

複雑な系における 確率論と実解析学の接点

(研究課題番号 14540113)

平成14年度～平成15年度
科学研究費補助金 (基盤研究(C)(2))

研究成果報告書

京都大学図書



1040945877

附属図書館

平成15年12月

研究代表者 熊谷 隆

(京都大学数理解析研究所助教授)

まえがき

本研究は「複雑な系における確率論と実解析学の接点」と題し、2002（平成14）年度から2003（平成15）年度までの2年間にわたる継続研究として科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）の交付（課題番号14540113）を受けて行ったものである。ここにその研究成果を報告する。

2年間にわたる本研究の分担者は次頁の研究組織の項の記載通りである。本研究の遂行においてお世話下さった関係者各位に、心からの謝意を表す。

高橋 陽一郎（京都大学数理解析研究所教授）

永川 一郎（京都大学大学院理学研究科教授）

木上 慎（京都大学大学院理学研究科教授）

日野 正剛（京都大学大学院情報学研究科助教授）

研究代表者 熊谷 隆

研究経費

平成14年度 2,000千円

平成15年度 1,200千円

合計 4,100千円

（いずれも直接経費）

研究組織

(1) 学会誌等

研究代表者

熊谷 隆 (京都大学数理解析研究所助教授)

研究分担者

渡辺 信三 (京都大学・名誉教授)

高橋 陽一郎 (京都大学数理解析研究所教授)

重川 一郎 (京都大学大学院理学研究科教授)

木上 淳 (京都大学大学院情報学研究科教授)

日野 正訓 (京都大学大学院情報学研究科助教授)

研究経費

平成14年度 2,900千円

平成15年度 1,200千円

合計 4,100千円

(いずれも直接経費)

研究発表

(1) 学会誌等

- [Ku1]. T.Kumagai, Some remarks for jump processes on fractals, In: P. Grabner and W. Woess (eds.), Trends in Math.: Fractals in Graz 2001, pp. 185-196, Birkhäuser, 2002.
- [Ku2]. B.M.Hambly and T.Kumagai, Asymptotics for the spectral and walk dimension as fractals approach Euclidean space, *Fractals*, **10** (2002), 403–412.
- [Ku3]. T. Kumagai, Function spaces and stochastic processes on fractals, 数理解析研究所講究録, **1293** (2002), 42–54.
- [Ku4]. R.F. Bass and T.Kumagai, Laws of the iterated logarithm for the range of random walks in two and three dimensions, *Ann. Probab.*, **30** (2002), 1369–1396.
- [Ku5]. B.M. Hambly, J. Kigami and T. Kumagai, Multifractal formalisms for the local spectral and walk dimensions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **132** (2002), 555–571.
- [Ku6]. Z.Q. Chen and T.Kumagai, Heat kernel estimates for stable-like processes on d -sets, *Stoch. Proc. Their Appl.*, **108** (2003), 27–62.
- [Ku7]. B.M.Hambly and T.Kumagai, Diffusion processes on fractal fields and their large deviations, *Probab. Theory Relat. Fields*, **127** (2003), 305–352.
- [Ku8]. B.M.Hambly and T.Kumagai, Heat kernel estimates for symmetric random walks on a class of fractal graphs and stability under rough isometries, *Proc. of Symposia in Pure Math.*, to appear.
- [Ku9]. T.Kumagai, Homogenization on Finitely Ramified Fractals, *Proc. of the RIMS Project '02 "Stochastic Analysis and Related Topics"*, *Advanced Studies in Pure Math.*, **41**, to appear.
- [Ku10]. B.M.Hambly and T.Kumagai, Heat Kernel Estimates and Law of the Iterated Logarithm for Symmetric Random Walks on Fractal Graphs, *Proc. of the JAMS symposium "Discrete Analysis and related topics"*, *Contemporary Mathematics*, to appear.
- [Ku11]. T.Kumagai, Function spaces and stochastic processes on fractals, *Proc. of Inter. Conf. on Fractal Geometry and Stochastics III*, Birkhäuser,

to appear.

