

恒藤敏彦

つて高分子に対する実験事実とあわないことなど問題はあるが、前者については実験点が少ないため、(7)の形の重合度依存性が期待できないと断言できる段階ではない。従つて、この線に沿つて多パラメーター理論を推し進めて行く可能性はあるように思う。

文 献

- 1) R. Chûjô, K. Aoki, S. Satoh and E. Nagai: J. Polym. Sci. B1 (1963) 501
- 2) R. Chûjô, K. Aoki, S. Satoh and E. Nagai: 日本物理学会分科会講演 (1963, 九大)
- 3) D. W. McCall and E. W. Anderson: Polymer 4 (1963) 93 など
- 4) T. N. Khazanovich: Vysokomol. Soed. 5 (1963) 112

超流動にはHard Coreが本質的であるということ

恒藤敏彦 (阪大基礎工)

(11月14日受理)

Condensed Bose Gas が Capillary の中を流ると流れるためにはHard Coreが必要である、という議論をしよう。あわせて、前号の“Josephson Effect と Superfluidity”¹⁾のなかであやまつた考えを述べたので、それを訂正したい。

§ 1. Condensed Bose Gas の場合

基本的な仮定として、超流動は Condensate のマクロのスケールの運動だと考える。Ideal Bose Gas で N_0 個の粒子が Ψ という状態に Condense しているとしよう。空間的に inhomogeneous の場合、それは Schrödinger 方程式

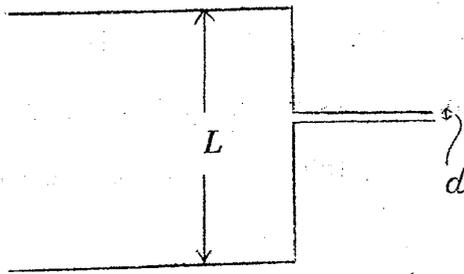
$$-\frac{\nabla^2}{2} \Psi + V\Psi = E\Psi \quad (1)$$

できめられる。いま第 1 図のように大きな容器があつて、その端に Capillary があるとす。2次元にしてそれを Slit と考えよう。いま左側から流れがあると、 $\Psi \propto e^{ikx}$ となる。 k は $1/L$ の程度でよい。それでもマクロの数 N_0 がこの状態にあるから、マクロの流れになる。 $(N_0 \hbar/ML)$ 。この波は Slit の中に入つて行くだろうか？ 壁で $\Psi=0$ を要求すると、Slit の中の波は

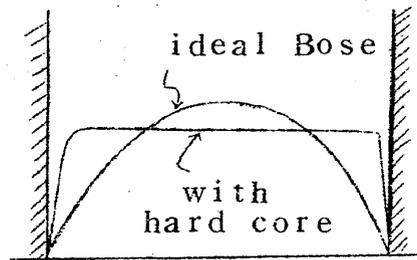
$$\Psi(x, z) = C e^{-\kappa x} \cos \frac{\pi}{d} z, \quad \kappa = \sqrt{(\pi/d)^2 - 2E} \quad (2)$$

の形になる。 $E \simeq (\pi/L)^2 \ll (\pi/d)^2$ だから、Slit の中では exponential に damp する。だから流れは大部分反射されて、Slit には入らない。

それは壁の所の Boundary Condition $\Psi=0$ が非現実的だからだ、と反論されるかもしれない。箱の中の粒子の最低状態はむしろ $\Psi=0$ を課すると $\cos \pi x/L$ となり、大きな密度の変化がある。(第 2 図) 壁の所の Van der Waals 力を考えに入れてみよう。それを壁の所での Square well で近似してといてみればわかるように、箱の中で Oscillate しない波ができるのは、Well の深さと巾が一定の条件をみたすときだけで、一般には最低状態も波うつてしまう。だから van der Waals 力も救いにはならない。



第 1 図



第 2 図

§ 2. Hard Core のある場合

この場合、満足な理論はないが、定性的な議論は low density limit の理論で与えられるであろう。ここでは、Bogoliubov の理論にもとづいた Pitaevskii の理論²⁾を使う。彼はそれによつて vortex line の議論を行なつた。それによると、Condensate は

$$-\frac{\nabla^2}{2}\Psi - E\Psi + g|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (3)$$

