

Title	VI 地磁気成因論の諸問題(<特集>地球と物性研究)
Author(s)	力武, 常次
Citation	物性研究 (1964), 1(6): 491-504
Issue Date	1964-03-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/85570">http://hdl.handle.net/2433/85570</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## VI 地磁気成因論の諸問題

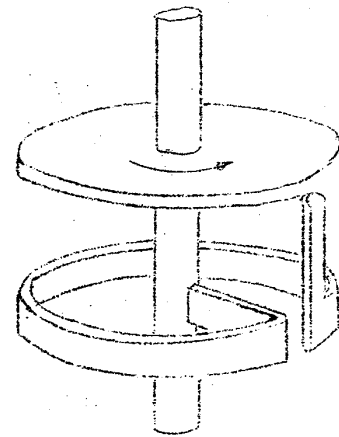
力 武 常 次 (東大震研)

地球磁場は dipole field でほぼ近似できる。ここでは dipole の問題に話を限る。この dipole の成因を説明し、永年変化にも一応の説明を与える理論としては dynamo theory がある。

### § 1. Steady dynamo の理論

#### (1) disk dynamo

図 6-1 のような model を考える。軸に平行な磁場のなかで円板を回転させると、回路に電流が流れ、もとあつた磁場を強める。回転させただけで磁場が発生するためには、  
微分方程式



$$L \frac{dI}{dt} + RI = M\omega I \quad (6-1)$$

$$C \frac{d\omega}{dt} = G - MI^2 \quad (6-2) \quad \text{図6-1 disk dynamo.}$$

$L$  : 回路の self-inductance     $R$  : 回路の resistance

$M/2\pi$  : 回路 - 円板の mutual-inductance

$I$  : 電流     $\omega$  : 角速度

$C$  : 円板の moment of inertia     $G$  : 円板を回転させる偶力において

定常状態  $dI/dt=0$ ,  $d\omega/dt=0$  を求めると,

$$\omega_c = \frac{R}{M}, \quad I_c = \pm \sqrt{\frac{G}{M}} \quad (6-3)$$

力 武 常 次

$R \sim 1 \Omega$ , 円板の半径  $\sim 10 \text{ cm}$  とすると  $\omega_c \sim 10^6 \text{ sec}^{-1}$  で, 実験室での実現は困難である。地球の scale なら, ゆつくりした回転でも dynamo になり得るだろう。

(2) Homogeneous dynamo の基礎方程式

実際に core にあると考えられるのは, ブラシもコイルもない homogeneous dynamo で, もつと能率が悪いと思われる。

fluid conductor 内の電磁場の方程式は

$$\nabla^2 \vec{H} = 4\pi\sigma \left[ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{curl}(\vec{v}_1 \times \vec{H}) \right] \quad (6-4)$$

$\sigma$ : conductivity,  $\vec{v}_1$ : fluid の velocity

定常状態  $\partial \vec{H} / \partial t$  を考えて,

$$\nabla^2 \vec{H} + 4\pi\sigma \text{curl}(\vec{v}_1 \times \vec{H}) = 0 \quad (6-5)$$

あるいは dimensionless の形に書き直して

$$\nabla^2 \vec{H} + V \text{curl}(\vec{v} \times \vec{H}) = 0 \quad (6-5')$$

但し,  $a$  を system に typical な長さ (例えば core の半径) とし, 時間の unit を  $4\pi\sigma a^2$ , 速度の unit を  $1/4\pi\sigma a$  ととつてある。

$$\vec{v} = \frac{4\pi\sigma a}{V} \vec{v}_1$$

$V$  は  $\vec{v}$  の大きさを control する scalar constant.  $V, \vec{v}$  は dimensionless。

適当な  $\vec{v}$  の分布について dipole を含む  $\vec{H}$  が (6-5') を満たすことが証明できればよい。しかしこれは一般には非常に困難である。