[Wa1]. 赤堀次郎、渡辺信三, 確率微分方程式の強い解 - 「確率過程と数理ファイナンス」における一つの話題-, 社会システム研究, **4** (2002), 1-12, 立命館大学社会システム研究所

[Wa2]. J. Warren and S. Watanabe, On Spectra of noises associated with Harris flows, Proc. of the RIMS Project '02 "Stochastic Analysis and Related Topics", Advanced Studies in Pure Math., **41**, to appear.

[Ta1]. T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants. II. Fermion shifts and their ergodic and Gibbs properties, Ann. Probab., **31** (2003), 1533-1564.

[Ta2]. T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, Journal of Functional Analysis, **205** (2003), 414-463.

[Ta3]. T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with fermion, boson and other statistics, Advanced Studies in Pure Math., to appear.

[Shi1]. Y.S. Yun and I. Shigekawa, The existence of solutions for stochastic differential inclusion, Far East J. Math. Sci., **7** (2002), 205-212.

[Shi2]. I. Shigekawa, Littlewood-Paley inequality for a diffusion satisfying the logarithmic Sobolev inequality and for the Brownian motion on a Riemannian manifold with boundary, Osaka J. Math., **39** (2002), 897-930.

[Shi3]. I. Shigekawa, Vanishing theorem of the Hodge-Kodaira operator for differential forms on a convex domain of the Wiener space, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **6** (2003), 53-63.

[Shi4]. I. Shigekawa, Orlicz norm equivalence for the Ornstein-Uhlenbeck operator, Proc. of the RIMS Project '02 "Stochastic Analysis and Related Topics", Advanced Studies in Pure Math., **41**, to appear.

[Kig]. J. Kigami, Harmonic analysis for resistance forms, Journal of Functional Analysis, **204** (2003), 399-444.

[Kig2]. J. Kigami, Local Nash inequality and inhomogeneity of heat kernels, Proc. London Math. Soc., to appear.

[Hi1]. M. Hino, On short time asymptotic behavior of some symmetric diffusions on general state spaces, Potential Anal., **16** (2002), 249-264.

[Hi2]. M. Hino, On Dirichlet spaces over convex sets in infinite dimensions, Finite and infinite dimensional analysis in honor of Leonard Gross (New Orleans, LA, 2001), 143-156, Contemp. Math., 317, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Hi3]. M. Hino and J. A. Ramírez, Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, *Ann. Probab.*, **31** (2003), 1254–1295.

[Hi4]. M. Hino, Integral representation of linear functionals on vector lattices and its application to BV functions on Wiener space, *Proc. of the RIMS Project '02 "Stochastic Analysis and Related Topics"*, *Advanced Studies in Pure Math.*, **41**, to appear.

(2) 口頭発表 (主なもの)

熊谷 隆

1. Function spaces and stochastic processes on fractals,
Conference of Analysis and Probability on Fractals, Cornell University, June 16-20, 2002.

2. Heat kernel estimates for symmetric random walks on a class of fractal graphs,
Analysis on graphs and on metric spaces, Centre Emile Borel (Paris VI), July 26-28, 2002.

3. Sub-Gaussian estimates of heat kernels on a class of fractal-like graphs and the stability under rough isometries,
2002年9月5日, 国際研究集会 "Stochastic Analysis and Related fields" (於: 京都大学数理解析研究)

4. Function Spaces and Stochastic Processes on Fractals: Heat Kernel Estimates for Jump-type Processes,
Fractal Geometry and Stochastics III, Friedrichroda, March 17-22, 2003.

5. Stability of heat kernel estimates and homogenization on fractal graphs,
Research network on interacting stochastic systems, TU Berlin, April 7-11, 2003.

