \boldsymbol{m} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{J}, \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{m} = 0)$$

で導入すると、

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \nabla \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{m})$$

なる、一般化渦度が凍結場となる。この 2 番目の保存法則を考慮すれば、磁場 $\boldsymbol{B}$ が正則であれば、MHD 方程式の解に爆発は起り得ないことが分かる（不等式による評価には至っていない）。また、この定式化によれば、 MHD の場合にも、いわゆる渦法による数値計算スキームを考えることが可能となるため、応用上も有益である。

軸対称 Navier-Stokes 方程式の解の爆発問題

軸対称 Navier-Stokes 方程式のあるクラスは次の方程式によって支配される。

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial r} + W^2 = \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right),$$

$$U(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r r'W(r')dr'.$$

ここで、 U, W はそれぞれ、動径方向、軸方向の速度成分である。対流項が無ければ、2 次元反応拡散系

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W^2 = \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right),$$

になるが、後者の解は爆発する（ちょうど 臨界指数の場合）。

一方、以下の形の自己相似的な爆発解を考えると

$$W = \frac{1}{T-t} f\left(\frac{r}{\sqrt{\nu(T-t)}}\right)$$

常微分方程式

$$\xi f + \frac{\xi^2}{2}f' - f'\int_0^\xi \eta f(\eta)d\eta + \xi f^2 = (\xi f')',$$

ただし $\xi \equiv \frac{r}{\sqrt{\nu(T-t)}}$ が得られる。境界条件 $f'(0) = 0, f(\infty) = 0$ を考慮すると

$$\int_0^\infty \xi f(\xi)^2 d\xi = 0 \Rightarrow f(\xi) \equiv 0$$

を導くことができ、自明解のみしかないことが分かる。

しかしながら、両方程式に対する数値計算を行ったところ、 L^2 ノルムに意味で軸対称ナビエストークス方程式の方が、対応する反応拡散系より急激に増加することが分かった。後者が爆発することは証明されているので、この数値実験結果は前者の爆発を示唆している。現在、反応拡散系の場合にならって、その爆発の数学的証明を検討中である。

研究発表

(1) 学会誌等

1. K. Ohkitani(京大数理研 助教授) and P. Constantin(Chicago 大 教授), “Numerical study of the Eulerian-Lagrangian formulation of the Navier-Stokes equations”, Phys. Fluids 15-10, 2003, pp.3251-3254.

2. R. Pelz(Rutgers 大 教授) and K. Ohkitani(京大数理研 助教授), “Linearly strained flows with and without boundaries –the regularizing effect of the pressure term–, Fluid Dyn. Res. 発表予定

3. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), “一般化された Weber 変換による非圧縮性流体力学,” 日本応用数理学会 2003 年度年会講演予稿集、 pp.12-13.

4. K. Ohkitani(京大数理研 助教授), “A class of exact solutions of the Navier-Stokes equations and a model for turbulence”, Publications RIMS. 発表予定

5. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), “厳密に線型化できるナビエストークス方程式の解のクラス,” シンポジウム「乱流要素渦による乱流理論・予測・制御の新展開」後刷、 2004 年.

6. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), P. Constantin(Chicago 大 教授) “Euler-Lagrange 定式化による乱流の解析,” 数理研研究集会「乱流の解剖 – 構造とはたらきの解明」 講究録. 発表予定 京都大学数理解析研究所講究録 1406, 2004 年 12 月, pp.216–223.

7. K. Ohkitani(京大数理研 助教授) and P. Constantin(Chicago 大 教授), “Numerical study of the Eulerian-Lagrangian analysis of the Navier-Stokes turbulence”. 発表予定

8. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), P. Constantin(Chicago 大 教授) “Eulerian-Lagrangian analysis of Navier-Stokes turbulence,” Extended Abstract for ICTAM2004 Symposium. 発表予定

9. R. Pelz (ラトガース大 教授) and K. Ohkitani （京大数理研 助教授）, “Linearly strained flows with and without boundaries –the regularizing effect of the pressure term–,” Fluid Dyn. Res. 発表予定

10. K. Ohkitani （京大数理研 助教授）, “A survey on class of exact solutions of the Navier-Stokes equations and a model for turbulence”, Publications RIMS. 40-4, 2004 年 12 月, 1267–1290.

11. P. Constantin(シカゴ大数学 教授) and K. Ohkitani （京大数理研 助教授） “Invariants, Diffusion and Topological Change”, Proceedings for the IUTAM symposium on Elementary vortices and coherent structures – significance in turbulence dynamics, Kyoto October 2004, 発表予定

(2) 口頭発表

1. K. Ohkitani (京大数理研 助教授), “Numerical study of the Eulerian-Lagrangian formulation of the Navier-Stokes equations”, Modeling, simulation, and experiments in vortex dynamics, October 2002, Kyoto Univ.

2. R. Pelz (Rutgers 大 教授) and K. Ohkitani (京大数理研 助教授) “Linear strain flows with without boundaries,” 研究集会「乱流による輸送、拡散、混合の数理」、 2003 年 1 月、京都大学

3. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授) “The final works of Rich Pelz,” 研究集会「流体力学における Rich Pelz の貢献」、 2003 年 1 月、京都大学

4. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), “一般化された Weber 変換による非圧縮性流体力学,” 日本物理学会 2003 年秋季大会、 2003 年 9 月、岡山大学

5. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), “一般化された Weber 変換による非圧縮性流体力学,” 日本応用数理学会 2003 年度年会、 2003 年 9 月、京都大学

6. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), P. Constantin(Chicago 大 教授) “Euler-Lagrange 定式化による乱流の解析,” 数理研研究集会「乱流の解剖 – 構造とはたらきの解明」、 2004 年 1 月、京都大学

7. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), “厳密に線型化できるナビエストークス方程式の解のクラス,” シンポジウム「乱流要素渦による乱流理論・予測・制御の新展開」 、 2004 年 2 月、京大会館

8. 大木谷 耕司 (京大数理研 助教授), P. Constantin(Chicago 大 教授) “Euler-Lagrange 定式化について,” 数理研研究集会「流体渦度場の gauge 構造と変分原理」、 2004 年 3 月、京都大学

9. K. Ohkitani （京大数理研 助教授） and P. Constantin(シカゴ大数学 教授), "Eulerian-Lagrangian analysis of Navier-Stokes turbulence", ICTAM04, 2004 年 8 月

10. 大木谷 耕司（京大数理研 助教授）” 流体方程式の解の爆発：物理的動機と数理的モデル” ワークショップ「非線形解析学の手法による数理物理学の研究」東北大学、 2004 年 9 月

11. 大木谷 耕司（京大数理研 助教授）, P. Constantin(シカゴ大数学 教授) ”Euler-Lagrange 定式化による磁気流体力学方程式の解析” 京都大学 数理解析研究所 共同研究集会「乱流現象と力学系的縮約」 2005 年 1 月

(3) 出版物

K. Ohkitani, ’An Elementary Account of Vorticity and Related Equations’, Cambridge University Press, 発表予定.

研究分担課題: 変数変換を用いた高精度計算法の流体力学への応用

大浦拓哉
京都大学数理解析研究所・助手

この研究期間にあげた成果は下記の4点である.

1. 二重指数関型数値積分公式 (DE 公式) の改良二重指数関数型数値積分公式 (DE 公式) の収束判定法の改良を行い, 少ない計算量でかつ安定した精度での計算を可能にした.
2. 級数の加速法における連続拡張の一般化について加速する対象の積分の性質がある程度具体的にわかっている場合に, 適切な重み関数を見つけ出すことで多くの連続版の加速法が形式上作れることを明らかにした. この事実を踏まえて連続 Euler 変換の一般化および改良を行い, いくつかの実用的な積分の加速に対する高性能な連続変換を導いた.
3. 振動型 DE 公式の改良従来の振動型 DE 公式が持つ, 多くの振動数を計算する Fourier 変換の計算では計算量が莫大になるという欠点を克服することは理論的に可能であることがわかっていた. そこで, 振動型 DE 公式の改良を行い具体的な算法の提案を行った.
4. DE 変換を用いた積分変換の計算法の開発 DE 変換を用いたさまざまな積分変換の計算法を提案し, 主な積分変換の計算効率を向上させた.

