Title	コンデンサートの力学
Author(s)	碓井, 恒丸
Citation	物性研究 (1964), 1(6): 523-531
Issue Date	1964-03-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/85567
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

コンデンサートの力学

（２月１９日受理）

碓　井　恒　丸（基研）

１．超流動と超電導とが，量子論的なオーダ・パラメタ —— 有効波動函数 Ψ の存在によつて特徴づけられることは，既によく知られている。たとえば中嶋：物性４－５ p37）実際ソビエト・グループによつて，半現象論的にあるいはモデル的に，この Ψ の力学が研究されて来たが，特に超電導理論においては，ＢＣＳ－ボゴリユーボフ理論が展開された後になつて，いわゆる〝かたい〟超電導体に関連してその有効性が再認識されている。ここでは，物性基礎論的な立場から超流動－超電導の基本性を統一的に理解するため，この力学の展開を提唱するものである。

既に２５年も前にロンドンによつて，運動量空間における凝縮という形で，超流動に関するこのオーダ・パラメタが認識されたが，後にランダウ・ボゴリユーボフによつてそのダイナミツクスの重要性が指摘された。（理想気体では量子論的オーダが存在するが，それは超流動性をもたない！）。オンサーガー・ペンローズはこの凝縮を，１体の reduces density matrix の固有値が巨視的になるという形でとらえた。その固有函数がコンデンサート場をあらわすのである。

$$\int \langle \phi^*(x')\phi(x)\rangle \Psi(x')dx' = N_0\Psi(x) \qquad (1.1)$$

そのダイナミツクスは，ボゴリユーボフの最低近似で

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}\Psi - v_0\left|\Psi\right|^2\Psi=0 \qquad (1.2)$$

で与えられるが，これはピタエフスキーによつて渦糸の研究に用いられ，また「超流動にはHard Core が本質的であること」を示す基礎として恒藤が用いた（本誌１－３）。現象論的にはギンズブルク・ピタエフスキーが λ 点

近傍で(1.2)の型の方程式について議論した。

他方超電導状態については，ランダウ・ギンズブルクが既に1950 年にλ点近傍で有効波動函数のみたす方程式を求め遷移層の議論を行い，後にアブリコソフが"かたい"超電導体の構造の議論に用いた。ゴルコフはこの方程式の基礎づけを行い，都築は本誌1－4ですべての温度領域に使用できるように拡張する試みを行つている。超電導(あるいはHe^3)の場合，2体の reduced density matrix の固有値N_0：

$$\iint <\psi_+^*(x_1')\,\psi_-^*(x_2')\,\psi_-(x_2)\,\psi_+(x_1)> \Psi(x_1',x_2')dx_1'dx_2' = N_0\Psi(x_1,x_2) \qquad (1.3)$$

が巨視的$\left(\sim \frac{\tau}{4}N(o)\,\varepsilon_0\right)$になり，この$\Psi(x,x)$がクーパーの粒子対からなるコンデンサート場をあらわす。

超流体の速度場$\vec{V}_s$は，$\vec{V}_n$とちがつて，量子力学的な量であるということがしばしば注意されて来た。これはコンデンサート場Ψの位相で定義されるからなのである。一般的にいつて，ただ一価の複素場Ψが存在するということから，"超流体の速度場"が渦なしであること ── ロンドン方程式，また渦糸 ── フラクソイドの量子化という形は論理的に出てくるわけだが，その物理的，定量的な意味はΨ自体が何をあらわすかということにかかつてくる。(ランダウ・ギルズブルクの理論ではe^*とm^*がパラメタである)。

2. ボース粒子系の場合(1.1)でψをハイゼンベルク表示であるとしよう。そのマクロな固有値が縮退していないとすれば

$$\int |\Psi|^2\,dx = N_0 \qquad (2.1)$$

に規格化することによって

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\Psi + \int M(x,\bar{x};t)\Psi(\bar{x}t)\,d\bar{x} = 0 \qquad (2.2)$$