渡辺 信三

1. Diffusions and stochastic flows in one dimensions,
2002年9月6日, 国際研究集会 "Stochastic Analysis and Related fields" (於: 京都大学数理解析研究所)

2. On spectra of noises associated with Harris flows,
2003年2月6日, 国際研究集会 "確率過程の表現とfiltrationの同型問題" (於: 京都大学数理解析研究所)

3. A duality in one-dimensional diffusions, stochastic flows and noises,
2003年2月7日, 国際研究集会 "確率過程の表現とfiltrationの同型問題" (於: 京都

大学数理解析研究所)

4. 1次元拡散過程の一般化 arc-sine law,
2003年12月13日, 科研費シンポジウム「確率過程とその周辺」(於: 金沢大学)

高橋 陽一郎

1. On random point fields associated with Fermi, Bose and the other statistics,
2002年7月30日, Stochastic Analysis and Statistical Mechanics (於: 京都大学)
2. A generalization of determinant and permanent,
2002年7月31日- 8月2日, 短期共同研究「可積分系研究の新展開—連続, 離散, 超離散」(於: 京都大学数理解析研究所, 共同研究者 白井氏発表)
3. フェルミオン測度とシフト力学系,
2003年8月28日 - 30日, シンポジウム「数論とエルゴード理論」(於: 金沢大工学部, 共同研究者 白井氏発表)
4. Fermion measures and their related topics,
2003年10月7日 - 10日, シンポジウム「大規模相互作用系の確率解析」(於: 湘南国際村センター, 共同研究者 白井氏発表)

重川 一郎

1. 半群の交換関係と比較定理
2002年3月28日(木), 日本数学会年会統計数学分科会特別講演 (於: 明治大学)
2. Square root of Schrödinger operator and its L^p norm,
2002年9月6日(金), 国際研究集会 "Stochastic Analysis and Related fields"
(於: 京都大学数理解析研究所)
3. Meyer's inequality in the framework of Orlicz space,
2002年11月6日(水), 国際研究集会 "Stochastic Analysis in Infinite Dimensional Spaces" (於: 京都大学数理解析研究所)
4. エントロピーの一般化と分数冪対数 Sobolev 不等式 (with 劉慶平),
2003年9月29日(月), 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」(於: 京都大学理学研究科)

木上 淳

1. Harmonic analysis for resistance forms,
Conference of Analysis and Probability on Fractals, Cornell University, June 16-20, 2002.
2. Harmonic analysis for resistance forms,
Fractal Geometry and Applications, A Satellite Conference of ICM 2002, Nanjing University, Aug. 29 - Sept. 2, 2002.

3. Volume doubling measures and heat kernel estimates on self-similar sets, Fractal Geometry and Stochastics III, Friedrichroda, March 17-22, 2003.

日野 正訓

1. A weak version of the extension theorem for infinite dimensional Dirichlet spaces,
2002年9月6日, 国際研究集会 "Stochastic Analysis and Related fields" (於: 京都大学数理解析研究所)
2. Small time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups,
2002年9月26日, 日本数学会秋季総会 (於: 島根大学)
3. Measure representation of linear functionals on first order Sobolev spaces,
2002年11月6日, 国際研究集会 "Stochastic Analysis in Infinite Dimensional Spaces" (於: 京都大学数理解析研究所)
4. フラクタル図形上のエネルギー測度の特異性について,
2003年10月1日, 確率解析とその周辺 (於: 京都大学)
5. フラクタル上のエネルギー測度の特異性について,
2003年11月23日, ディリクレ形式とマルコフ過程 (於: 大阪大学基礎工学部シグマホール)

(3) 出版物

熊谷隆、確率論、共立出版 (ISBN: 4-320-01731-5)

研究成果による工業所有権の出願・取得状況

なし

研究成果

熊谷 隆

本研究では、次の3つの大きなテーマを掲げて研究を遂行した。

- 1) 複雑な系の上の確率過程と、対応するソボレフ・ベソフ空間の解析
- 2) フラクタル的多様体およびランダムフラクタルの上の確率過程の大域的性質の解析
- 3) 複雑な系の上の確率解析の基礎付け