以下がこれらの研究に基づく論文と口頭発表である。

論文

参考文献

[1] 大浦拓哉, 二重指数関数型数値積分公式の収束判定法の改良, 日本応用数理学会論文誌, Vol.13 No.2, 2003

[2] T. Ooura, A generalization of the continuous Euler transformation and its application to numerical quadrature, J. Comput. Appl. Math., 157, 2003

口頭発表

- 大浦拓哉, 連続 Euler 変換の一般化と数値積分への応用, 共同研究集会 - 微分方程式の数値解法と線形計算, 京都大学数理解析研究所, 2002/11/22
- 大浦拓哉, 二重指数関数型数値積分公式の収束判定法の改良, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2002/12/19

- 大浦拓哉, 二重指数関数型変換による Fourier 変換の計算, 日本応用数理学会 2003 年度年会, 京都大学工学部, 2003/9/17
- 大浦拓哉, 二重指数関数型変換による主な積分変換の計算法, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2003/12/18
- T. Ooura, A double exponential formula for the Fourier transforms, 共同研究集会 - Thirty Years of the Double Exponential Transforms, 京都大学数理解析研究所, 2004/9/3
- 大浦拓哉, Fourier 変換に対する二重指数関数型公式, 環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム, 愛媛大学, 2005/1/23

研究分担課題: 分岐現象の数値実験

上田 肇一
京都大学数理解析研究所・助手

3種の活性 - 基質消費系方程式における振動パルス同士の散乱パターンのパラメータ依存性がパルス解の大域的分岐構造からどのように理解されるかという視点で研究を行なった。

・ 散乱パターンにおいてみられる分水嶺解

パルス同士が速い速度で対衝突し、パルスの形が大変形するような散乱現象において、散乱後のパターンが変化するとき解軌道は分水嶺解と呼ばれる不安定定常解に近づくことを数値的に示した。本研究で扱った方程式においては、振動パルスの対衝突によって対消滅や反射といった散乱パターンがみられる。数値実験によって衝突後のパターンが変化するパラメータ付近において数値実験を行なうことにより衝突後の解軌道はある不安定次元1の分水嶺解の近くを通ることを示した。

・ 分水嶺解の不安定多様体の振る舞いと散乱パターンの関係

パルスが強い相互作用によって散乱する場合、分水嶺解が衝突前後の入出力関係を制御していることを明らかにした。分水嶺解から延びる不安定多様体の振る舞いを調べるためにパルス解の大域的分岐構造を調べ、分水嶺解から延びる不安定多様体がどのような解に繋がっているかを確かめた。分水嶺解にその最大固有値に対応する固有関数方向の微小な摂動を加えるという数値実験を行うことによって、不安定多様体は散乱パターンでみられる解に繋がっていることを示した。このことにより分水嶺解はサドルの役割を果たしており、分水嶺解から延びる不安定多様体の大域的な繋がりから散乱パターンを予測することが可能になることがわかった。

・ 衝突時の位相によって変化する散乱パターン

振動パルスにおける散乱パターンにおいては衝突時の振動の位相の違いによっても入出力関係が変化することを数値実験によって明らかにした。対衝突時の振動の位相をコントロールする数値実験を行なうことによって位相の違いのみに依存して衝突後のパターンが変化するパラメータ領域が存在することを示した。そのパラメータ領域においては散乱パターンが変化するとき、解軌道は分水嶺解の近くを通ることを示した。さらに分水嶺解から延びる不安定多様体が散乱後の解に繋がっていることを摂動実験によって明らかにした。

学会誌等

1. Yasumasa Nishiura, Takashi Teramoto and Kei-Ichi Ueda, "Scattering and separators in dissipative systems" Physical Review E 67, pp.056210-1 - 056210-7 (2003).

2. Yasumasa Nishiura, Takashi Teramoto and Kei-Ichi Ueda, "Dynamic transitions through scattors in dissipative systems" Chaos 13(3) , pp.962-972 (2003).

3. 上田 肇一, 西浦 廉政, "領域増大速度に依存する縞模様分岐", 数理解析研究所講究録 vol.1313, pp.53-64 (2003).

4. 上田 肇一, 西浦 廉政, 菅野 啓, 柳田 達雄, "分岐追跡ソフトウェアを用いた神経伝播パルスの崩壊過程の解析" 電子情報通信学会 信学技報, NLP2003-26, pp.37-41 (2003).

5. 上田 肇一, 西浦 廉政, 上山 大信, "空間離散近似によってみられるカオス的パルスの数値的解析" 電子情報通信学会 信学技報 NLP2003-47, pp.13-16 (2003).

6. Takashi Teramoto, Kei-Ichi Ueda and Yasumasa Nishiura, Phase-dependent output of scattering process for traveling breathers, Physical Review E, 69, pp.056224-1–056224-8 (2004)

総説等

1. 西浦 廉政, 寺本 敬, 上田 肇一, "散逸系における散乱現象 その多彩な入出力関係をめぐって", 数理科学 4 月号 No.478 pp.41-47 (2003).

口頭発表 (学会)

1. "余次元 2 の特異点近くにおけるパルスダイナミクス", 日本数学会, 島根大学　2002 年 9 月

2. "分岐追跡ソフトウェアを用いた神経伝播パルスの崩壊過程の解析", 電子情報通信学会 非線形問題研究会, 那覇市自治会館 2003 年 6 月

3. "空間離散近似によってみられるカオス的パルスの数値的解析", 電子情報通信学会 非線形問題研究会, 公立はこだて未来大学 2003 年 7 月

4. "不安定フロントと不安定バックから形成される安定パルス", 日本応用数理学会, 京都大学 2003 年 9 月

5. "反応拡散系にみられるパルスの散乱現象", 日本数学会, 千葉大学 2003 年 9 月

6. "サドル・ノード分岐点近傍におけるパルスの散乱現象", 日本数学会, 北海道大学 2004 年 9 月

口頭発表 (研究集会・ワークショップ・セミナー)

1. "Cascade process of pattern formation on growing domain", Morphogenesis and pattern for-

mation in biological systems, 中部大学, 2002 年 9 月

2. "成長領域におけるパターン形成", 盛岡応用数学小研究集会, 岩手大学 2002 年 10 月

3. "領域増大問題のパルスダイナミクスへの縮約", 応用数学合同研究集会, 龍谷大学　2002 年 12 月

4. "Cascade process of pattern formation on growing domain", Workshop at Ryukoku University -New Perspectives of Nonlinear Partial Differential Equations-,
龍谷大学 2003 年 6 月

5. "空間離散近似によってみられるパルス解の数値解析", 「非線形科学の深化と情報科学への応用」研究会, 山口大学 2003 年 12 月

6. "反応拡散系にみられる進行パルスの散乱現象", 応用数学合同研究集会,　龍谷大学　2003 年 12 月

7. "反応拡散系におけるパルスの散乱現象", 数理解析セミナー, 大阪大学 2004 年 6 月

8. "A manner of splitting on growing domain", 京大数理研＆数学教室 – ソウル大学数学教室若手数学者交流会, ソウル大学 2004 年 9 月

9. "Pulse splitting in reaction-diffusion systems on growing domains", Applied/Interdisciplinary Mathematics Seminar,
University of Illinois 2004 年 9 月

