Title	超流動にはHard Coreが本質的であるということ
Author(s)	恒藤, 敏彦
Citation	物性研究 (1963), 1(3): 194-200
Issue Date	1963-12-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/85538
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

つて高分子に対する実験事実とあわないことなど問題はあるが，前者については実験点が少ないため，(7)の形の重合度依存性が期待できないと断言できる段階ではない。従つて，この線に沿つて多パラメーター理論を推し進めて行く可能性はあるように思う。

文　　　献

1) R. Chûjô, K. Aoki, S. Satoh and E. Nagai: J. Polym. Sci. B1 (1963) 501

2) R. Chûjô, K. Aoki, S. Satoh and E Nagai: 日本物理学会分科会講演（1963，丸大）

3) D.W. McCall and E.W. Anderson: Polymer 4 (1963) 93 など

4) T.N. Khazanovich: Vysokomol. Soed. 5 (1963) 112

超流動にはHard Coreが本質的であるということ

恒　藤　敏　彦　（阪大基礎工）

（11月14日受理）

Condensed Bose Gas が Capillary の中をするすると流れるためには Hard Core が必要である，という議論をしよう。あわせて，前号の "Josephson Effect と Superfluidity" [1] のなかであやまつた考えを述べたので，それを訂正したい。

§ 1. Condensed Bose Gas の場合

基本的な仮定として，超流動はCondensate のマクロのスケールの運動だと考える。Ideal Bose Gas で N_0 個の粒子がΨという状態にCondense しているとしよう。空間的に inhomogeneous の場合，それはSchrödinger 方程式

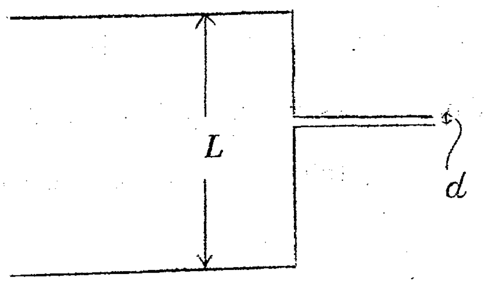
$$-\frac{\nabla^2}{2}\Psi+V\Psi=E\Psi \tag{1}$$

できめられる。いま第1図のように大きな容器があつて，その端にCapillary があるとする。2次元にしてそれをSlit と考えよう。いま左側から流れがあると，$\Psi\propto e^{ikx}$ となる。k は$1/L$の程度でよい。それでもマクロの数 N_0 がこの状態にあるから，マクロの流れになる。($N_0\hbar/ML$)。この波はSlit の中に入つて行くだろうか？　壁で$\Psi=0$を要求すると，Slit の中の波は

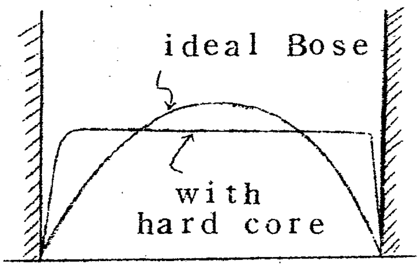
$$\Psi(x,z)=C\ e^{-\kappa x}\cos\frac{\pi}{d}z,\quad \kappa=\sqrt{(\pi/d)^2-2E} \tag{2}$$

の形になる。$E\simeq(\pi/L)^2\ll(\pi/d)^2$ だから，Slit の中では exponential に damp する。だから流れは大部分反射されて，Slit には入らない。

それは壁の所のBoundary Condition $\Psi=0$ が非現実的だからだ，と反論されるかもしれない。箱の中の粒子の最低状態はむろん$\Psi=0$を課すると$\cos\pi x/L$となり，大きな密度の変化がある。(第2図)壁の所のVan der Waals 力を考えに入れてみよう。それを壁の所での Square well で近似してといてみればわかるように，箱の中でOscillate しない波ができるのは，Well の深さと巾が一定の条件をみたすときだけで，一般には最低状態も波うつてしまう。だから van der Waals 力も救いにはならない。