を導くことができる。Mは相互作用ポテンシャルvによって

$$\int v(x-\bar{x}) < \psi^*(x't)\psi^*(\bar{x}t)\psi(\bar{x}t)\psi(xt) > d\bar{x} =$$

$$-\int M(x,\bar{x};t) < \psi^*(x't)\psi(\bar{x}t) > d\bar{x} \qquad (2.3)$$

と定義される。ここですべてのψをΨで近似すれば(1.2)が得られるわけである。

マーデルンク変換:

$$\Psi(xt) = \alpha(xt)e^{im\phi(xt)} \qquad (2.4)$$

を行うと

$$\frac{\partial\alpha^2}{\partial t} + \nabla(\alpha^2\nabla\phi) = -2\int I_m\{\widetilde{M}(x,x';t)\}\alpha(x't)\alpha(xt)dx', \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{m}\int R_e\{\widetilde{M}(x,x';t)\}\frac{\alpha(x't)}{\alpha(xt)}dx' - \frac{\nabla^2\alpha}{2m^2\alpha} = 0 \qquad (2.6)$$

ただし $\widetilde{M}(x,x';t) = e^{im\{\phi(x't)-\phi(xt)\}}M(x,x';t) \qquad (2.7)$

速度ポテンシャルϕに対する"圧力方程式"(2.6)を見ると,この積分表式はケミカルポテンシャル(のポテンシャル部分)の意味をもつことがわかる。連続の式(2.5)は,もしボゴリユーボフの最低近似を行うならば,コンデンサートのそれに帰着してしまうが,一般には超流体の連続の式をあらわす,すなわち

$$R(x,x';t) = < \psi^*(x't)\psi(xt) > = e^{im\{\phi(xt)-\phi(x't)\}}$$

$$\times[\alpha(x't)\alpha(xt) + G'(x,x';t)] \qquad (2.8)$$

とおいてやると，G' の反対称部分 $G_{-}(x,x';t)$ が内部対流を与える：

$$\frac{\partial G'_{+}(xx;t)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left\{G'_{+}(x,x)\nabla\phi-\frac{i}{m}\left[\frac{\partial}{\partial(x-x')}G_{-}(x,x')\right]_{x'=x}\right\}$$

$$+2\int I_m\{\widetilde{M}(x,x')\}\alpha(x')\alpha(x)dx' \qquad (2.9)$$

不均一性が長波長であるとこの G'_{+} が $G'_n+G'_s$ と分解され，(2.5)，(2.9)が

$$\frac{\partial G'_n}{\partial t}=-\nabla\cdot\left\{G_n\nabla\phi-\frac{i}{m}\left[\frac{\partial}{\partial(x-x')}G_{-}(x,x')\right]_{x'=x}\right\}$$

$$(2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha^2+G_s'\right]=-\nabla\cdot\left\{\left[\alpha^2+G'_s\right]\nabla\phi\right\} \qquad (2.11)$$

に置きかえられる。そして(2.6)，(2.11)と独立な方程式としてフオノンーロトンのKinetic equation

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\lambda}(\varepsilon+\nabla\phi)\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon+\lambda\cdot\nabla\phi)\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}=(\text{衝突項})$$

$$(2.12)$$

が成立する。このことは次のような手続きで証明される。

微小振動を考え，実数 k，μ，n_0 をとり

$$\Psi(xt)=\sqrt{n_0}\,e^{-i\mu t}\left\{1+\frac{g}{n_0}e^{-i\omega t+ikx}+\frac{g_1^{*}}{n_0}e^{i\omega^{*}t-ikx}\right\}$$

$$(2.13)$$

とおく。n_0 は熱平衡のコンデンサート密度，μ はケミカルポテンシャルの平衡値である。(2.4)の速度ポテンシャルは

$$\phi(xt)=-\frac{\mu}{m}t+\frac{-i(g-g_1)}{2mn_0}e^{-i\omega t+ikx}+\text{c.c.} \qquad (2.14)$$