実際には、主に1)のテーマに対して進展が得られた。以下に、得られた研究の概略を述べる。

a) 空間内に複雑な系が可算無限個存在し、各系については熱伝導に関する情報がある程度分かっている時に、それぞれの系にしみ込む拡散過程を構成しその性質を調べるといった問題を引き続き取り扱った。ベソフ空間のトレースの理論を援用することにより、2次形式の正則性を示した。熱核の短時間挙動についての詳しい評価を得て、これを用いて、短時間挙動における「最も起こりやすいパス」をエネルギー関数の変分問題の解として表現した。これらの結果は海外共同研究者であるB.M. Hambly氏との共著で[Ku7]にまとめた。今後の課題として、ベソフ空間のトレース理論の一般化を現在研究中である。

b) Besov空間の理論の応用として、フラクタルを典型例として持つ d -setと呼ばれるクラスの上に自然な3タイプの飛躍型対称確率過程を構成し、これらのDirichlet形式が同値であることを証明した([Ku1], [Ku3])。さらにこれらの飛躍型確率過程が、Triebel氏を初めとした関数空間の専門家が研究している作用素とどのような関係にあるかを調べた([Ku11])。また、このうち2タイプの確率過程について、これらの熱核の詳しい評価を得た。扱う2次形式の定義域はBesov空間となり、熱核のNash型の評価を得る際にBesov空間の埋め込み定理が有効に利用される。熱核のoff-diagonalの評価では確率論を用いた議論が用いられ、実解析学と確率論の手法をうまく融合させている。また、得られた熱核の評価を用いて、確率過程の再帰性や、粒子の軌跡のハウスドルフ次元などを計算した。これらの結果は、Z.Q. Chen氏との共著で[Ku6]にまとめた。

c) 有限分岐的なフラクタルにおいて、ホモジナイゼーション(均質化)の問題を取り扱った。フラクタルを近似する無限グラフ上の各ボンドに独立同分布・ランダムな抵抗を与えて決まる連続時間マルコフ連鎖について、ある条件のもと適当なスケールで、その長時間挙動が非自明な拡散過程に収束することを証明し、[Ku9]にまとめた。対応する繰り込み写像の力学系を解析することが鍵となる。

d) フラクタル的グラフにおける大域的性質の解析を行なった。[Ku8]では、海外共同研究者であるB.M. Hambly氏とともに、グラフ上の放物型Harnack不等式や劣ガウス型の熱核の評価が、rough isometryと呼ばれる変換で不変であることを証明した。また、ある種のフラクタル的グラフのクラスにおいては、実際にこれらの性質が成り立つことを証明した。[Ku10]では、一般の有限分岐的フラクタルグラフにおいては、重複対数の法則のオーダーに空間方向の依存性があることを示した。この種のグラフにおいては、Harnack不等式はresistance距離と呼ばれる距離でコントロールできるが、熱核のoff-diagonal評価にはグラフ距離(geodesic)の情報が必要となり、resistance距離で等距離であってもグラフ距離では全く異なるオーダーとなることが起こりうるためである。

e) 海外共同研究者であるO. Zeitouni氏とは、2002年7月に招聘した際に、T.J. Lyons氏のrough pathsの理論を応用して複雑な系における確率過程の大偏差原理を導くことを目指した議論を行なった。具体的な成果には至らなかったが、関連分野の現在の研究状況も含め最新の情報を得ることが出来た。海外共同研究者であるT.J. Lyons氏とは、2002年9月に氏が来日した際にrough pathsの理論の応用に関する最新の情報(主に、確率積分の数値計算およびその数理ファイナンスへの応用)を得

ることが出来た。複雑な系の上の確率解析を展開するには、今しばらくの研究の蓄積が必要であり今後の課題である。

渡辺 信三

確率論において、ノイズとは通常、離散時間では i.i.d. 確率変数列、連続時間の場合は Wiener 過程や Poisson point process の定める Gaussian white noise や Poissonian noise を意味し、確率過程をこうしたノイズで表現することは重要な研究方法となっている。B. Tsirelson は、ノイズの概念を、事象のなす σ -集合体の言葉を用いて一般的に定義するとき、Gaussian white noise や Poissonian noise 等の古典的ノイズ以外に、多様なノイズが存在することを示して注目された。私は、こうした非古典的ノイズについて、stochastic flow との関連で研究を行い、特に Harris flow から得られるノイズについて、その不変量である spectral set の形状や Hausdorff 次元に関する研究を英国の J. Warren と共同で行い、得られた成果を論文 [Wa2] にまとめた。そこで用いられた dual flow の概念を用いると、確率微分方程式に関し、従来知られていなかった強い解の存在するクラスが判り、それを文献 [Wa1] で注意した。