第 1 図



第 2 図

§2. Hard Core のある場合

この場合，満足な理論はないが，定性的な議論は low density limit の理論で与えられるであろう。ここでは，Bogoliubov の理論にもとづいたPitaevskii の理論 [2)] を使う。彼はそれによつて vortex line の議論を行なつた。それによると，Condensate は

$$-\frac{\nabla^2}{2}\Psi - E\Psi + g\,|\Psi|^2\Psi = 0 \tag{3}$$

という方程式で記述される。$mg/\hbar^2$ は Scattering length で low density limit が使えるためには，$mg/\hbar^2 \ll N_0{}^{1/3}$でなければならないが，しかしそれは Interatomic distance の程度と考えてよい。(3) の non-linear term は事情を一変する。そして (3) で記述されるΨは，flow velocity，すなわちkが小さいときむしろ *Incompressible fluid* のようにふるまうことを主張しよう。その前に箱の中の解をしらべてみよう。壁の所で$\Psi=0$を要求しても，(3) の解は箱の中で一定で壁のごく近くだけで変化する。（第2図） 近似的に

$$\Psi(X) = \Psi_0\{1 - [e^{\kappa(x-L/2)} + e^{-\kappa(x+L/2)}]\} \tag{4}$$

で与えられ，$\kappa^{-1} = (2N_0 g)^{-1}$ となる。したがつて non-linear term は density を一定に保つ効果がある。*) (以下の議論では壁の所の境界条

件は$\Psi=0$よりも，$\nabla_n \Psi=0$をとつた方がよいであろう。

流れがある場合は次のように取扱える。

$$\Psi=R(\vec{x})\ \exp\ \{i\,S(\vec{x})\},\quad R,S\ :\ \text{real} \tag{5}$$

とおき，RとSのみたす式を求めれば

$$\nabla^2 R-(\nabla S)^2 R-ER+gR^3=0, \tag{6}$$

$$2\nabla R\cdot\nabla S+R\nabla^2 S=0, \tag{7}$$

となる。流れの速さが小さいときは，RもSもゆつくり変化するから，$(\nabla S)^2$, $\nabla R\cdot\nabla S$, $\nabla^2 R$はすべて小さいとみなせる。(6) から

$$E=gR_0^{\,2}\ ,\quad R_0^{\,2}=N_0 \tag{8}$$

がえられ，(7) から $R_0\nabla^2 S=0$，すなわちincompressible fluidの式

$$\nabla^2 S=0 \tag{9}$$

がえられる。この近似が成立つ条件は，変化を特徴づける長さが，$(N_0\ mg/\hbar^2)^{-1/2}$に比べて小さいということである。次の近似は

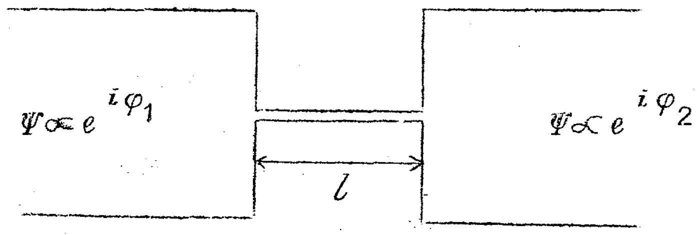
$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 R_1-(\nabla S_0)^2 R_0+2gR_0^{\,2}R_1=0,\\ &\quad 2\nabla R_1\cdot\nabla S_0+R_0\nabla^2 S_1=0,\end{aligned}\right. \tag{10}$$

となる。

第3図のようにCapillaryで2つの容器がつながつている場合を考えよう。左の箱の中では(穴から遠い所)，$\Psi=R_0\,e^{i\vec{K}\vec{x}+\varphi_1}$，右では

---

*) この点はGrossによつて指摘されている。[3)] E.P. Gross, Jour of Math. Phys. 4(1963), 195.(注意して下さつた碓井先生に感謝します。



第　3　図

$R_0\ e^{i\mathrm{K}x+\varphi_2}$ となり，容器が大きければKは0とおいてよい。Capillary の中では，

$$\Psi = R\ e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad , \quad R^2 = (gN_0 - k^2)/g, \tag{11}$$

となる。Orifice からの流れの結果によると，Velocity potential の穴から遠方までの変化は，Total flow をQとして，$Q/4\pi_a$ で与えられる。したがつて，Capillary の長さを l とすると，