で与えられる。

2体の reduced density matrix の最大固有値をもつ固有函数を $\Psi(x_1 t)\Psi(x_2 t) + R(x_1, x_2; t)$ と書き($\lim_{|x_1 - x_2| \to \infty} R \to 0$)

$$R'(x, x'; t)\, e^{im[\phi(x't) - \phi(xt)]} = G'(x, x'; t) =$$

$$F(x - x') + f(x - x')\, e^{-i\omega t + ik(x + x')/2} +$$

$$f^*(x' - x)\, e^{i\omega^* t - ik(x + x')/2} \qquad (2.15)$$

$$\hat{R}(x, x'; t)\, e^{-im[\phi(xt) + \phi(x't)]}$$

$$= \widetilde{F}(x - x') + \widetilde{f}(x - x')\, e^{-i\omega t + ik(x + x')/2} +$$

$$+ \widetilde{f}_1^*(x - x')\, e^{i\omega^* t - ik(x + x')/2} \qquad (2.16)$$

などとおく。そしてハートレー・フオツク・ゴルコフの近似，ボゴリユーボフ近似による運動方程式を線形化する。ゼロ次の式から，$\widetilde{F}$ が実数であること，

$$\mu = v_0 \left\{ n_0 + 2F(o) + \widetilde{F}(o) \right\} \qquad (2.17)$$

および

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + n_0 v_0\right) \widetilde{F}(r) + n_0 v_0 F(r) + \frac{1}{2} n_0 v_0 \delta(r) = 0 \qquad (2.18)$$

が出る。一次の式は，運動量表示で $(f_\lambda + f_{-\lambda}, \widetilde{f}_\lambda + \widetilde{f}_{1\lambda})(f_\lambda - f_{-\lambda}, \widetilde{f}_\lambda - \widetilde{f}_{1\lambda})$ の適当な一次結合をとることにより″対角化″される。つまりフオノン：

$$\varepsilon_\lambda^2 = E_\lambda^2 - \triangle^2, \quad E_\lambda = \frac{\lambda^2}{2m} + \triangle, \quad \triangle = n_0 v_0 \qquad (2.19)$$

が散乱される型（$\varepsilon_{\lambda + k/2} - \varepsilon_{\lambda - k/2}$）と創成される型（$\varepsilon_{\lambda + k/2} + \varepsilon_{-\lambda + k/2}$）の，2組の″kinetic equation″にわかれる。後者はコンデンサートに強く結合するものであるから，$\omega \lesssim k \to 0$ でこれを消去すると結局

$$\omega n'_\lambda = k\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}n''_\lambda + \frac{k\cdot\lambda}{2m}\,k\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\varepsilon\widetilde{F}}{\triangle}\frac{1}{n_0}(g-g_1)$$

$$\omega n''_\lambda = k\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}n'_\lambda + \frac{\lambda^2}{2m\varepsilon}k\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\varepsilon\widetilde{F}}{\triangle}v_0(g+g_1) \qquad (2.20)$$

$$\omega\left\{\left(1-\Sigma\frac{\widetilde{F}v_0}{E+\triangle}\right)(g+g_1)+\Sigma\frac{\triangle^2}{\varepsilon E}n'_\lambda\right\}=\left(\frac{k^2}{2m}+\Sigma\frac{k\cdot\lambda}{2mE}k\cdot\frac{\partial\widetilde{F}v_0}{\partial\lambda}\right)(g-g_1)$$

$$\omega(g-g_1)=2\triangle\left\{\left(1+\Sigma\frac{E-2\triangle}{\triangle(E+\triangle)}\widetilde{F}v_0\right)(g+g_1)+\Sigma\frac{2E-\triangle}{\varepsilon}n'_\lambda\right\}$$

が結果になる。 (2.21)

