磁場及び電流のもとでの超電導体のふるまい

真　木　和　美　（京大理）

（９月１０日受理）

1° B.C.S.–Bogoliubov の理論によつて，超電導体の熱力学的，電気力学的性質は次々と明らかにされたが，強い磁場のもとでの一般的ふるまいについては，まだわかつていないことも多い。よく知られているように，転移点の近くで order parameter が小さく，超電導体がLondon 型（すなわち電流とベクトル・ポテンシャルの間にローカルな関係が成立する）になる領域では，Ginzburg–Landau[1] の式を用いて定性的に一般の性質を記述することができる。しかしもつと低温のほうでは今のところ一般的とりあつかいは知られていない。強い磁場の場合は当然非線型の効果が一番問題になるわけだがこの効果を大きく二つにわけることができる。a ）order parameter △ を通してのみあらわれるもの， b ）それ以外の効果が考えられる。[2]

a ）について重要性は早く Pippard[3] によつて指摘されていた。最近微視的理論にもとづいて，一様磁場の場合鏡面反射での極限での計算は球及び円筒型についてRagers[2] が行なつた。また任意の波数ベクトルをもつベクトル・ポテンシャルの二次までの影響はNambu et Juan[4] によつて計算されている。

Bardeen[5] は△の中に磁場の二次の効果までいれて計算したものを用いて半現象論的に小さな超電導体の強い磁場及び電流のもとでのふるまいをとりあつかつた。

我々はこゝで次の二つの条件をみたすような小さな超電導体についての微視的理論による厳密なとりあつかいを試みる。次の条件は必らずしも独立で

はないかもしれないけれども．

1） 系が非常に小さいこと．ひろがりをdとしたとき$d<\xi_0$，ξ_0はコヘレントな長さ（これは系の中で△を一定とする近似に対応している。したがって興味あるAbrikosov のmixed 状態の可能性は除外される）

2） $\tau\Delta<1$． すなわち電子の平均自由行路が非常に小さいこと．小さな物体がpolycrystal の構造をもつものとすると非常に自然な条件になるがこのため以下の理論は本質的にはLondon 型にしかあてはまらない。

2° 次のような散乱中心がrandomにある場合のGor'kov の式[6] から出発しよう。

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2+\mu+V(x)\right)G(x,x')$$

$$-ig\,F(x,x)\,F^+(x,x')=\delta(x,x')\,,$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\vec{p}+e\vec{A})^2-\mu+V(x)\right)F^+(x,x)$$

$$+ig\,F^+(x,x)\,G(x,x')=0, \qquad (1)$$

こゝでμは化学ポテンシャル，Vは散乱中心と電子との相互作用で$V=\sum_a u(x-x_a)$ のようにかけるとする。まず散乱中心のないときにはG及びFのFourier 変換したものは形式的に次のようにかける。

$$G(p)=(\omega+\xi+\frac{\rho}{m}\vec{A}\cdot\vec{p})/\Sigma(p)\,,$$

$$F^+(p)=i\Delta/\Sigma(p),$$

$$\Sigma(p)=(\omega+\frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{p})^2-\xi^2-\Delta^2-[\xi,\frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A}], \qquad (2)$$

ここに$\xi = p^2/2m + \frac{e^2}{2m} \Sigma |\vec{A}(q)|^2 - \mu$。 上の式をみちびくのに$\triangle$は対角性分しかないことを用いた。上の式をgap 方程式

$\triangle = \frac{g}{(2\pi)^4} \int dp^4 \; F^{+}(p)$ に代入して$\frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{p}$ について展開して次の項までとるとNambu et Juan の結果は容易にえられる。

Randam な散乱中心があるときは標準的なとりあつかいによつて，GとFは，

$$G(p) = \frac{\tilde{\omega} + \frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A} + \xi}{(\tilde{\omega} + \frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A})^2 - \xi^2 - \tilde{\triangle}^2} .$$

$$F(p) = \frac{i\tilde{\triangle}}{(\tilde{\omega} + \frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A})^2 - \xi^2 - \tilde{\triangle}^2} , \qquad (3)$$

のようにかける。 $\tau^{-1} = \frac{nmp_o}{(2\pi)^2} \int |u| \, d\Omega$ で定義されるτを用いて，$\tau\triangle < 1$のときには $\tilde{\omega}$，$\tilde{\triangle}$は $\tilde{\omega}/\tilde{\triangle} = u$ できめられるパラメーターuを使つてあらわされ，uは

$$\frac{\omega}{\triangle} = u\left(1 - \xi \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right) + O(\tau\triangle) \qquad (4)$$

からきめられる。このとき ζは$\zeta = \frac{\tau}{\triangle}\left(\frac{e p_o}{m}\right)^2 \int |\vec{A}(q_1)|^2 d\vec{q}$.