(3) Physical discussion

magnetic dissipationがあるから，定常的な dynamo が存在するためには，何か energy を供給する mechanism がなければならない。

core の中心の部分が外側より速い回転運動をしていたとしよう。core 内に対流運動があるとすれば，回転の Coriolis 力により当然そうなる。 $1/\sigma \sim 0$  であれば磁力線は fluid の運動について動くので，はじめ dipole 的な磁場 (poloidal field) があると磁力線がひきのばされて，core のなかに強い toroidal field が生じる。(図 6-2) Toroidal field は core 内に閉じこめられていて外部からは観測されない。

しかし，強い toroidal field はできても，このままでは dissipation によつて poloidal field とともに damp してしまう。そこでつぎに，toroidal field から poloidal field へ energy を feed back する mechanism がなければならない。

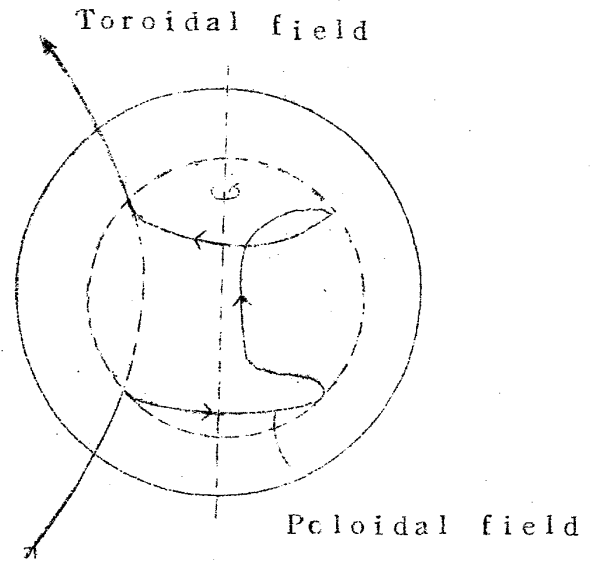


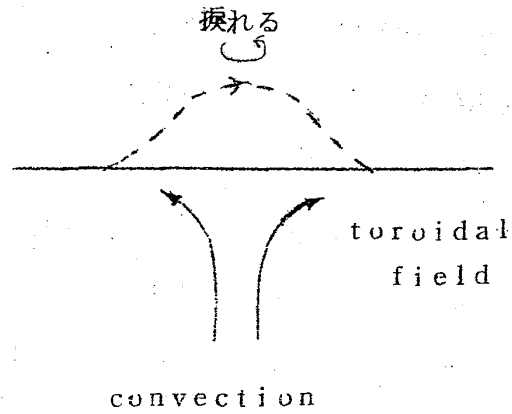
図6-2 Generation of a toroidal field from a poloidal one.

feed back の mechanism は toroidal field と fluid の convective motion の coupling によつて得られる。例えば，

toroidal field のある所に convection が起ると，磁力線は流れについて持ち上る。(図 6-3) これが Coriolis 力によつて捩られ，磁場に南北成分が生じる。このような process がいくつも random におこると，平均として dipole field への energy の feed back となり得る。しかし，

力 武 常 次

このmechanismでは，十分なenergy が供給できるかどうか疑問である。



(4) Bullard の process

Bullardは図6-4のようなprocessを考えた。ここで $T$ はtoroidalなfluid motion, magnetic field, electric currentを,  $S$ はpoloidalなmotion, field, current

図6-3 toroidal field から poloidal field へのenergy feed back.

を表す。添字はspherical harmonicsを示す。すなわち

$$T_n^{mc}, S_n^{mc} \sim P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$$

$$T_n^{ms}, S_n^{ms} \sim P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

fluid motionとしては $S_2^{2c}, T_1$ の二つだけ考えることにする。これらはそれぞれ

$S_2^{2c}$  : convection, 熱的な原因で生じる。(図c, d)

$T_1$  : shear motion, 地球が自転しているため, convectionがあると, angular momentumの保存からcoreの内部の方が速かに回転する(図a)