全粒子数の変動は

$$\delta n = g+g_1+f(o) = \left(1-\Sigma\frac{\widetilde{F}v_0}{E+\triangle}\right)(g+g_1)+\Sigma\frac{E}{\varepsilon}n'_\lambda \qquad (2.22)$$

となるが，(2.21)の第1式左辺を$\omega(\delta n-\delta n_n)$と書くと

$$\delta n_n = \Sigma\frac{\varepsilon}{E}n'_\lambda \qquad (2.23)$$

(2.20)から

$$\omega\delta n_n = k\cdot\left\{\Sigma\frac{\lambda}{m}n''_\lambda + \frac{1}{3}\Sigma\frac{\varepsilon}{E}\frac{\lambda}{\triangle}\frac{d\varepsilon\widetilde{F}}{d\lambda}\frac{k}{2mn_0}(g-g_1)\right\} \qquad (2.24)$$

を得るが，

$$\frac{1}{3}\Sigma\frac{\triangle}{E}\lambda\frac{d\widetilde{F}}{d\lambda}+\frac{1}{3}\Sigma\frac{\varepsilon}{E}\frac{\lambda}{\triangle}\frac{d\varepsilon\widetilde{F}}{d\lambda}=-\frac{1}{3}\Sigma\frac{\lambda}{\triangle}\frac{dEF}{d\lambda}=-\frac{1}{3}\Sigma\lambda\frac{dF}{d\lambda}=F(o)$$

からわかるように，(2.21)(2.24)の$V_s=\frac{1}{2mn_0}(g-g_1)$の係数は，熱平衡の全密度$n_0+F(o)$が超流体と常流体の部分に分解されたことをあらわす。実際

$$\varepsilon\widetilde{F}_\lambda = -\frac{\triangle}{\Omega}\left(\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}+\frac{1}{2}\right) \qquad (2.25)$$

を用いて計算すると，これはランダウが出した結果と一致するのである。

次にスペクトルが(2.19)によりコンデンサートの密度に依存していることをも考慮に入れて，(2.12)を線形化し，λに関して対称，反対称の部分に分解すると(2.20)になることが確かめられる。

3. 同様な解析を，引力をおよぼしあうフエルミ粒子系について行うことができる。(1.3)でψをハイゼンベルク表示であるとし，

$$\iint |\Psi|^2\, dx_1\, dx_2 = No \qquad (3.1)$$

に規格化することによつて

$$i\frac{\partial \Psi(x_1 x_2)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(V_1^2+V_2^2)\Psi + \iint M(x_1 x_2\,;\bar{x}_1 \bar{x}_2)$$

$$\times \Psi(\bar{x}_1 \bar{x}_2)\,d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2 = 0 \qquad (3.2)$$

が導かれる。ただしゴルコフのハミルトニアンをとるとMは

$$g^2\{ <\psi_+^*(x_1')\psi_-^*(x_2')\tilde{\psi}^*_+(x_2)\tilde{\psi}_+(x_2)\tilde{\psi}_-(x_2)\psi_+(x_1)>+$$

$$<\psi_+^*(x_1')\psi_-^*(x_2')\psi_-(x_2)\tilde{\psi}^*_-(x_1)\tilde{\psi}_-(x_1)\tilde{\psi}_+(x_1)> \}$$

$$\equiv \iint M(x_1 x_2\,;\bar{x}_1 \bar{x}_2)<\psi_+^*(x_1')\psi_-^*(x_2')\psi_-(\bar{x}_2)\psi_+(\bar{x}_1)>d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2 \qquad (3.3)$$

で定義される。ここψの上につけた波は，フエルミ面から$\tilde{\omega}$の巾の間にある波数のフーリエ成分のみ含む印である。

今度は

$$\Psi(x_1 x_2) = \alpha(x_1 x_2)\, e^{im\phi(x_1 x_2)} \qquad (3.4)$$

とおくと，$\phi(xx)/2$ が"超流体"の速度ポテンシャルになる。これを単に$\phi(x)$と書くことにして，(2.14)に対応して

$$\phi(xt) = -\frac{\mu}{m}t - i\frac{v_s}{k}e^{-i\omega t+ikx} + i\frac{v_s^*}{k}e^{i\omega^* t-ikx} \qquad (3.5)$$