で与えられる。これは筆者が一様磁場のときに得た結果の一般化になつてい

る。[7] したがって$\tau\triangle \ll 1$及び$\triangle$: const をみたす系では $T = 0^{\circ}\mathrm{K}$ では。

$$\ln \triangle/\triangle_{oo} = -\frac{\pi}{4}\zeta\ ,\ \text{for}\ \zeta<1$$

$$= -\operatorname{arccosh}\zeta - \frac{1}{2}\left(\zeta \arcsin \zeta^{-1} - \sqrt{1-\zeta^{-2}}\right)\ \text{for}\ \zeta>1 \tag{5}$$

がえられる。$\triangle_{oo}$ は$\vec{A}=0$としたときのgapをあらわしている。このとき励起スペクトラムのgapは$\triangle$でなく$\omega_o = \triangle(1-\zeta^{2/3})^{3/2}$で与えられる。
Tが小さい時の系や比熱は

$$C_s = mp_o\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,T^{-1/2}\triangle^{1/2}\ \triangle^{7/6}\zeta^{-2/3}(1-\zeta^{2/3})^{11/4}\exp(-\omega_o/T),$$
$$\text{for.}\quad \zeta<1\ ,$$

$$= mp_o\ \tau\triangle\zeta\ \sqrt{1-\zeta^{-2}}\ T \quad \text{for}\quad \zeta>1 \tag{6}$$

のようになるが，$\zeta>1$では指数的な項はあらわれない。同様に電流についてはFourier 成分について，

$$\vec{j}(q) = \frac{\pi e^2 N}{2m}\tau\triangle\left(1-\frac{4}{3\pi}\zeta\right)\vec{A}(q),\ \text{for}\ \zeta<1.$$

$$= \frac{e^2 N}{m}\tau\triangle\left(\arcsin\zeta^{-1} - \frac{2}{3}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right) + \frac{1}{3}\zeta^{-1}\sqrt{1-\zeta^{-2}}\right)\vec{A}(q),$$
$$\text{for}\quad \zeta>1. \tag{7}$$

がえられる。(7)式はLondon の式の一般化になっている。またT_c の式では

$$\ln T/T_{co} = -\frac{3}{2}\zeta(2)\left(\frac{\Delta}{\pi T}\right)\zeta - \frac{7}{8}\zeta(3)\left(\frac{\Delta}{\pi T}\right)^2 ,$$

$$\vec{j}(q) = \frac{e^2}{m} N(\tau\Delta)\left(\frac{2\Delta}{\pi T}\right)\left(\frac{3}{4}\zeta(2)\right)\vec{A}(q) \quad . \tag{8}$$

がえられる。

Free energy の考察からこのような系では磁場のもとでの相転移は常に二次になることがわかる。これは電子系のFree energy の差は$\Delta > 0$であるかぎり常に負であることと，電磁場のFree energy の差は磁場のrepulsion によつて正であるけれども $\tau\Delta$のorder の小さい寄与しか与えないことから明らかである。

上の結論はBardeen のものと相反するがこれは転移点の近くでは磁場についての高次の項が重要になつてくるためだと思われる。

3° Current のある状態を記述するのには次の変換に注目しよう。ベクトル・ポテンシヤルAは一意的に次のように分解できる。

$$\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{\omega} + \mathrm{grad}\,\phi \tag{9}$$

さらにdiv $\vec{A}=0$のgauge を用いるとすれば，ϕは$\Delta\phi=0$の条件をみたさなければならない。一般にgauge 変換は，

$$\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad}\,\chi$$
$$\psi \to e^{i\chi}\psi \tag{10}$$

の一組の変換によつてあらわされるが，上の変換の一方だけを行なうと，系のsuperflow の状態の間の変換に対応する。すなわちこの場合には速度ポテンシヤルをそれぞれχ/m あるいは$-\chi/m$ だけずらしたものと考えることができる。