のようにして生じると考えられる。

最初にdipole field  $S_1$ があると, これがfluid motion  $S_2^{2c}, T_1$ とcoupleしてつぎつぎと $T_2$ (=上で考察したtoroidal field),  $T_2^{2c}, T_2^{2s}$  fieldをつくり, 最後に $T_1$  currentが生じ, これが再びdipole field  $S_1$ をつくるprocessが図に示されている。ここで重要な仮定は,  $n \geq 3$ のhigher harmonicsはすべて無視されていることである。

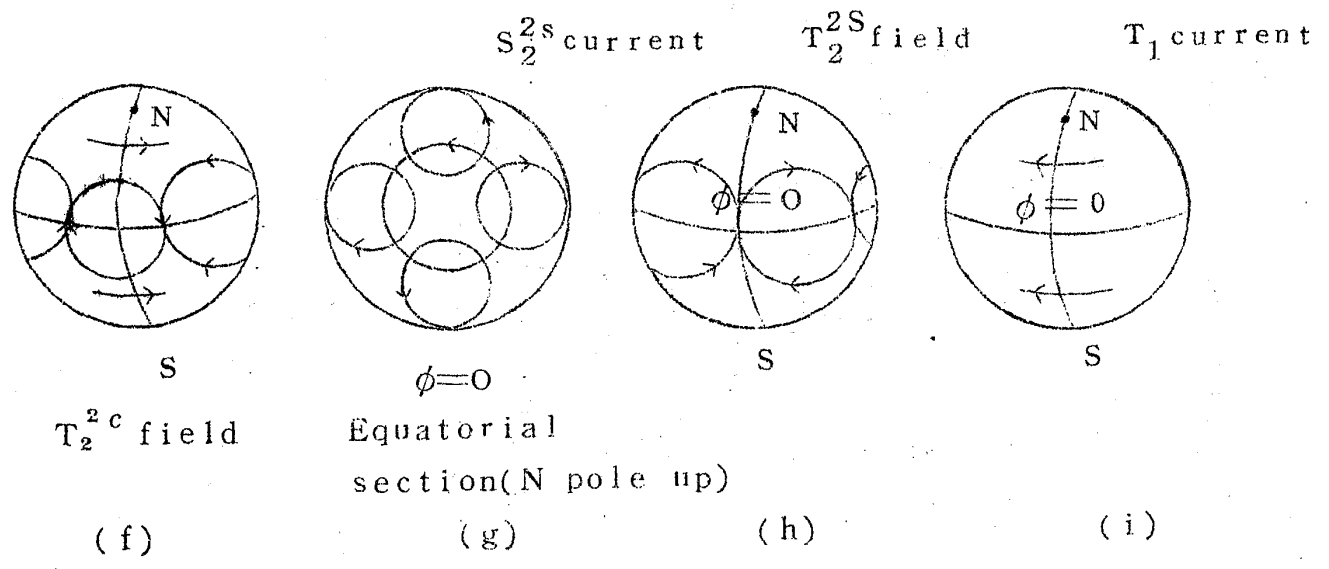
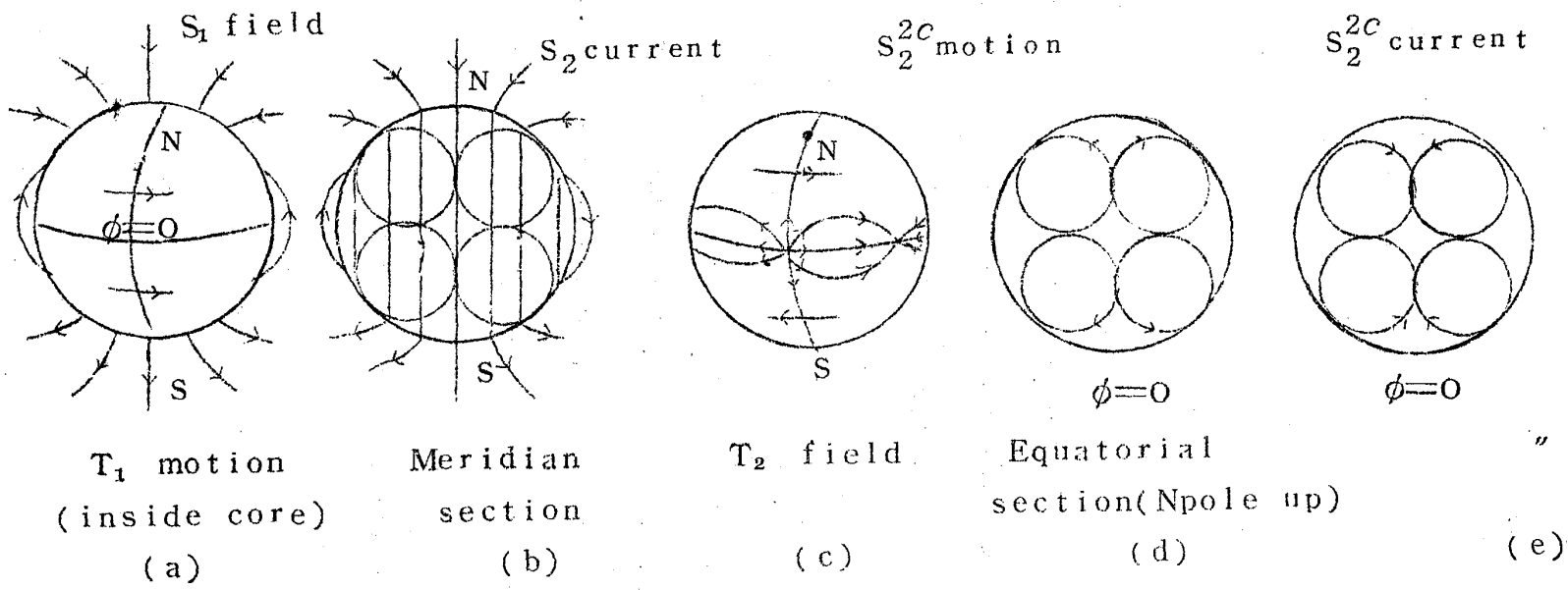