10. "Pulse splitting in reaction-diffusion systems on growing domains", Mathematical biology seminar, University of Utah 2004 年 10 月

11. "反応拡散系におけるパルスの散乱ダイナミクス", 現象数理セミナー, 九州大学 2004 年 10 月

12. "複合分岐点近傍におけるパルスの散乱パターン", 応用数学合同研究集会, 龍谷大学 2004 年 12 月

13. "反応拡散系における粒子パターンの散乱現象", 北陸数学セミナー, 金沢大学 2004 年 12 月

14. "パルスの散乱現象における不安定定常解の役割", ワークショップ「現象とその構造」, 大阪大学 2005 年 1 月

15. "Scattering of particle-like patterns in reaction diffusion systems", The Fifth East Asia PDE Conference, 大阪大学 2005 年 2 月

研究分担課題：流体中の拡散現象の研究

木村　芳文
名古屋大学　大学院多元数理科学研究科・教授

上記の分担課題について、特に流体の持つ非線形性と統計性に興味を持って研究を行い次のような研究成果を得た。

木村と Herring は２次元乱流中の逆エネルギーカスケードプロセスの一つの表現として、非一様楕円渦がフィラメントを放出して円形渦に近づく軸対称化過程を理論的、数値的に考察した。その結果、渦度の分布が境界で不連続に近くなるとフィラメントの放出が間欠的になることを発見した。結果は「Gradient enhancement and filament ejection for non-uniform elliptic vortex in 2D turbulence」というタイトルで Journal of Fluid Mechanics に発表した。

地球流体力学の基礎問題として木村と Herring は成層乱流の研究を続けている。成層乱流は一様等方性乱流に比べ３次元性が押さえられ、２次元乱流と３次元乱流の中間の性質を呈する。この成層乱流の持つ渦構造や統計性の特徴を数値計算を通してエネルギーカスケードの観点から議論した。

木村と大学院生の小碇は、３次元渦糸ソリトン周りの粒子の運動を数値解析し、ソリトンのループ付近を初期位置とする粒子がループとノットをつくるトーラス面上を運動することを発見した。流体粒子の運動を記述する力学系は Biot-Savart 積分を含む３次元力学系であるが、得られたトーラスの構造は非可積分なハミルトン系で特徴的な KAM トーラスのそれと大変類似していることが分かった. 最大トーラスの体積を渦ソリトンの形と強さの関数として計算し、有限体積の流体が渦ソリトンによって輸送されることを示した。結果は「Particle transport by a vortex soliton」というタイトルで Journal of Fluid Mechanics に発表した。

研究発表リスト

１． 研究発表　（学会誌、英文）

[1] Kimura, Y. & Herring, J. R., 2001: Gradient enhancement and filament ejection for non-uniform elliptic vortex in 2d turbulence, *J. Fluid Mech.* **439**, pp. 43–56.

[2] Herring, J.R. & Kimura, Y., 2002 : Structural and statistical aspects of stably stratified turbulence, in *Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence* (Y. Kaneda & T. Gotoh, eds.) pp. 15–24.

[3] Pelz, R. & Kimura, Y., 2003 : Self-similar, finite-time collapse of the straight vortex-filament dodecapole, 数理解析研究所講究録 #1326 pp. 10–13.

[4] Kimura, Y. & Koikari, S., 2004 : particle transport by a vortex soliton, *J. Fluid Mech.* , **510**, pp. 201-218.

[5] Kimura, Y., 2005 : Motion of 3D vortex filament and particle transport, Proceedings of the IUTAM symposium on Elementary Vortices and Coherent Structures Significance in

Turbulence Dynamics, Kyoto 2004, (ed. S. Kida), to appear

2. 解説など、和文

[6] 木村芳文、地球流体力学の一視点、別冊・数理科学 「微積分の広がり その魅力と多様な進化」 2004 年 4 月、 pp. 47–54.

3. 研究発表 (国際会議)

1. 2001 年 11 月 アメリカ サンディエゴ (カリフォルニア)

米国物理学会 / 流体力学分科会

題： Structural aspects of stably stratified turbulence. (with J.R. Herring)

2. 2002 年 11 月 アメリカ ダラス (テキサス)

米国物理学会 / 流体力学分科会

題： Structural and statistical aspects of stably stratified turbulence. (with J.R. Herring)

3. 2003 年 11 月 アメリカ メドーランド (ニュージャージー)

米国物理学会 / 流体力学分科会

題： Particle transport by a vortex soliton. (with S. Koikari)

4. 2004 年 8 月 ポーランド ワルシャワ

国際理論応用力学連合 (IUTAM) 総会

題： Particle transport by a vortex soliton. (with S. Koikari)

5. 2004 年 10 月 日本 京都

国際理論応用力学連合 (IUTAM) シンポジウム「 Elementary Vortices and Coherent Structures – Significance in Turbulence Dynamics –」

題： Motion of 3D vortex filament and particle transport

6. 2003 年 11 月 アメリカ シアトル (ワシントン)

米国物理学会 / 流体力学分科会

題： Motion of 3D vortex filament and particle transport

4. 国内における研究発表等

1. 2001 年 11 月、国際高等研究所

研究集会「巨視的乱雑系の力学」

題：乱流中の圧力分布について

2. 2002 年 1 月、京都大学、数理解析研究所

短期共同研究集会「流体力学における Rich Pelz の貢献」

題： Self-similar, finite-time collapse of the straight vortex-filament dodecapole

研究分担課題: 水面波の理論および数値実験

東海林まゆみ
日本女子大学理学部数物科学科・教授

本研究分担課題として、下記のような内容で京都大学数理解析研究所岡本久教授と共同研究を行った。

(1) Interfacial waves の数値シミュレーション. リスト [1, 2]

異なる密度を持つ2種類の流体の境界をなす interfacial waves の分岐解の形状を数値シミュレーションした。シミュレーションの目的はいくつかあるがその中で残されている課題のひとつは、分岐解の極限波形状を調べることである。重力波の場合、可能な限り離散化を細かくして計算を行ったが、極限波まで到達することができなかった。Grimshow & Pullin ('86) にヒントを得て、我々はある特殊な場合 (条件) の極限波の形状を予測している。それを確認すべく、極限波を計算するためのアルゴリズムを調査・検討中であるが、まだ解決できていない。今後の課題である。

(2) 2次元渦あり流れの数値シミュレーション. リスト [3]

本研究では渦度分布を種々に変化させて、重力波や表面張力波の分岐解を数値計算した。従来の研究結果と合わせて、分岐解の極限波形状の違いを調べることを目標とした。自由境界領域における渦あり問題を数値計算する際、渦無しの場合とは異なる困難さが生じる。それを克服する方法としては、Zeidler('71) による擬似ポテンシャルを導入する考え方を利用した。この方法なら bubble 状の波形も計算できるためである。しかし数値計算を進める過程で新たな問題が発生した。Zeidler の方法では計算できない場合 – closed eddy が生じる場合 – が起こり得ることがわかった。この問題の解決策は現在模索中であり、今後の課題となっている。とりあえず計算できる場合について差分法で数値シミュレーションを行い、いくつかの結果を得た。深さは有限の場合のみを扱った。無限深さの場合にはプログラミング上の問題が解決できていない。これも今後の課題である。

本研究で得た計算結果は、下記の通りである。以下、渦度関数は常に正または負で、定数あるいは水深とともに減衰するような場合のみを考えた。表面張力波と表面張力 - 重力波では、渦度分布をどのように与えても極限波はすべて overhanging type あるいは overlapped type になった。ここで表面張力の影響が強くなるほど、bubble は大きくなる。一方重力波で渦度が水深とともに減衰する場合には、corner あるいは cusp を持つ極限波となる。corner あるいは cusp の sharp さは、渦度分布によって異なる。また重力波で渦度一定の場合には、極限波に至る途中で overhanging type の波形が現れ、その後 corner を持つ極限波に至る。corner の sharp さは、渦度の大きさによって異なる。これまでの数値実験によると、重力波においてこのような overhanging type の波形が現れるのはこの渦度一定の場合のみである。これは注目すべき現象であり、今後更に検討していきたいと考えている。

上記数値実験には２次元の全領域での計算を行う必要があり、種々の計算データを揃えるためには多くの計算時間を必要とする。上記結果は、本研究費で購入した高速のＰＣを使うことで実現できた成果である。現在も計算続行中であり、更に２，３のデータが揃ったところで、論文としてまとめる予定である。

参考文献

1. 研究発表（学会誌など）

[1] M. Shōji, Numerical solutions of the bifurcation problem of interfacial progressive water waves, the Natural Science Report of the Ochanomizu University vol.53 (2002), pp. 111–115.