という方程式で記述される。 mg/\hbar^2 は Scattering length で low density limit が使えるためには、 $mg/\hbar^2 \ll N_0^{1/3}$ でなければならないが、しかしそれは Interatomic distance の程度と考えてよい。(3) の non-linear term は事情を一変する。そして(3)で記述されるΨは、flow velocity, すなわち k が小さいときむしろ *Incompressible fluid* のようにふるまうことを主張しよう。その前に箱の中の解をしらべてみよう。壁の所で $\Psi=0$ を要求しても、(3)の解は箱の中で一定で壁のごく近くだけで変化する。(第2図) 近似的に

$$\Psi(X) = \Psi_0 \left\{ 1 - \left[e^{\kappa(x-L/2)} + e^{-\kappa(x+L/2)} \right] \right\} \quad (4)$$

で与えられ、 $\kappa^{-1} = (2N_0g)^{-1}$ となる。したがつて non-linear term は density を一定に保つ効果がある。^{*}(以下の議論では壁の所の境界条

件は $\Psi=0$ よりも, $\nabla_n \Psi=0$ をとつた方がよいであろう。

流れがある場合は次のように取扱える。

$$\Psi = R(\vec{x}) \exp \{i S(\vec{x})\}, \quad R, S : \text{real} \quad (5)$$

とおき, R と S のみたす式を求めれば

$$\nabla^2 R - (\nabla S)^2 R - ER + gR^3 = 0, \quad (6)$$

$$2\nabla R \cdot \nabla S + R\nabla^2 S = 0, \quad (7)$$

となる。流れの速さが小さいときは, R も S もゆつくり変化するから, $(\nabla S)^2$, $\nabla R \cdot \nabla S$, $\nabla^2 R$ はすべて小さいとみなせる。(6) から

$$E = gR_0^2, \quad R_0^2 = N_0 \quad (8)$$

がえられ, (7) から $R_0 \nabla^2 S = 0$, すなわち incompressible fluid の式

$$\nabla^2 S = 0 \quad (9)$$

がえられる。この近似が成立つ条件は, 変化を特徴づける長さが, $(N_0 mg/\hbar^2)^{-1/2}$ に比べて小さいということである。次の近似は

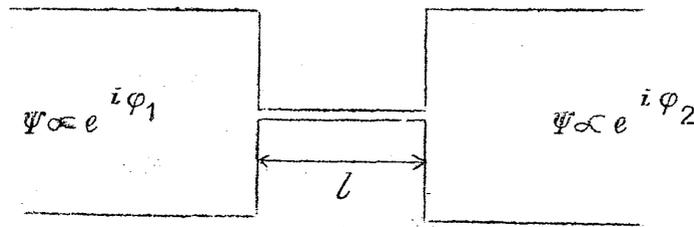
$$\nabla^2 R_1 - (\nabla S_0)^2 R_0 + 2gR_0^2 R_1 = 0, \quad (10)$$

$$2\nabla R_1 \cdot \nabla S_0 + R_0 \nabla^2 S_1 = 0,$$

となる。

第3図のように Capillary で2つの容器がつながっている場合を考えよう。左の箱の中では(穴から遠い所), $\Psi = R_0 e^{i\vec{K}\vec{x} + \varphi_1}$, 右では

*) この点は Gross によつて指摘されている。³⁾ E.P. Gross, Jour of Math. Phys. 4(1963), 195. (注意して下さい。碓井先生に感謝します。)



第 3 図

$R_0 e^{iKx+\varphi_2}$ となり，容器が大きければ K は 0 とおいてよい。Capillary の中では，

$$\psi = R e^{i\vec{k}x}, \quad R^2 = (gN_0 - k^2)/g, \quad (11)$$

となる。Orifice からの流れの結果によると，Velocity potential の穴から遠方までの変化は，Total flow を Q として， $Q/4\pi a$ で与えられる。したがって，Capillary の長さを l とすると，