图6-4 Bullard's process

このprocessで十分、energyの供給が可能だろうか。

(6-5')で $\vec{H}$ には $S_1, T_1, T_2^{2c}, T_2^{2s}$ 成分,  $\vec{v}$ には $T_1, S_2^{2c}$ 成分だけとり,

$$\vec{H} = \vec{H}_{S_1} + \vec{H}_{T_1} + \vec{H}_{T_2}^{2c} + \vec{H}_{T_2}^{2s}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{T_1} + \vec{V}_{S_2}^{2c} \quad (6-6)$$

とおき,  $\vec{V}$ の radial partについては,

$$Q_S(r) = r^3(1-r)^2, \quad Q_T(r) = \epsilon r^3 \quad (6-7)$$

と仮定する。 $\epsilon$ は $T_1$  velocityと $S_2^{2c}$  velocityの比を決めるparameterである。計算の途中で出てくるhigher harmonicsはすべて無視すると、問題は $V$ に対するeigenvalue problemに帰着する。計算の結果、

$$\begin{aligned} \epsilon = 20 \text{ のとき} & \quad V = 33.02 \\ \epsilon = 100 \text{ のとき} & \quad V = 22.06 \end{aligned} \quad (6-8)$$

とreal eigen valueが得られた。eigen functionは図6-5のようになる。ここで地球中心からの距離 $r$ はcoreの半径でreduceしてある。この結果、 $\sigma \sim 3 \times 10^{-5}$  e.m.u.と仮定すると、maximum speed 0.04 cm/sec.でdynamoとなり得ることになる。toroidal fieldの大きさは