2. 研究発表（口頭発表・ポスターなど）

[2] ２００２年１月, 鳥取大学,
研究集会「 流れと波動の特異性に関する研究 」, 鳥取大学工学部,2002 年１月,
題： Interfacial waves の数値シミュレーション

[3] ２００４年１１月, 中華民国　科学院数学研究所, 台北
研究集会「Taiwan-Japan Joint Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics」
題： On the extreme rotational waves

研究分担課題：分岐現象の数値実験

長山 雅晴
金沢大学 大学院自然科学研究科・助教授

上記の分担課題とその関連事項につき、以下のような研究成果が得られた．

本研究では，計算機支援によって，数理モデルを用いた現象の数理解析と反応拡散系に現れるパルス解のダイナミクスを分岐現象の視点から考察した．

長山と中田らは，界面活性粒子の運動を記述する数理モデルを提出し，その解析から実験現象に対して数理的側面から現象の発生機構の示唆を与えることに成功した．この結果から，界面活性膜と化学反応を起こす化学物質が入った溶液上での界面活性粒子が間欠運動を起こす重要な条件は，（1）化学反応次数において界面活性粒子の次数が反応物質の次数より小さいこと，（2）水溶液中での反応物質のイオン拡散は界面活性膜の表面拡散に比べて十分遅い，ことが重要であることがわかった．また，数理モデルの数値実験によって、水面上で停止している粒子が動き始めるとき，粒子の大きさによってその分岐構造に違いが見られた．この結果を実際の実験によって確認しようとしたが，実験では粒子の大きさによって分岐構造が異なるを見つけることができなかった．数理モデルの限界なのか，実験精度の問題なのかはまだはっきりしていないので今後の課題である．

長山と栄らは，反応拡散方程式に現れる進行パルス解や進行スポット解の相互作用に関する研究を行ってきた．「速度の遅い進行パルスやスポットは反射する」という数値計算からの予想に対して，進行パルス波解の相互作用を記述する縮約方程式を「中心多様体の理論」を用いて導出した．縮約方程式の係数を求めるためには、対象とする反応拡散方程式の定常解から進行パルス解への分岐点における０固有値に対する固有関数を精度よく求めなくてはならなかったが，有限体積法を用いた計算によって固有関数を精度よく求めることに成功した．この結果から「任意に遅い進行パルス波解は反射する」ということを数値計算を援用することで証明できた．また，２次元の進行スポット解についても同様の方法によって相互作用を記述する縮約方程式を導出し、数値計算を援用することで反射することを示した．このような進行スポットを２次元の矩形領域で数値計算すると，進行スポットの運動が周期運動になることを発見した．この周期運動の存在と安定性の解析は今後の課題である．

長山と池田は，円柱領域において反応拡散系に現れるらせん波の出現機構を調べるために定常進行波からの分岐構造を計算機支援解析のもと行った．対象とした系は区分的線形関数とした．その結果，１次元の定常進行波が脈動進行波に分岐するよりも，半径がある程度以上大きければ円柱領域において定常進行波がらせん波に分岐するほうが早いことがわかった．この分岐現象は Hopf 分岐であり，この分岐現象によって界面が不安定化することがわかった．

研究発表リスト

Reference

1．研究発表（学会誌など）

(1) M. Nagayama and H. Okamoto, *On the interior layer appearing in the similarity solutions of the Navier-Stokes equations*, Jpn. J. Indast. Appl. Math. 19(2) (2002) 277-300.

(2) M. Nagayama, H. Okamoto and J. Zhu, "On the blow-up of some similarity solutions of the Navier-Stokes equations", Quaderni di Matematica 10 (2002) 139-162.

(3) Y. Hayashima, M. Nagayama, Y. Doi, S. Nakata, M. Kimura and M. Iida, "Self-motion of a camphoric acid boat sensitive to chemical environment", Phys.Chem.Chem.Phys.,4(2002) 1386-1392.

(4) S. -I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Pulse-pulse interaction in Reaction-Diffusion system*, Physica D, 165(2002) 176-198.

(5) M.Mimura, M.Nagayama and T.Ohta, *Non-annihilation of travelling pulses in reaction-diffusion systems*, Methods and Applications of Analysis, 9(4)(2002) 493-516.

(6) M. Nagayama, S. Nakata, Y. Doi and Y. Hayashima, *A theoretical and experimental study on the unidirectional motion of a camphor disk*, Physica D, 194(2004) 151-165.

(7) T. Ikeda, M. Nagayama and H. Ikeda, *Bifurcation of helical wave from travelling wave*, Jpn. J. Indast. Appl. Math. 21(3)(2004) 405-424.

(8) S. -I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Interacting spots in reaction diffusion systems*, 投稿中

2．研究発表（解説など）

(9) M. Nagayama, Y. Doi and S. Nakata, "リン酸緩衝液上での樟脳酸運動の数理モデル", 京都大学数理解析研究所講究録, 1313 (2003), 159-166.

3．国外における主な研究発表等

(1) Travelling spots in reaction-diffusion systems, International Conference on High Performance Scientific Computing, Hanoi, March 13, 2003

4．国内における主な研究発表等

(1) 2002年3月，京都大学，短期共同研究「非線形現象の解析：実験と数理解析」（研究集会主催者）

(2) 2002年3月，北海道大学，NSC workshop「Intrinsic 縞々学」，
題：進行波の振動現象 —燃焼方程式とバクテリアコロニー形成モデル—，

(3) 2002 年 9 月，慶応大学，応用数理学会，
題：対流効果を伴う樟脳運動について，

(4) 2002 年 9 月，島根大学，数学学会，
題：反応拡散系におけるヘリカル波の出現機構

(5) 2002 年 11 月，東京都立大学，偏微分方程式セミナー，
題：Numerical understanding of helical waves arising in some reaction-diffusion systems,

(6) 2003 年 2 月，北海道大学，NSC Winter seminar,
題：Numerical Study of Travelling Spots in Reaction-Diffusion Systems

(7) 2003 年 07 月，神戸インスティチュート，
研究集会「界面ダイナミクスを再現する数値解析法の開発と実験分野への応用について III」，
題：固形カンフェンの間欠運動について

(8) 2003 年 09 月，京都大学，応用数理学会，
題：反応拡散場での粒子運動について

(9) 2003 年 10 月，岩手大学，盛岡 応用数学 小研究集会，
題：反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて

(10) 2003 年 11 月，宮崎大学工学部，研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki」，
題：反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて

(11) 2003 年 12 月，山口大学工学部，研究集会「非線形科学の深化と情報科学への応用」，
題：反応拡散場での粒子運動の数理解析，

(12) 2003 年 12 月，龍谷大学，応用数学合同研究集会，
題：反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて，

(13) 2004 年 01 月，九州大学，Hakozaki Workshop on Applied and Numerical Analysis,
題：樟脳運動の数理モデル