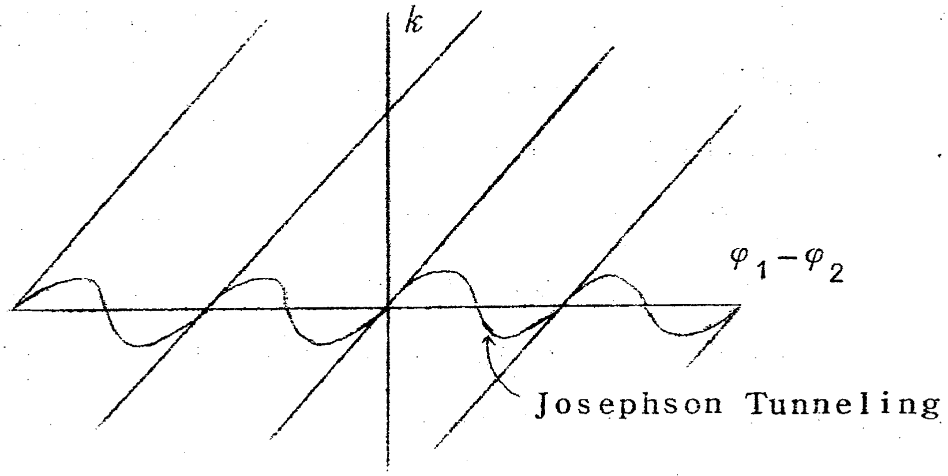
$$kl + ka/2 = \varphi_2 - \varphi_1 + 2n\pi \tag{12}$$

となる。だから，一般に流れがあると，右と左の Condensate の phase はそれに応じて異る。

こうして，Non-linear term のおかげ，つまり Hard core のおかげで，流れはするすると Capillary を通ることができる。Ideal Bose gas の Condensed phase は超流動の多くの面を示すが，Capillary flow という特徴的な現象には Hard Core が必要なのである。

§3.　Josephson 効果には，Tunneling が本質的

前号の小論で，Josephson 効果には，weak coupling であることが本質的で，junction が barrier である必要はない，と書いた。これは



第　4　図

あやまりである。それは上のCapillary flow をみれば明らかで，右と左のΨの phase difference と流れのkは(12) で関連しており，第4図のようになる。Josephson 効果のときは，0 Voltage で流れる current に maximum があり，kは sin ($\varphi_2-\varphi_1$) に比例する。この違いは，Tunneling の場合，barrier の中でΨが real の解しかなく，node をもてないことによる。Capillary の場合，当然のことだが，Chemical potential の差があれば，kは$\Delta\mu\cdot t$ で増大して行く。したがつてHe II で超伝導のJosephson tunneling のような効果をうるには，junction はCapillary のようなものではだめである。もし junction の中で，He の原子間の interaction が無視できるようになつておればよい。それにはやはりatomic distance の order, 少なくとも10^{-7}(以下)くらいの半径の穴があいているmembrane が必要である。そのようなものはないだろうか？　なお，このことから超伝導の場合も，絶縁体の中にSuperconducting bridge はたしかにない，ということも結論される。

§4. いろいろな問題

問題はいくつもあるが，第1にPressure head のあるときのCapillary flow で，何がPressure head をささえているのかが明らかでない。充分細い（半径 10^{-6} cm) Capillary の中でも vortex line が出来て動くのか，それとも入口と出口の所で Vortex が作られるのか，それとも Vortex とは関係のないメカニズムで pressure head が保たれるのか？　これはきわめて難かしい問題であろう。Pitaevskii の方程式は，Superfluidity の定性的な議論には有用であろう。Irrotational flow で vortex line が発生するかどうかの条件は (3)式からえられるのではないかと思われる。つまり解の安定性の条件として問題にできるかもしれない。

終りに，いろいろ討論して下さつた松原先生，碓井先生および真木さんに感謝します。

文　献

1) 恒藤，物性研究 <u>1</u> (1963) 132.

2) L.P. Pitaevskii, J.E.T.P. <u>40</u> (1961), 646.

3) E. Gross, J. Math. Phys. <u>4</u> (1963), 195.