Coriolis force  $\simeq$  electromagnetic force

として見積ると、 $\sim 450$  Gとなる。

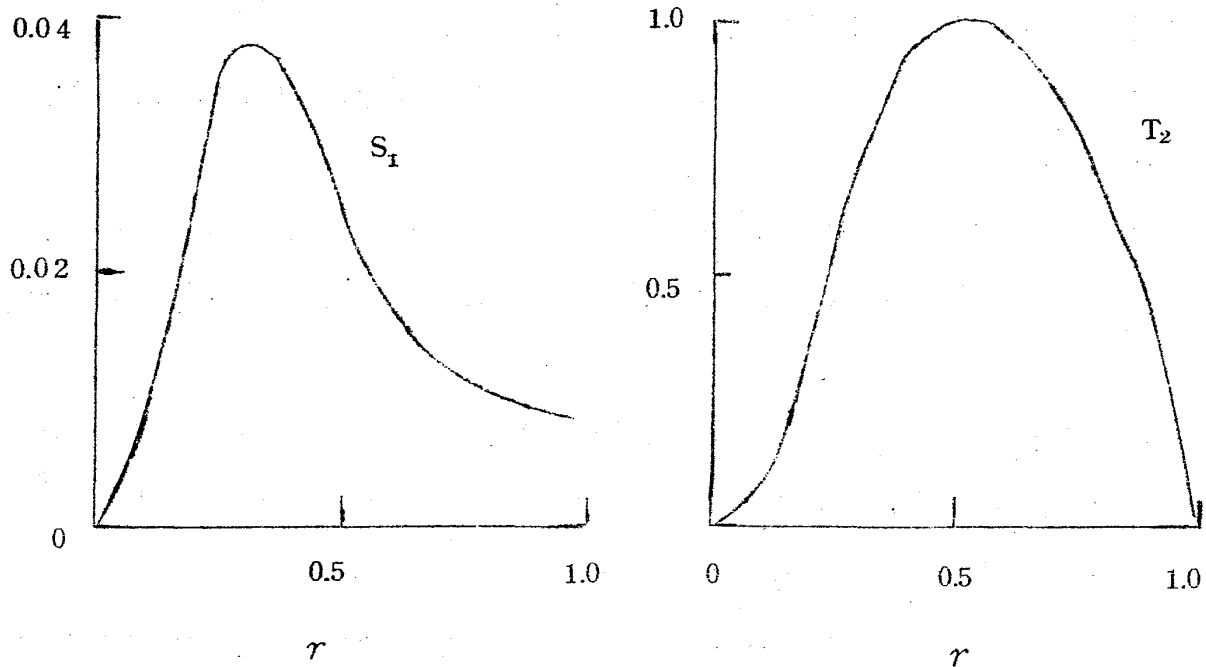


図6-5 Poloidal field  $S_1$ , toroidal field  $T_2$  radial part.

(5) Backus, Herzenberg の dynamo

上の議論では, higher harmonics を無視した近似に疑問が残る。higher harmonics が成長して, それに energy を持つていかれることがないだろうか?

Backus と Herzenberg は簡単な model について厳密に取扱い, homogeneous dynamo が存在すること, 高次の磁場は無視してよいことを示した。

Backus はつぎのような計算を行った。

a) 最初に dipole field と, fluid の軸対称な shear motion を考える。

b) 十分強い poloidal field が成長したところで fluid motion を止める。



c) それ以後の field の時間変化を調べると、十分長い時間の後では、純粋な toroidal field  $T_1$  だけが生き残る。

d) つぎに、fluid を非対称に運動させて、 $T_1$  から dipole field へ energy を供給する。

e) 再び fluid motion を止め、その後の field 変化を調べると、dipole field の damping が、高次の field に比べて一番おそいことがわかる。

Herzenberg は、二つの導体の剛体球 A, B が大きな導体の剛体球の中にはめ込まれていて、A, B がかたむいたそれぞれの軸のまわりで回転するという model で、これが dynamo となることを示した。

これらの結果から類推して、Ballard の process で higher harmonics を無視することは、許されると見てよいであろう。

#### (6) Lowes-Watkinson の実験

Lowes & Watkinson は実験室でコイルもブラシもない homogeneous dynamo をつくることに成功した。

装置を図 6-6 に示す。二ケの強磁性金属製の円筒を軸をかたむけておく。円筒は周囲と水銀層で電氣的に接触している。円筒の回転速度を増していくと、回転速度がある critical value を越えたところで、induced field が急に大きくなり、dynamo となったことがわかった。