(14) 2004 年 02 月，大阪大学，研究集会「数理工学に現れる微分方程式とその周辺」，
題：反応拡散場での粒子運動の数理モデル

(15) 2004 年 03 月，広島大学，応用解析研究会，
題：反応拡散場における粒子運動の数理モデル

(16) 2004 年 03 月，Shonan International Center, US-Japan workshop on Dynamics and Computations,
題：A theoretical study on the motion of a camphor disk

(17) 2004 年 09 月，中央大学，応用数理学会，
題：油虫運動の数理モデル

(18) 2004 年 10 月，京都大学，研究集会「非線形現象の実験解析と数理解析」（研究集会主催）

研究分担課題：渦層の動力学の数値的研究

坂上貴之
北海道大学大学院理学研究科・助教授

上記の分担課題につき以下のような成果が得られた。

三次元渦層に現れる特異性の特徴付け

非粘性・非圧縮流体の速度場の不連続面として定義される三次元渦層には, 二次元渦層において見られるような Kelvin-Helmholtz 不安定性に由来する曲率特異性が生成することは以前から知られている. 一方で対象の次元が一つ増えたことによりこれとは異なるタイプの特異性が出るのではないかという指摘が直接大規模数値計算などからなされてきた. これに対して, 私はある回転軸を中心とする回転流の不連続面により生成される円筒渦層を取り上げ, 二次元の特異性が出現しないよう系に軸対称性を課した時に生成する特異性について, Richardson 補外による特異積分の高精度計算とフーリエ級数近似による精密な数値的手法を使ってその特徴を明らかにした. その結果, 渦層の幾何学的な特徴としては二次元の場合と同様の曲率特異性が発生するが, その物理的特徴として渦層の強さではなくて, 渦糸の微分が爆発していることが明らかになった. これはこれまでに指摘されなかった新しい特異性である.

Constantin-Lax-Majda 方程式の解の存在と適切性

三次元 Euler 方程式の解の存在と適切性を数学的に示すことは非常に難しい問題であるが, そこに潜む数理的構造の把握のため, Euler 方程式の渦の引き延ばし項に相当する非線形項の一次元の類推項を用いた一次元偏微分方程式モデルが導出されている. この方程式はその導出者の名前から Constantin-Lax-Majda 方程式 (以下 CLM 方程式) と呼ばれており, 粘性のない場合についてはこれまでよく研究されてきた. これに対して, 私は一般化されたラプラシアンの p 乗の粘性項を加えた CLM 方程式を構成し, 解のフーリエ級数展開とそのフーリエ係数の間に成立する比較原理を使って, 解の存在と適切性について厳密に議論した. その結果, どのような粘性項に対しても, 十分大きな初期データを取れば解は有限時間で爆発することが示された. これは渦の引き延ばしの非線形項の効果がどんなに大きな拡散項によっても押えられないことを意味しており, このことが本質的に三次元の問題を難しくしているのではないかという示唆を得た. この研究の一貫として解が時間大域的に存在する条件などについても詳しく調べ, すべての拡散項に対して解の存在と適切性の問題を解決することができた.

極渦を持つ球面渦層の数学解析・数値解析

球面にある渦層の数値的・数学的研究を行った．地球の自転の効果を間接的に表現するために球の北極と南極に渦糸を固定し，それが誘導する背景速度場のもとでの渦層の時間発展を調べた．まず，渦層の線形化方程式を導出し，その線形安定性を調べ，ある条件のもとでは低次の解の摂動のスペクトルが中立安定化する一方で高次の摂動のスペクトルは必ずKelvin-Helmholtz不安定性により不安定化することがわかった．この事実から極渦の大きい極にある渦層の方が安定であることなど物理的にも面白い結果を得た．次に二次元渦層と同様の数値計算方法を用いて，極渦の大きさに関係なく球面渦層にも有限時間で曲率特異性が生成することを示した．最後に渦法による渦層の長時間発展の数値計算を行った．それによると渦層は初期摂動の低次スペクトルがたとえ線形中立安定であっても，方程式の持つ非線形の効果で高次スペクトルが励起され，それが不安定化して最終的には渦層は螺旋構造を作ることがわかった．そこに現れる螺旋の数は極渦の強さに応じて変化し，またその中心は同一緯線の上に等間隔に並んでいることなどもわかった．さらに線形中立安定な低次モードの大きさと最終的な螺旋渦巻き数の間には単純な関係が成立していないこともわかり，これは将来的に扱われる問題として残されている．

極渦を持つ球面渦糸環の不安定周期軌道に関する研究

さて，上で見たようにこの長時間発展の後，渦層には複数の螺旋渦巻からなる構造が出現するが，それぞれの渦巻構造に対してその中心から一定距離を持つ領域に含まれる循環を中心の一点に集中させると，この渦巻構造の縮約モデルとしての球面渦糸系が得られる．私はこの縮約渦糸系の数学的研究を通じて，渦巻構造の長時間発展の理解を目指した．渦層の数値計算の結果として得られた渦巻構造では，渦巻きの中心が同一緯線上に並んでいるので，渦糸を緯線の上に等間隔にならべた配置(これをN点渦糸環とよぶ)を特にとりあげることにし，それが不安定化した時にどのような挙動を示すかを力学系理論による定性的手法から調べた．まずはこのN点渦糸環の線形安定性解析を実行し，偶然にもその固有値と固有ベクトルを全て書き下すことに成功した．そのおかげで固有値にはある順序関係が成立することがわかり，そこから渦糸環の安定性がその順序関係における最大固有値の安定性により決定されることを示した．N点渦渦糸環の安定性そのものについては以前からその結果が知られていたが，線形化問題の固有値との関連を指摘したのはこれが初めてである．その後さらに一歩進んで，偶数個の渦糸からなるN点渦糸環が不安定化した場合に，どう時間発展をするかを調べた．そのために最大固有値の対応する固有ベクトルを見て，それが持つ対称性から渦糸系の方程式を二次元の問題に縮約して，それを数学的に調べた．その結果，微小摂動を加えたN点渦糸環には極渦の強さに応じて4種類の周期解が存在することがわかり，またその周期解のパラメータ変化に伴う変遷の様子も調べることができた．さらに，これらの周期解の安定性が第二最大固有値の安定性によって決定されていることも示した．その後，現在に至るまで奇数の渦糸環の場合の問題についても研究を進めており，その結果は現在論文としてまとめている最中である．

研究発表 (最近三年間) のリスト

研究発表、英文

1. T. Sakajo, Formation of curvature singularity along vortex line in an axi-symmetric, swirling flow, Physics of Fluids , vol. 14 No.8, (2002) pp. 2886-2897.
2. T. Sakajo, Blow-up solutions of Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term, J. Math. Sci. Univ. Tokyo , vol. 10 (2003) pp. 187-207.
3. T. Sakajo, On global solutions of Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term, Nonlinearity , vol. 16 (2003) pp. 1319-1328.
4. . T. Sakajo, Motion of a vortex sheet on a sphere with pole vortices , Physics of Fluids, vol. 16 (2004) pp. 717-727.
5. T. Sakajo, Analytic continuation of the Birkhoff-Rott equation in complex time domain, European J. Appl. Math. , vol. 15 (2004), pp.39-53.
6. T. Sakajo, Transition of global dynamics of a polygonal vortex ring on a sphere with pole vortices, Physica D , vol. 196 (2004), pp. 243-264.
7. E. Kin and T. Sakajo, Efficient topological chaos embedded in the blinking vortex system, Chaos , submitted.
8. T. Sakajo, Motion of unstable polygonal ring of vortex points on sphere with pole vortices , Proc. IUTAM 2004 , submitted.
9. T. Sakajo, High-dimensional homoclinic and heteroclinic maniholds in odd point vortex ring on sphere with pole vortices , preprint.