これらの考察から，電磁場と電流とが共存する場合には，rot $\vec{\omega}$ と grad

ϕとの直交性を用いると，ζは，

$$\zeta = \zeta_m + \zeta_c \tag{11}$$

のようにかけて，電流と磁場とはζの中では独立に加法的に含まれることがわかる。

同様の事情はparamagnetic な不純物を含む系での永久電流を考えるときにも成立している。

上の式を用いると磁場のある場合の臨界電流を求めることができる。このためにはφとして一様な流れに対応した $\varphi = m\vec{v}_s\cdot\vec{r}$ のかたちをとる。臨界電流は $\left(\frac{\partial j_s}{\partial v_s}\right)_\omega = 0$ の条件からきめられるが，j_s は

$$j_s = eN(\tau\triangle)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\zeta\right) v_s \quad \text{for } \zeta < 1, \quad T = o$$

$$\text{etc.} \tag{12}$$

のように定義される。

$T = 0$のときの表式は一般に複雑になるが，

$$\zeta_\omega = \frac{\tau}{\triangle}\left|\frac{e}{m}\right|^2 \int \left|\vec{q}\times\vec{\omega}(q)\right|^2 d\vec{q}$$ として，

ζ_ω が ζ_ω^1 (~ 0.565) の値をこえると，臨界電流は$\zeta > 1$の領域に入る。上の計算から我々は永久電流が存在するためには励起スペクトラムにgapがあることではなく，0でない$\triangle$が存在することが本質的だと結論できる。たゞこのとき注意すべきことは，この状態では電流がごくゆっくり時間的に変化するときには小さなエネルギーの消散をともなうということである。

4^0 上に得た表式は $\tau\triangle < 1$，$\triangle = \text{const.}$ の条件さえ満す系であれば非常に一般的に成立することが示せる。今ハミルトニアンの中で時間反転に対して符号をかえる部分をH_1 とすれば，このとき（5）式は次のようなζを

用いればよい。

$$\zeta = \frac{\tau}{\Delta V} \sum_n \delta(\xi_n) \langle n | H_1^2 | n \rangle \tag{13}$$

例として角速度$\vec{\omega}$で回転する系を考える。このときには

$H_1 = \int \varphi^{+} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \varphi \, d^3x$ のように書くことができる。$\vec{L}$は角運動量の演算子である。これを用いるとζは，

$$\zeta = \frac{\tau}{\Delta} (\omega^2 p_o^2 I)$$

で与えられる。p_o はフェルミー・モーメンタム，Iは系の回転軸のまわりの慣性能率をあらわす。

6^o 以上にみたように $\Delta =$ const と $\tau\Delta < 1$ の条件のもとではすべての表式は非常に簡単化され，一般の磁場及び電流の影響を考察するのに十分な式が得られた。これらの式をさらに拡張する方向として次の二つが当然考えられる。

1） Δを一般に場所によつて変化してもよいとする。

2） $\tau\Delta$が一般の場合，特にPippard 型超電導体の場合。

1）の問題はもしΔが非常にゆつくり変化するような場合は非常に簡単でこのときには ∇^2 の級数に展開できて，いわばGinzburg-Landau 方程式の一般化のようなものがえられる。しかしこれらの妥当性の判定には少し困難な問題もある。

2）の問題について筆者はまだ明確な結論は得ていない。一つの可能性としては(2) の式を出発点として，$\xi_o q > 1$ の関係式を十分に使って適当なパラメーター（おそらく

$\int \frac{|A(q)|^2}{\xi_o q} dq$）の項だけ厳密に含むようなconsistent な式をたてる

ことであろう。

このようにして得られた式だけでは物理的に意味ある系がないかも知れないがさらにΔの変化をみとめると，微視的理論からの境界エネルギーや，intermediate state での輸送現象の解明が期待されうる。

終りに筆者に超電導のいろいろな問題について教示された松原先生，横田先生，それに恒藤さんに感謝いたします。特に3^0 の変換についての話は，恒藤さんとの議論の中で明らかになつたものです。

文 献

1) V.L. Ginzburg and L. D. Landau, JETP(V.S.S.R) 20 (1950), 1064.
L.P. Gor'kov, JETP(U.S.S.R) 36 (1959) 1918.
2) K.T. Rogers, Ph D Thesis, Uniuersity of Illinois, 1960 (unpublished)
3) A.B. Pippard, Phil. Mag. 43 (1952),273.
4) Y. Nambu and S. F. Juan, Phys. Rev. 128 (1962), 2622.
5) J. Bardeen, Rev. Mod. Phys. 34 (1962) 667.
6) L.P. gor'kov, JETP(U.S.S.R) 37 (1959) 833.
7) K. Maki, Prog. Theor. Phys. 29 (1963) 603.