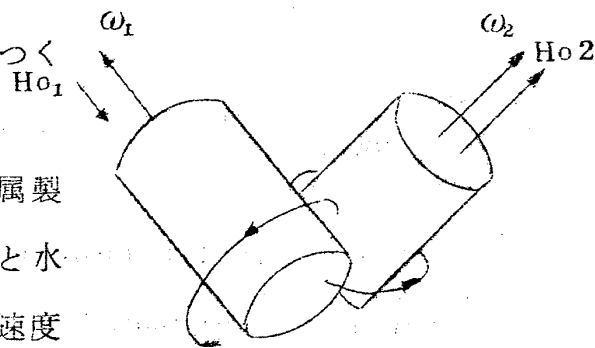


図6-6 Lowes-Watkinson's dynamo

## § 2. 地磁気の永年変化

dynamo theory のすぐれている点は, dipole field の成因を説明するだけでなく, その永年変化にも説明を与え得る点である。

## (1) Reversal of geomagnetic dipole

rock magnetism の研究から,  $10^6$  years 前に地球磁場が逆転したと, この逆転が  $10^4 \sim 10^5$  years という比較的短い時間に起つたことが知られている。

この逆転が, dipole の回転として起つたか, dipole の強さが  $+$   $\rightarrow$   $0$   $\rightarrow$   $-$  と変化して起つたかも重要な問題である。ちよろどこの逆転の過程をとらえた研究があるが, それによると, dipole が回転しているように見える。しかし, 磁化の強さの測定から, 磁場の強さを出すと, dipole が横をむいているときの強さが弱い。だから dipole が横をむいたときの磁場は, 実は non-dipole field であるとするれば, 逆転は dipole の強さの  $+$   $\rightarrow$   $0$   $\rightarrow$   $-$  の変化とみてよいであろう。

## (2) Non-steady dynamo の理論

逆転の問題は dynamo theory で説明できるだろうか? このことをまともにも調べるには, (6-4) を fluid の equation of motion と連立して解かなければならない。これは非常に難しい問題である。

これを簡単な disk dynamo について (6-1), (6-2) を解いてみると, 解は steady な値 (6-3) のまわりで振動はするが, field のむきの逆転はおこらないことがわかる。

core ではいくつかの convection があつて, 互に couple しているであろうから, その model として二ヶの coupled disk dynamo を取扱つてみる。(図 6-7)

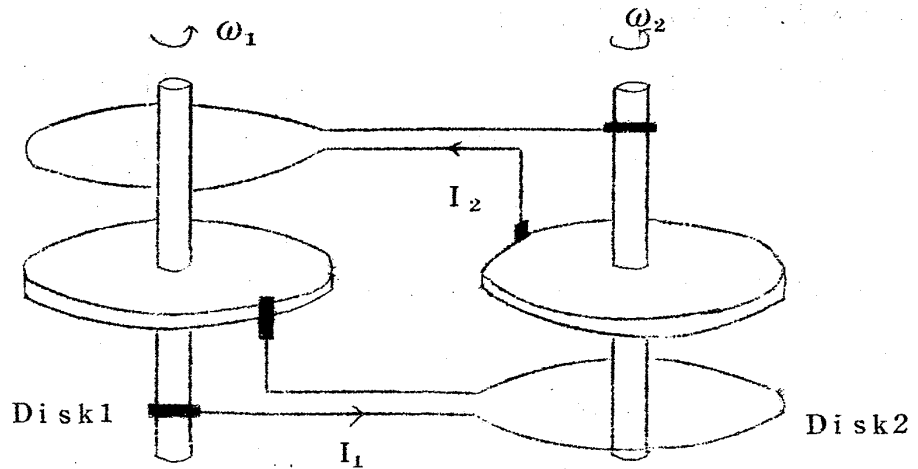


図6-7 Coupled disk dynamo

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = \omega_1 M I_2$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 = \omega_2 N I_1$$