解説など、和文

1. 坂上 貴之, 軸対称渦層に現れる特異点について京都大学数理解析研究所講究録 微分方程式の離散化手法と数値計算アルゴリズム vol. 1265 (2002) pp. 51-61.
2. 坂上 貴之, 一般化された粘性項をもつＣＬＭ方程式の爆発解について京都大学数理解析研究所講究録 非線形現象の解析：実験と数理解析 vol. 1313 (2003), pp. 1-14.
3. T. Sakajo, Analytic properties of Constanin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term 京都大学数理解析研究所講究録 Rich Pelz's Contribution to Fluid Dynamics vol. 1326 (2003), pp.32-43.
4. 坂上 貴之, 極渦のある球面での渦層の運動 ,Miyazaki University of Technological Report Series In Applied Mathematical Sciences vol 3 , (2004) pp. 69-80.

5. 坂上 貴之, 渦層の時間発展と特異点～それでも渦層は巻き上がる？～, 物性研究 第 82 号, pp. 1-44 (2004).

6. 坂上 貴之, 球面渦運動の数理, ２００４年度日本数学会秋季分科会 応用数学分科会 予稿集 (2004).

研究発表（国際会議）

1. 2002 年 8 月 日本 筑波大学
The 6th Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics
題： Singularity formation along vortex line in an axisymmetric, swirling vortex sheet

2. 2003 年 7 月 オーストラリア, シドニー
International Conference on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2003)
題： Blow-up solutions of the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term"

3. 2004 年 3 月 日本 湘南国際村センター
US-Japan Workshop on Dynamics and Computation
題： Transition of global behaviour of polygonal ring of identical vortex points on sphere with pole vortices.

4. 2004 年 7 月 日本 横浜地球環境フロンティア研究センター
The 2004 Workshop on the Solution of Partial Differential Equations on the Sphere
題： Motion of a vortex sheet on a sphere with a background global flow"

5. 2004 年 8 月 中国 湖南省 張家界
The 7th Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics
題： Long Time Evolution of a Vortex Sheet on a Sphere with pole vortices

6. 2004 年 10 月 日本 京都 International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM2004) Elementary Vortices and Coherent Structures–Significance of Turbulent Dynamics
題： Motion of Unstable Polygonal Ring of Vortex Points on Sphere with Pole Vortices

7. 2005 年 2 月 日本 大阪大学中之島センター
The 5th East Asia Symposium on PDE
題： Long time evolutiuon of vortex sheet on sphere with a background flow

研究発表（国内における研究発表）

1. 2002 年 7 月 京都大学数理解析研究所 流体セミナー
題： A motion of a two-dimensional vortex sheet and rolling-up spiral

2. 2002 年 7 月 日本流体力学会年会２００２ (仙台)
題： 一般化された粘性項をもつＣＬＭ方程式の爆発解

3. 2002 年 9 月 日本応用数理学会年会 (慶応大学／理工学部)
題： 一般化された粘性項をもつＣＬＭ方程式の爆発解

4. 2002 年 9 月 日本数学会 秋期分科会 (島根大学／総合理工学部)
題： 一般化された粘性項をもつＣＬＭ方程式の爆発解

5. 2002 年 10 月 東京理科大学 理工学部 数学教室 談話会
題： 一般化された粘性項をもつＣＬＭ方程式の爆発解 」

6. 2002 年 10 月 北海道大学 大学院理学研究科 数学専攻 特別談話会
題： 一般化された粘性項をもつＣＬＭ方程式の爆発解

7. 2003 年 1 月 京都大学 数理解析研究所 短期共同研究集会
題： ３次元 Navier-Stokes 方程式のモデルとしてのＣＬＭ方程式について

8. 2003 年 4 月 北海道大学 大学院理学研究科 数学専攻 PDE セミナー
題： 一般化された粘性項を持つ Constanin-Lax-Majda 方程式の数学・数値解析

9. 2003 年 5 月 北海道大学 大学院理学研究科 数学専攻 談話会
題： 極渦を持つ球面上の渦層の運動

10. 2003 年 9 月 ２００３年度日本応用数理学会年会 （京都大学）
題： 極渦を持つ球面上の渦層の運動

11. 2003 年 11 月 宮崎大学 研究集会「PDE and Phenomena in Miyazaki」
題： 極渦を持つ球面上の渦層の運動

12. 2004 年 12 月 研究集会 「非線形反応と協同現象」@京都大学
題：流体理論と反応拡散系理論の融合により現れる新しい問題について」

13. 2004 年 1 月 九州大学 現象数理セミナー
題： 極渦を持つ球面上の渦層の運動

14. 2004 年 1 月 日本学術会議 第５３回理論応用力学講演会 オーガナイズドセッション「渦のダイナミックスと安定性」
題： 極渦を持つ球面渦上の渦層の安定性

15. 2004 年 8 月 日本流体力学会　年会 2004 @名古屋大学
題： 球面渦糸環の周期解の遷移と安定性

16. 2004 年 9 月 日本数学会秋季総合分科会 特別講演@北海道大学
題：球面上渦層運動の数理

17. 2004 年 10 月 数理解析研究所研究集会「非線形現象の実験解析と数理解析」
題：流体運動中の化学反応の数理の構築に向けて

18. 2004 年 10 月 IUTAM2004 サテライト Workshop "Vortex and Turbulence in Classical and Quantum Fluids" (京都大学)
題： Motion of unstable N-ring of vortex points on sphere with pole vortices

19. 2004 年 11 月 九州大学 現象数理セミナー
題： Blinking vortex system に現れる位相カオス

20. 2004 年 12 月 北海道大学 複雑系セミナー
題： Blinking vortex system に現れる位相カオス

A remark on continuous, nowhere differentiable functions

Hisashi Okamoto[1]
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University, Kyoto 606-8502 Japan.

要旨

We consider a parameterized family of continuous functions, which contains as its members Bourbaki's and Perkins's nowhere differentiable functions as well as the Cantor-Lebesgue singular functions.

Keywords Continuous, nowhere differentiable function

AMS Mathematics Subject Classification 2000: primary 26A27, secondary 26A30

1 Introduction

Many examples are known of continuous, nowhere differentiable functions (see, for instance, [6, 10, 12]), notably Weierstrass's function and Takagi's function and their generalizations[4]. Of a different kind are a function by Bourbaki [1] and one by Perkins [9], which we would like to generalize in what follows. Although there have been written many papers on continuous, nowhere differentiable functions, our construction below seems to be one of the simplest and, at the same time, it discloses in a very elementary way a connection between nowhere differentiable functions and the Cantor-Lebesgue singular functions. In this respect, it seems to the author that the fact in the present paper may be worthy of notice.

We first fix a parameter $a \in (0,1)$. Then we define piecewise affine functions $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ on the unit interval $[0,1]$ as follows. We start with $f_0(x) = x$. Suppose that f_n has been so defined that it is continuous on $[0,1]$, and is affine in each subinterval $k/3^n \le x \le (k+1)/3^n$, where $k = 0, 1, \cdots, 3^n - 1$. f_{n+1} is then defined by requiring: (1) f_{n+1} is continuous on $[0,1]$; (2) f_{n+1} is affine in each interval $k/3^{n+1} \le x \le (k+1)/3^{n+1}$, where $k = 0, 1, \cdots, 3^{n+1} - 1$; and (3) the following conditions hold true:

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right),$$

$$f_{n+1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + a\left[f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)\right],$$

$$f_{n+1}\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + (1-a)\left[f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)\right],$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k+1}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right).$$

[1]Partly supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research from JSPS No. 14204007.

for $k = 0, 1, \cdots, 3^n - 1$. The operation from f_n to f_{n+1} is visualized in Figure 1. We now define

$$F_a(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

As we will prove in the next section, F_a is continuous on $[0, 1]$.