一般の 1 次元拡散過程の正の側の滞在時間に関する所謂 arc-sine law 型の定理について、最近、笠原勇二、矢野裕子 がその分布関数について得た結果を密度関数で精密化することを試み、現在進展中であるが、得られた成果を口頭発表した。

重川 一郎

大きく分けて、Littlewood-Paley 不等式に関する問題と、Orlicz 空間の無限次元解析への応用を取り扱った。Littlewood-Paley 不等式に関しては、対数 Sobolev 不等式が成立している拡散過程に対し Γ_2 が指数可積分という条件の下で示し、また境界のある Riemann 多様体の場合も扱った。また同様の不等式を Riemann 多様体上の $-\Delta + V$ という Schödinger 作用素に対して示し、 L^p の作用素の定義域を決定する問題に応用した。2 番目の問題に関しては、Ornstein-Uhlenbeck 作用素に対し、その平方と勾配作用素の Orlicz ノルムの同値性を示した。これは Meyer によって示されていた L^p ノルムの同値性を拡張したものである。さらに、Orlicz 空間の枠組みでエントロピーを捉え直し、分数冪対数 Sobolev 空間について一般的な枠組みを定式化した。

木上 淳

自己相似集合上の熱核の漸近挙動について研究し、測度が volume doubling property を持つことと熱核の対角成分のある種の漸近評価と同値であることを示した。一般の測度-距離空間上のディリクレ形式から定義される熱核に対して、測度の volume doubling property のもとで exit time の評価と local Nash inequality が熱核のある種の上からの評価と同値であることを示した。一般の resistance form に対して、境界が有限個の点である場合の green 関数の定義をあたえ、その green 関数が resistance metric に関して Lipschitz 連続であることを示した。さらに、その green 関数を用いて測度に値を持つ Laplacian の定義を与えた。

日野 正訓

a) 無限次元空間上の関数空間についての一般論を研究した。まず、領域上で定義された Sobolev 関数が全体空間に拡張できるかという問題に対して部分的な結果を得た。また、Riesz の表現定理を無限次元空間の場合に拡張し、その応用として抽象 Wiener 空間上の BV 関数からなる関数空間に対して、Sobolev 空間への埋め込みや、関数の測度値微分の滑らかさについての新たな性質を示した。

b) 一般の有限測度空間上で定義された保存的拡散半群に対して Varadhan 型の短時間漸近挙動を証明し、極限が内在距離を用いて表されることを示した。また、ループ群に関して内在距離の具体的表示を得た。

論文掲載

以下では、分担者が期間中に執筆した論文の中から分担者ごとに一部を選び、その全内容を掲載する。内容を掲載する論文は次の通りである。

Z.Q. Chen and T.Kumagai, Heat kernel estimates for stable-like processes on d -sets, *Stoch. Proc. Their Appl.*, **108** (2003), 27-62.

J. Warren and S. Watanabe, On Spectra of noises associated with Harris flows, *Proc. of the RIMS Project '02 "Stochastic Analysis and Related Topics"*, *Advanced Studies in Pure Math.*, **41**, to appear.

T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with fermion, boson and other statistics, *Advanced Studies in Pure Math.*, to appear.

I. Shigekawa, Orlicz norm equivalence for the Ornstein-Uhlenbeck operator, *Proc. of the RIMS Project '02 "Stochastic Analysis and Related Topics"*, *Advanced Studies in Pure Math.*, **41**, to appear.

J. Kigami, Harmonic analysis for resistance forms, *Journal of Functional Analysis*, **204** (2003), 399-444.

M. Hino, On Dirichlet spaces over convex sets in infinite dimensions, *Finite and infinite dimensional analysis in honor of Leonard Gross (New Orleans, LA, 2001)*, 143-156, *Contemporary Mathematics 317*, American Mathematical Society, 2003.