

多様体上の双曲構造とその変形

(課題番号 15540069)

平成15年度～平成17年度 科学研究費補助金

(基盤研究(C))

研究成果報告書

平成18年3月

研究代表者 藤井 道彦

(数理学研究科 助教授)

京都大学図書



1060666950

附属図書館

はしがき

本研究では、空でない特異点集合 Σ をもつ、3次元双曲錐多様体 M の変形を解析することを目的としている。研究代表者の藤井は、 M が3次元球面 S^3 で Σ が8の字結び目となる例については、変形空間 R が導手15の楕円曲線であり、 R のいくつかの有限位数の点が双曲構造の退化で生じるすべての幾何構造とちょうど対応していることを見いだした。さらに藤井は、楕円曲線 R のモジュラー曲線 $X_0(15)$ 上でみると、それらの有限位数の点が $X_0(15)$ のある基本領域の境界円上に存在することを示した。一般に、 M 上の双曲構造の変形空間は有理数体上の代数多様体であるが、それが楕円曲線とか楕円曲面という極めて性質の良い場合について、 M の変形のメカニズムを数論の立場から解明することが今後の課題である。

また藤井は、2次元双曲錐多様体上のヘルムホルツ方程式について、錐角 t を変化させたときにその方程式がどのように影響を受けるかを研究した。とくにヘルムホルツ方程式を変数分離してできる確定特異点型の常微分方程式 E_t の確定特異点を研究した。この研究で、錐角 t が減少して $t = 0$ になる（つまり特異点がカスプになる）とき、 E_t の確定特異点の合流が起こり、 E_t の確定特異点が E_0 の不確定特異点になるということを見いだした。さらに、カスプが全測地的境界円 S^1 に変化していくという双曲構造の変形において、不確定特異点が正則点に変化していくということも見いだした。3次元双曲錐多様体に関しても、双曲構造の変形と確定特異点の合流との関連を見いだすことが今後の課題である。

研究分担者の上正明は、ザイフェルト有理ホモロジー3球面に対する Fukumoto-Furuta 不変量がスピンホモロジーコボルディズム不変であることを示し、ザイフェルト3次元多様体が3次元球面 S^3 の結び目のデー手術で得られるための条件を与えた。また、研究分担者の今西は、葉層構造を保つ Lipschitz 同相写像の研究を継続した。研究分担者の齋藤は、非アルキメデス局所体上の許容表現と代数体上のカスプ表現の具体的記述に成功した。

研究組織

- 研究代表者：藤井 道彦 (京都大学・大学院理学研究科・助教授)
研究分担者：今西 英器 (京都大学・大学院理学研究科・教授)
研究分担者：上 正明 (京都大学・大学院理学研究科・教授)
研究分担者：齋藤 裕 (京都大学・大学院理学研究科・教授)
研究分担者：森本 芳則 (京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授)
研究分担者：落合 啓之 (名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教授)

交付決定額 (分配額)

(金額単位：千円)

	直接経費	間接経費	合計
平成15年度	1,400	0	1,400
平成16年度	1,200	0	1,200
平成17年度	700	0	700
総計	3,300	0	3,300

研究発表

(1) 学会誌等

M, Fujii and H. Ochiai, An algorithm for solving linear ordinary differential equations of Fuchsian type with three singular points, *Interdisciplinary Information Sciences*, **9** (2003), 189-200.

M. Fujii, Degeneration of hyperbolic structures on the figure-eight knot complement and points of finite order on an elliptic curve, *J.Math.Kyoto Univ.*, **45** (2005), 343-354.

M. Ue, An integral lift of the Rochlin invariant of spherical 3-manifolds and finite surgery, *J.Math.Kyoto Univ.*, **45** (2005), 21-37.

M. Ue, The Neumann-Siebenmann invariant and Seifert surgery, *Math.Z*, **250** (2005), 475-493.

An Algorithm for Solving Linear Ordinary Differential Equations of Fuchsian Type with Three Singular Points

(2) 口頭発表

藤井 道彦、3次元双曲多様体の変形と幾何化予想、談話会、(2003年6月16日、大阪大学)

藤井 道彦、8の字結び目の補空間の双曲構造の変形空間について、研究集会「双曲空間に関連する研究とその展望 II」、(2003年12月、京都大学数理解析研究所)

藤井 道彦、実3次元双曲多様体の変形空間となる楕円曲線について、関数論セミナー、(2004年5月27日、大阪市立大学)

藤井 道彦、On elliptic curves associated with deformations of hyperbolic 3-dimensional structures、研究集会「リーマン面・不連続群」、(2004年12月、東京工業大学)

藤井 道彦、双曲構造の変形空間の上の有理点、研究集会「トポロジーとコンピューター2005」、(2005年11月、大阪産業大学)

上 正明、Fukamoto-Furuta 型不変量とそのデーン手術への応用、微分位相幾何セミナー、(2004年9月15日、東京工業大学)

上 正明、Fukamoto-Furuta and other invariants and their applications to 4-manifolds with boundary、研究集会「多様体のトポロジーの未来へ」、(2004年11月、東京大学大学院数理科学研究科)

上 正明、Fukamoto-Furuta 不変量とその3, 4次元多様体への応用、大岡山談話会および集中講義、(2004年11月29日~12月3日、東京工業大学)

The algorithm that we propose is divided into two parts. The purpose of the first part is to determine a factorization of the differential operator L . The factors of this factorization of L are operators of the type appearing in Fuchsian's P -equation. The purpose of the second part is to identify differential operators that provide some relationships between the factors, such that each of these operators gives a linearly isomorphic mapping from the solution space of Fuchsian's P -equation to a subspace of the solution space of the equation $L\psi(x) = 0$. In other words, the operators provide projections from the solution space of the equation $L\psi(x) = 0$ to its subspaces.

The first part of the algorithm can be performed only on homogeneous linear differential equations of Fuchsian type with three singular points $x = 0$, $x = 1$ and $x = \infty$. The second part, however, can be applied to any differential equation that has a factorization. Most of the argument used for the second part can also be applied to any associative algebra, such as matrix algebras, universal enveloping algebras, etc. We do not consider the matter of this straightforward generalization here.

In terms of \mathcal{D} -modules, we find a differential operator that yields a splitting morphism of a given short exact sequence of \mathcal{D} -modules (i.e., sub and quotient modules). We remark that in some cases, an abstract argument, such as one of indecomposability, can be made to prove the existence of such an operator. However, it is non-trivial to derive such an operator explicitly.

Below, we give an example to which the algorithm can be applied successfully and present an explicit expression expressing a fundamental system of its solutions. The ordinary differential equation of this example is that which is obtained using separation of variables from the harmonic equation on vector fields of some hyperbolic 3-manifold (see [3] for details).

The algorithm for determining the operators that provide the relationships between the factors that we give is only one example of this type of algorithm. Certainly, there may be other methods for determining such relationships between factors. We leave the determination of this point as a problem (see Problem 3.1 [4]).