の形にとろう。これを用いて

$$\psi(x_1 x_2)e^{-im[\phi(x_1)+\phi(x_2)]} = \widetilde{F}(x_1-x_2)$$
$$+\widetilde{f}(x_1-x_2)e^{-i\omega t+ik(x_1+x_2)/2} + \widetilde{f}_1{}^*(x_1-x_2)e^{i\omega^* t-ik(x_1+x_2)/2} \qquad (3.6)$$

と展開する(この場合 $\widetilde{f}(o) = f_1(o)$) さらに

$$<\widetilde{\psi}_\alpha^*(x_2)\widetilde{\psi}_\alpha(x_1)> e^{im[\phi(x_2)-\phi(x_1)]} = F(x_1-x_2)$$
$$+f(x_1-x_2)e^{-i\omega t+ik(x_1+x_2)/2} + f^*(x_2-x_1)e^{i\omega^* t-ik(x_1+x_2)/2} \qquad (3.7)$$

とおき，前と同様ハートレー・フオツク・ゴルコフの近似を行い，線形化するとゼロ次の式は

$$\mu^* \equiv \mu + g^2 F(o) \qquad (3.8)$$

として

$$\left[\mu^* + \frac{\nabla^2}{2m}\right]\widetilde{F}(r) + \triangle\left[\frac{1}{2}\widetilde{\delta}(r) - F(r)\right] = 0, \quad \triangle \equiv g^2\widetilde{F}(o) \qquad (3.9)$$

を与える。一次の式は前と同様 $(f_\lambda + f_{-\lambda}, \widetilde{f}_\lambda + \widetilde{f}_{1\lambda})(f_\lambda - f_{-\lambda}, \widetilde{f}_\lambda - \widetilde{f}_{1\lambda})$ の一次結合をつくることによって″対角化″できる。この場合あらわれてくるスペクトルは

$$\varepsilon_\lambda{}^2 = \xi_\lambda{}^2 + \triangle^2, \qquad \xi_\lambda \equiv \frac{\lambda^2}{2m} - \mu^* \qquad (3.10)$$

である。今度は一体のコンデンサートが存在しないから，事情が少しちがうが，やはり対創成の型の″kinetic equation″ から超流体の方程式

$$\omega\left\{f(o) - \Sigma\frac{\varepsilon}{\xi}n'_\lambda\right\} = -\frac{1}{3}\Sigma\frac{\triangle}{\xi}\lambda\frac{d\widetilde{F}}{d\lambda}k\cdot V_s \qquad (3.11)$$

$$\omega V_s = k\cdot\delta\mu/m \qquad (3.12)$$

が出，散乱型の"kinetic equation"は

$$\delta\varepsilon_\lambda = \frac{1}{\varepsilon_\lambda}\left\{-\xi_\lambda(\delta\mu + g^2 f(o)) + g^2\widetilde{f}(o)\triangle\right\} \qquad (3.13)$$

を考慮した(2.12)に帰着する。(3.11)右辺の係数は

$$-\frac{\varepsilon_\lambda\widetilde{F}_\lambda}{\triangle} = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}+1} - \frac{1}{2}\right) \qquad (3.14)$$

を使うとランダウの考え方で出した($n-n_n$)に一致することも前と同様である。

4. 以上二流体形式との関連について述べたが，この線で衝突項をもあらわに考え局所平衡成立の過程をも含めて理論を展開することが，超流動性 ⟷ 非可逆過程という基礎理論上必要であろう。

また渦糸など不均一度の高い場合のリアリスティツクな理論の展開も将来答えるべき課題である。(芯から充分離れたところではもちろん長波長と考えてよいから，二流体論的な解析はその限りで正しい)