( 6 - 9 )

$$C_1 \frac{d\omega_1}{dt} = G_1 - M I_1 I_2$$

$$C_2 \frac{d\omega_2}{dt} = G_2 - N I_1 I_2$$

$2\pi M$  : coil 2 - disk 1 の mutual inductance

$2\pi N$  : coil 1 - disk 2 の mutual inductance

similar な disk について  $G_1 = G_2 = \text{const.}$  として ( 6 - 9 ) を解くのも膨大な数値計算を必要とするが、計算結果の一例は図 6 - 8 のようになり、確かに磁場の逆転が起ることがわかる。

しかし、このような計算では、model が簡単すぎて逆転の可能性を suggest するにすぎないように思われる。いずれは magneto-hydrodynam-

mics をちやんとやる必要がある。

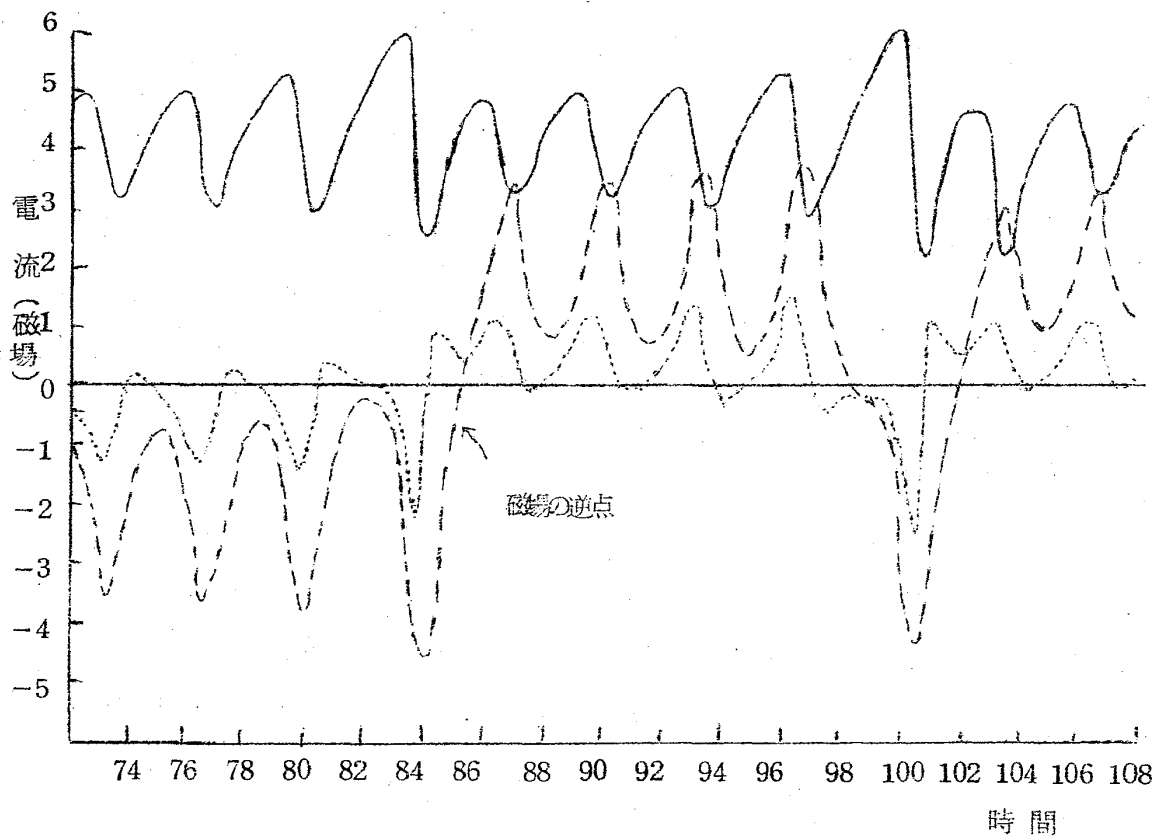


図 6-8 Coupled disk dynamo についての計算結果 (一例)。

### (3) Westward drift

地球磁場の pattern が約  $0.2 \text{ deg/year}$  の速さで西へずれていることが観測されている。自転速度が mantle より core が  $0.2 \text{ deg/year}$  だけおそければこの drift が出るわけだが、このことも mantle-core の electromagnetic coupling を考えることにより、dynamo theory で説明できる。

mantle の底部は core より  $10^8$  だけ小さい conductivity を持っていると考えられている。(図 3-3)

dynamo theory では強大な  $T_2$  磁場の存在が要請されるが、mantle 底部の conductivity のためにこの磁場は若干 mantle 内にしみ出て、core