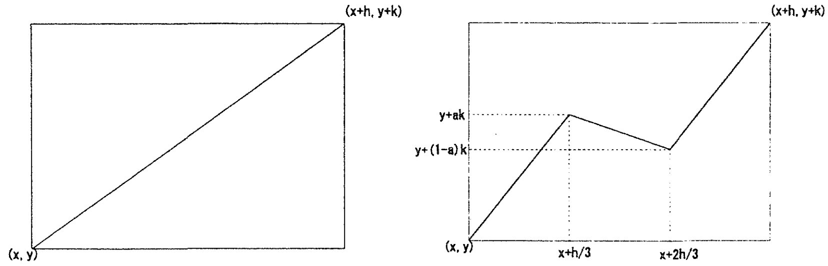

図 1: The operation from f_n to f_{n+1}. Before the operation (top). After the operation (bottom). This operation is performed in each subinterval $[k/3^n, (k+1)/3^n]$.

F_a becomes some known functions when a takes particular values. If $a = 5/6$, F_a is nothing but the function defined by Perkins[9]. This is a continuous, nowhere differentiable function (see Figure 2, top). If $a = 2/3$, then it is the function defined by Bourbaki[1]. Both functions have some similarity with the function defined by Bolzano in 1830's (see [8]), but Bourbaki refers only to Bolzano and not to Perkins; Perkins refers only to the examples of Weierstrass, Faber, etc., but these examples are of nature different from $F_{5/6}$. Presumably Perkins came up with his function by himself with few hints from literatures.

If $a = 1/2$, then F_a becomes the Cantor-Lebesgue singular function, which is nondecreasing but has zero derivative almost everywhere. The value $a = 0$ can also be considered, in which case F_a becomes the Heaviside function:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1/2) \\ 1/2 & (x = 1/2) \\ 1 & (1/2 < x \leq 1) \end{cases}$$

But this is discontinuous. Also, we see easily that F_1 is discontinuous, too. By these observations, we restrict ourselves to the case where $0 < a < 1$. Finally, we obviously have $F_{1/3}(x) \equiv x$.

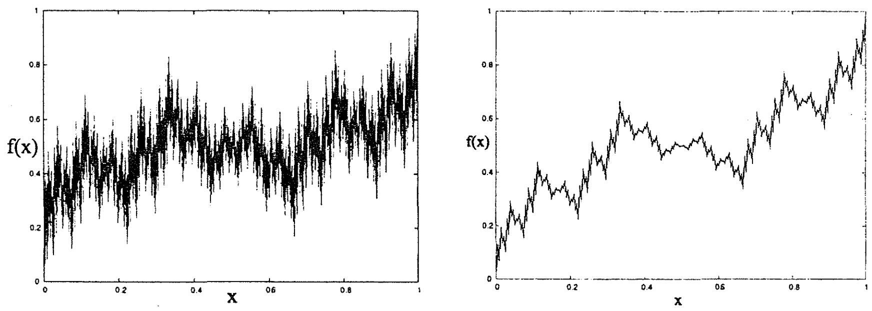

図 2: The graph of Perkins's function (top) and that of Bourbaki's (bottom).

2 Properties of F_a

Proposition 1 *For all $0 < a < 1$, F_a is well-defined and continuous everywhere on $[0, 1]$.*

Proof. Note first that $F_a(x) = f_n(x)$ if $x = k/3^n$ for $n = 1, 2, \cdots; k = 0, 1, \cdots, 3^n$. Let $A = \max\{a, |2a-1|\}$. Clearly $0 < A < 1$. Note then that for any $n \geq 1$, the derivative of f_n satisfies

$$|f_n'(x)| \leq (3A)^n$$

at all the points where f_n' exists. Note also that

$$\begin{aligned}\min\{f_n(k/3^n), f_n((k+1)/3^n)\} &\leq f_{n+p}(x) \\ &\leq \max\{f_n(k/3^n), f_n((k+1)/3^n)\}\end{aligned}$$

for all $p = 1, 2, \cdots$ and $k/3^n \leq x \leq (k+1)/3^n$. Now, for any $x \in [0, 1]$ and any $\epsilon > 0$, take n and k such that $A^n < \epsilon$ and $k/3^n \leq x < (k+1)/3^n$. Then

$$|f_{n+p}(x) - f_{n+q}(x)| \leq A^n < \epsilon$$

for all $p, q \geq 0$. Since n is chosen independently of x, $\{f_n(x)\}$ converges uniformly. This proves our proposition.

□

As for differentiability, the following is easy to prove:

Theorem 1 *If $a \leq 1/2$, then the function F_a is nondecreasing. In particular, it is differentiable almost everywhere.*

As is often used effectively in the differentiability test, the following lemma will be used in what follows:

Lemma 1 *If f is differentiable at x, then*

$$\lim_{h\downarrow 0,\ k\downarrow 0} \frac{f(x+k) - f(x-h)}{k+h} = f'(x).$$

(What is claimed is that the left hand side exists and is equal to the right hand side.)

We now prove the following

Theorem 2 *If $2/3 \leq a < 1$, then F_a is continuous on $[0, 1]$, but is nowhere differentiable.*

Proof. The proof by Perkins [9], where the case of $a = 5/6$ was considered, can be used with a minor change in the case where $2/3 < a < 1$. (The case of $a = 2/3$ will be considered later.) Note that $A = a$ in the present case. Then we easily see that

$$(3(2a-1))^n \leq |f_n'(x)| \leq (3a)^n$$

wherever $f_n'(x)$ exists. Since $2/3 < a$, $|f_n'|$ tends to infinity uniformly in x. Now let $x \in [0, 1]$ be arbitrarily chosen. For an arbitrary large n, we may choose an integer k such that $k/3^n \leq x < (k+1)/3^n$. It then holds that

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F_a((k+1)/3^n) - F_a(k/3^n)}{1/3^n}\right| = \\ &\quad\left|\frac{f_n((k+1)/3^n) - f_n(k/3^n)}{1/3^n}\right| \geq (3(2a-1))^n,\end{aligned}$$

which tends to infinity. This shows, with the aid of Lemma 1, the nondifferentiability at x.

If $a = 2/3$, the above argument must be modified slightly. In this case, $|f_n'(x)|$ can remain bounded at some points, say for instance at $x = 1/2$. But even on such points where $f_n'(x)$ are bounded, we see that $|f_n'(x)| \geq 1$ and that $\{f_n'(x)\}$ changes sign infinitely often. Therefore,

$$\frac{f_n((k+1)/3^n) - f_n(k/3^n)}{1/3^n}$$

cannot converge to a definite value.

□

Theorem 3 *If $1/2 < a < 2/3$, F_a is differentiable at infinite number of points. Also, it has no finite derivative at another set of infinite points.*

Proof. Let $x = k/3^n$, where n is a positive integer and $k = 0, 1, \cdots, 3^n$. We prove that F_a is nondifferentiable at such x's. We may assume without loss of generality that k is not a multiple of 3. If $k = 1$ modulo 3, then, by an elementary inspection as in the proof of the previous theorem, we have $D_-F_a(x) = +\infty$, where D_-F_a denotes the left derivative. (Here $a > 1/3$ is enough.) If $k = 2$ modulo 3, then $D_+F_a(x) = +\infty$, where D_+F_a denotes the right derivative. Also, $D_+F_a(0) = +\infty, D_-F_a(1) = +\infty$.