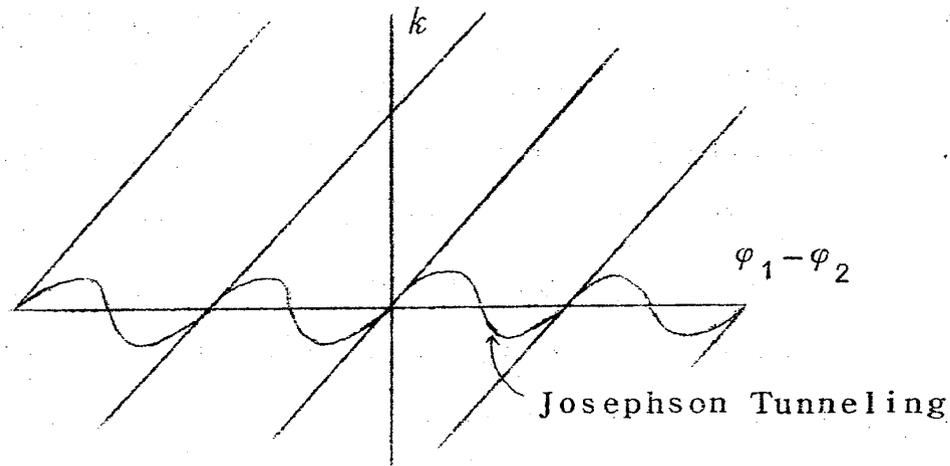
$$kl + ka/2 = \varphi_2 - \varphi_1 + 2n\pi \quad (12)$$

となる。だから，一般に流れがあると，右と左の Condensate の phase はそれに応じて異なる。

こうして，Non-linear term のおかげ，つまり Hard core のおかげで，流れはするすると Capillary を通ることができる。Ideal Bose gas の Condensed phase は超流動の多くの面を示すが，Capillary flow という特徴的な現象には Hard Core が必要なのである。

§ 3. Josephson 効果には，Tunneling が本質的

前号の小論で，Josephson 効果には，weak coupling であることが本質的で，junction が barrier である必要はない，と書いた。これは



第 4 図

あやまりである。それは上の Capillary flow をみれば明らかで、右と左の Ψ の phase difference と流れの k は (12) で関連しており、第 4 図のようになる。Josephson 効果のときは、0 Voltage で流れる current に maximum があり、 k は $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ に比例する。この違いは、Tunneling の場合、barrier の中で Ψ が real の解しかなく、node をもてないことによる。Capillary の場合、当然のことだが、Chemical potential の差があれば、 k は $\Delta\mu \cdot t$ で増大して行く。したがって He II で超伝導の Josephson tunneling のような効果をうるには、junction は Capillary のようなものではだめである。もし junction の中で、He の原子間の interaction が無視できるようになつておればよい。それにはやはり atomic distance の order、少なくとも 10^{-7} (以下) くらいの半径の穴があいている membrane が必要である。そのようなものはないだろうか？ なお、このことから超伝導の場合も、絶縁体の中に Superconducting bridge はたしかにない、ということも結論される。

§ 4. いろいろな問題

問題はいくつもあるが、第 1 に Pressure head のあるときの Capillary

恒藤敏彦

flow で、何が Pressure head をささえているのかが明らかでない。充分細かい（半径 10^{-6}cm ）Capillary の中でも vortex line が出来て動くのか、それとも入口と出口の所で Vortex が作られるのか、それとも Vortex とは関係のないメカニズムで pressure head が保たれるのか？ これはきわめて難かしい問題であろう。Pitaevskii の方程式は、Superfluidity の定性的な議論には有用であろう。Irrotational flow で vortex line が発生するかどうかの条件は (3) 式からえられるのではないかと思われる。つまり解の安定性の条件として問題にできるかもしれない。

終りに、いろいろ討論して下さいました松原先生、碓井先生および真木さんに感謝します。

文 献

- 1) 恒藤, 物性研究 1 (1963) 132.
- 2) L.P. Pitaevskii, J.E.T.P. 40 (1961), 646.
- 3) E. Gross, J. Math. Phys. 4 (1963), 195.