に固定している dipole field との interaction で偶力が生じる。しかし core が mantle に対して slip していて, westward drift に示される相対運動があれば, その slip のために core-mantle boundary に発生する toroidal 磁場による偶力は前述の  $T_2$  磁場による偶力を打消す。故に定常状態では mantle は core より必ず自転速度が大きいことになる。

core 内の運動については磁場に変動があれば, core-mantle coupling を通じて, 地球回転速度および westward drift の変動となつて観測にかかる可能性があり, 1910 年頃の地球回転速度の急変(1日の長さが 1 ms / 10 年程度の変化を示した)は core-mantle boundary での磁場が 10 % 程度変化したとすれば説明できる。

#### Discussions

△ fluid motion をおこす energy source は何か?

—— inner core の温度が下がり, solidification が起つて, その latent heat が energy source となつて convection が起ると考えられている。

△ core の viscosity, thermal conductivity, electric conductivity は知られているか? その値は dynamo theory に favorable か? core を ion + electron の mixture とし, 原子番号  $Z = 10 \sim 30$  についての estimation がある。結果は

$$\text{viscosity} \sim 10^{-3}$$

$$\text{electric conductivity} \sim 2 \sim 4 \times 10^8 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$\text{thermal conductivity} \sim 0.05 \sim 0.5 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{sec}$$

( V 参照 )

## References

- Bullard, E.C. and Gellman, H. (1954) Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 247, 213-278.
- Larmor, J. (1919) How could a rotating body such as the sun become a magnet? *Rep. Brit. Ass.*, 159-160.
- Cowling, T.G. (1934) The magnetic field of sunspots. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 94, 39-48.
- Elsasser, W.M. (1946a) Induction effects in terrestrial magnetism—Part I. Theory. *Phys. Rev.* 69, 106-116.
- Elsasser, W.M. (1946b) Induction effects in terrestrial magnetism—Part II. The secular variation. *Phys. Rev.* 70, 202-212.
- Elsasser, W.M. (1947) Induction effects in terrestrial magnetism—Part III. Electric modes. *Phys. Rev.* 72, 821-833.
- Bullard, E.C. (1948) The secular change in the earth's magnetic field. *Mon. Not. R. Astron. Soc. Geophys. Supp.*, 5, 248-257.
- Bullard, E.C. (1949a) The magnetic field within the earth. *Proc. Roy. Soc. London A*, 197, 433-453.
- Bullard, E.C. (1949b) Electromagnetic induction in a rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. London A*, 199, 413-443.
- Bullard, E.C. (1955) The stability of a homopolar dynamo.

力 武 常 次

- Proc. Cambr. Phil. Soc., 51, 744-760.
- Parker, E.N. (1955) Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.* 122, 293-314.
- Backus, G. (1957) The axisymmetric self-excited fluid dynamo. *Astrophys. J.*, 125, 500-524.
- Takeuchi, H. and Shimazu, Y. (1953) *ibid.* *J. Geophys. Res.*, 58, 497-518.
- Takeuchi, H. and Shimazu, Y. (1954) *ibid.* *J. Phys. Earth*, 2, 5-12.
- Backus, G. (1958) A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys.*, 4, 372-447.
- Herzenberg, A. (1958) Geomagnetic dynamos. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 250, 543-585.
- Lowes, F.J. and Wilkinson, I. (1963) Geomagnetic dynamo : a laboratory model. *Nature*, 198, 1158-1160.
- Rikitake, T. (1958) Oscillations of a system of disk dynamos. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 54, 89-105.
- Allan, D.W. (1958) Reversals of the earth's magnetic field. *Nature*, 182, 469-470.
- Allan, D.W. (1962) On the behaviour of systems of coupled dynamos. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 58, 671-693.