Differentiability of F_a at other x's depends on the number theoretic property of x. Let x be a number not of the form $k/3^n$, and we consider the ternary expansion of x:

$$x = \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{3^2} + \frac{\xi_3}{3^3} + \cdots, \tag{6}$$

where $\xi_j = 0, 1$, or 2. Let $i(n)$ denote the number of those ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ such that $\xi_i = 1$. Then $f_n'(x) = (3b)^{i(n)}(3a)^{n-i(n)}$, where $b = 1 - 2a$. If $(3b)^{i(n)}(3a)^{n-i(n)}$ converge as n tends to infinity, the function F_a is differentiable at x. Otherwise, it is not.

If $\xi_j = 1$ occur only for a finite number of j's, $|f_n'(x)|$ obviously tends to infinity. If $\xi_j = 1$ occur infinitely often, then (since $b < 0$) the sequence $f_n'(x)$ changes its sign infinitely often. It therefore converges if and only if it converges to zero.

Let $\gamma \in [0, 1]$ be defined by

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{i(n)}{n} = \gamma. \tag{7}$$

Then, $(3b)^{i(n)}(3a)^{n-i(n)} \to 0$ if $|3b^\gamma a^{1-\gamma}| < 1$. Consequently, $F_a'(x) = 0$, if

$$\gamma > \frac{-\log(3a)}{\log(2a-1) - \log a}. \tag{8}$$

In particuler, if $\xi_j = 1$ for all j except for a finite number, we then have $\gamma = 1$ and accordingly $F_a'(x) = 0$. Thus $F_a'(x) = 0$ if x is the mid-point of $k/3^n$ and $(k+1)/3^n$.

On the other hand, if $\gamma < -\log(3a)/[\log(2a-1) - \log a]$, then $(3b)^{i(n)}(3a)^{n-i(n)}$ diverges.

□

The graph of $\phi(a) = -\log(3a)/[\log(2a-1) - \log a]$ is shown in Figure 3. It decreases monotonically from 1 to zero, as a decreases from 2/3 to 1/2.

Remark 1 *Suppose now that $0 < a < 1/3$. In this case F_a' vanishes at $x = k/3^n$ and $F_a'(k/3^n + 1/(2\cdot 3^n)) = +\infty$. Also, the function has zero derivative if*

$$\gamma < \frac{-\log(3a)}{\log(1-2a) - \log a}.$$

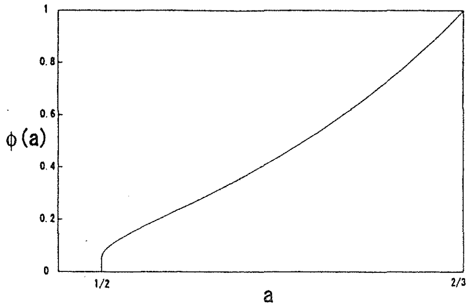

図 3: The graph of $\phi(a)$.

Since $0 < 3b < 1 < 3a$, *there exists infinity of* x, *at which* $(3b)^{i(n)}(3a)^{n-i(n)}$ *converges to a nonzero limit. The author, however, does not know a simple characterization of them.*

We finally consider the following question. Let the set of all the points at which F_a is nondifferentiable be denoted by S_a. Then $|S_a|$, the Lebesgue measure of S_a, is zero for $a \leq 1/2$, and is one for $a \geq 2/3$. What can we say about $|S_a|$ for $1/2 < a < 2/3$?

The (incomplete) answer is as follows:

Theorem 4 *Let* a_0 *be the unique root of* $54a^3 - 27a^2 = 1$ *in* $1/2 < a < 2/3$. *Then* $|S_a| = 0$ *if* $a < a_0$, *and* $|S_a| = 1$ *if* $a > a_0$.

Proof. Note first that a_0 is the root of

$$\frac{-\log(3a)}{\log(2a-1) - \log a} = \frac{1}{3}.$$

Since it is elementary, we omit the proof of the fact that this equation has a unique root in $1/2 < a < 2/3$.

Suppose now that $a < a_0$. We can take a γ_0 such that $\frac{-\log(3a)}{\log(2a-1)-\log a} < \gamma_0 < 1/3$. We then consider the set of all the real numbers for which

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{i(n)}{n} \geq \gamma_0.$$

We see that the set is included in S_a. Therefore the proof of the first half is complete if we have shown that the measure of the set is equal to one. The measure is actually equal to

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=[\gamma_0 n]}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k},$$

where $[\gamma_0 n]$ denotes the largest integer not exceeding $\gamma_0 n$. This is equal, by the central limit theorem, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta_n}^{\infty} \exp(-z^2)\mathrm{d}z, \ .$$

where

$$\theta_n = \left([\gamma_0 n] - \frac{n}{3} + \frac{1}{2}\right) \Big/ \left(\sqrt{n\frac{2}{9}}\right).$$

Since $\gamma_0 < 1/3$, the limit is equal to one. By quite an analogous way we can prove the latter half.

□

A numerical computation shows that $a_0 \approx 0.5592$. The author does not know about $|S_{a_0}|$.

3 Concluding remarks

If we introduce another parameter a' in such a way that a piecewise affine function, obtained by joining $(0,0)$–$(1/3,a)$–$(2/3,a')$–$(1,1)$, then we obtain new functions of more variety. Further, $1/3$ and$2/3$ may be replaced by other numbers. The simplicity, however, seems to be best seen in our present construction.

Prof. J. Kigami pointed out that the construction of functions by de Rham [3] has a similarity to ours. The similarity is indeed striking. But none of his functions belongs to our class, and none of ours is his. He also pointed out that our construction with $a = 1$ has a similarity to Moore[7], which constructed a continuous nowhere differentiable function by our operation with $a = 1$ and an additional construction.

Although we cannot see a direct connection, it may be helpful if we refer some non-differentiable functions expressed by binary and multi-nary expansions. Kawamura[5] generalized the results of [3, 4], and obtained, among others, a new class of continuous, nowhere differentiable functions by means of certain functional equations. Bush[2] constructed continuous, nowhere differentiable functions by using m-nary expansions of the independent variable, where m is any positive integer > 2. Swift[11] defined a one by means of the ternary expansion of the independent variable.

Acknowledgment. Prof. Kigami kindly gave useful comments; This is highly appreciated. Prof. Y. Morita let the author know the reference [5]. The author thanks for his kindness.

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Functions of a Real Variable*, Springer (2004). Translation from French text (published in 1976). page 35. Problem §1, 2).

[2] K.A. Bush, Continuous functions without derivatives, Amer. Math. Month., vol. 59 (1952), pp. 222–225.

[3] G. de Rham, Sur quelques courbes definis par des equations fonctionnelles, Rendi. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, vol. 16 (1957), pp. 101–113.

[4] M. Hata and M. Yamaguti, The Takagi function and its generalization, Japan J. Appl. Math., vol. 1 (1984), pp. 183–199.

[5] K. Kawamura, On the classification of self-similar sets determined by two contractions on the plane, J. Math. Kyoto Univ., vol. 42 (2002), pp. 255–286.

[6] A.B. Kharazishvili, *Strange Functions in Real Analysis*, Marcel Dekker, (2000).

[7] E.H. Moore, On certain crinkly curves, Trans Amer. Math. Soc., vol. 1 (1900), pp. 72–90.

[8] S. Russ, Bolzano's analytic programme, *Math. Intelligencer*, **14** (1992), 45–53.

[9] F.W. Perkins, An elementary example of a continuous non-differentiable functions, *Amer. Math. Monthly*, **34** (1927), pp. 476–478.

[10] A.N. Singh, *The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions*, in "Squaring the Circle and Other Monographs" E.W. Hobson et al., Chelsea (1953).

[11] W.C. Swift, Simple constructions of nondifferentiable functions and space-filling curves, Amer. Math. Month., vol. 68 (1961), pp. 653–655.

[12] M. Yamaguti, M. Hata, and J. Kigami, *Mathematics of Fractals*, (in Japanese), Iwanami Shoten (1993). Translation into English: Amer. Math. Soc., (1997).