Indirect Exchange Interaction についてのノート

永　宮　健　夫（阪大理）

（1964年1月4日受理）

同じ表題をお借りして，物性研究Vol.1，No.2の阿部竜蔵氏のノートにつけ加えをしたい。問題は

$$\frac{1}{R}\int_0^\infty j(q)^2 f(q)\sin(qR)\,q\,dq \tag{1}$$

という積分を計算することである。ここに

$$f(q)=1+\frac{1-q^2}{2q}\ln\left|\frac{1+q}{-1+q}\right| \tag{2}$$

で（ただし $2k_F$ を単位にして q をはかつた），$j(q)$ として阿部氏は

$$j(q)=j(0)\frac{\sin qr}{qr} \tag{3}$$

をとつた。物理数学の問題ではあるけれども，この積分を求めることには私も関心があつて，別の方法で処理したことがあるので，以下にかいつまんでそれを御紹介する。

まず（1)の積分を $-\infty$ から $+\infty$ までにかえて，$^1/_2$ 倍にしておく。次に(2)の ln の中の絶対値記号がじやまなので，これを除く。そうすると，$-1<q<1$ の範囲で ln は πi だけの違いを生ずる。他の範囲ではちがわない。ただし，q の複素平面で，-1 と $+1$ を両方とも上か，両方とも下にさげるようにする。さて，絶対値のつかない ln を含む積分は，$\sin qR$ と $\sin^2 qr$ の積から生ずる

$$e^{iq(R+2r)},\quad e^{-iq(R+2r)},\quad e^{iq(R-2r)},\ \text{etc.} \tag{4}$$

の iq にかかる $R+2r$, $-(R+2r)$, $R-2r$, etc. の正負に応じて上か下をまわる半円を積分路に追加してやれば，消えてしまう。従つて，絶対値のついた ln を含む積分は

$$\frac{1}{R}\int_{-1}^{1} j(q)^2 \ \frac{1-q^2}{2q}\ (\pi i)\ e^{iqR}\ q\,dq \tag{5}$$

の種類のものになる。もつとくわしくいえば，(4)に応じて(5)の中の $j(q)^2\, e^{iqR}$ は $e^{iq(R+2r)}$, etc. でおきかえねばならない。

ともかく，(5)の形の積分は ln がないから簡単に計算でき，$j(q)$ が(3)のような特別な形以外のときも計算しやすい。場合によつては $j(q)^2$ の極が q の複素平面上にできるが，そのときは residue の定理を使えばよい。

間接交換相互作用が -1 から $+1$ までの $j(q)$ の値によつてきめられる(極があるときは漸近形がきめられる)ということは，注目してよいことである。