The Magnetic Properties of Superconducting Alloys III. Abrikosov Structure (2)

真 木 和 美（京大数理研）

（4月21日受理）

1° ここでは H_{c1} での相転移の様子やこの点の近くでのAbrikosov structure をしらべてみることにする。一般の議論は非常に困難なので $\kappa \gg 1$ の場合にのみ話を限ることにする。以下の議論は T＝0°K について行なわれるが一般の温度の様子にそれから容易に推測できる。$\kappa \gg 1$ の極限でかつ H_{c1} の近傍だけに話を限るとするならば以下に見られるように、Tewordt や Tsuzuki によつて導かれた一般化されたGinzburg-Landau 方程式を用いて取り扱うことができるのであるけれども、我々は電子の平均自由行路の短い場合（合金の場合）に興味をもつているので平均自由行路の効果をはじめからとり入れた式から出発しなければならない。このような時（$l/\xi_0 \ll 1$）には電磁場の効果は $q \to q \pm 2eA$ の置きかえによつて完全に理論の中にとり入れることができるので我々は最初A＝0の場合の式をみちびくことにしよう。我々は 1) Δ の場所による変化はゆるやかであること 2) $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ のように分解したとき Δ_1 のみが場所によるとすれば Δ_1 を摂動と考えることができる、の二つの仮定をおく。 1)は $\kappa \gg 1$ のときに一般に成立すると考えられるし、 2)は H_{c1} の近くに話を限れば十分に満足されると考えられる。このときには Collective mode への平均自由行路の影響を論じたとき[1]と同様な考察によつて Δ について

$$\{\ln \Delta/\Delta_{00} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_0\left(\frac{\Delta n}{T}\right) + 2\pi T\sum\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2+a}}\right)\}\Delta = 0 \quad (1)$$

ここに $a = \frac{\tau_{tr}}{\sigma} v^2 (i\vec{\nabla} + 2eA)^2$

の式を得る。電流については Abrikosov et Gor'kov[2]の結果を用いて

$$j = \frac{\tau_{\tau r} e^2 N}{m} \pi \Delta \tanh\left(\frac{\Delta}{2T}\right) \vec{A} \tag{2}$$

がえられる。仮定1) を用いると(1)式はさらに

$$\left\{ \ell n \Delta / \Delta_{00} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0\left(\frac{\Delta n}{T}\right) + \frac{\pi}{2\Delta} \tanh\left(\frac{\Delta}{2T}\right) a \right\} \Delta(r) = 0 \tag{3}$$

のようになる。

2° $\kappa \gg 1$ のときには完全反磁性をもつた状態から混合状態への転移の次数は一般に温度によらず二次になることが期待される。以下、話を簡単にするため $T = 0°K$ に限ることにする。
Abrikosov に従つてまず bulk の中に単位磁束をもつた渦糸をつくるのに必要なエネルギーを計算してみよう。 $\Delta = \Delta_{00} e^{i\varphi} f$ とし、また $A - \nabla\varphi / 2e$ の絶対値に等しい scalar 量 Q を導入すると(3), (2)式は

$$(1-f) f + \frac{\pi \tau_{\tau r} v^2}{12 \Delta_{00}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + 4e^2 Q^2 f^2 \right) = 0 , \tag{4}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rQ)\right) = \frac{4\pi^2 \tau_{\tau r} e^2}{m} N \Delta_{00} f Q , \tag{5}$$

また磁場 H は Q を用いて

$$H = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rQ) , \tag{6}$$

から求められる。渦糸の中心の極く近くを除いては f は殆んど 1 になるので(5)式はとけて

$$\begin{aligned} Q &= \alpha / 2e \, K_1(\alpha r) , \\ \alpha &= \left(\frac{4\pi^2 \tau_{\tau r} e^2}{m} N \Delta_{00} \right)^{1/2} , \end{aligned} \tag{7}$$

また(6)式から

$$H = \alpha^2/2e \; K_0(\alpha r) \quad , \tag{8}$$

がえられる。K_1 及び K_0 は第二種の変形ベツセル函数で、$\alpha r \ll 1$ のときの漸近型を用いると(4)式は

$$(1-f)\,f + \frac{\pi \tau_{\tau r} v^2}{12 \Delta_{00}} \left(-\frac{1}{r} \frac{d}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} f \right) = 0 \; , \tag{9}$$

あるいは

$$f = 1 - \frac{\pi}{12} \frac{\tau_{\tau r} v^2}{\Delta_{00}} \frac{1}{r^2} \quad , \tag{10}$$

がえられる。$\kappa \gg 1$ のときには(10)式を用いると1本の渦糸のエネルギーを計算することができる。 すなわち

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m p_0}{2\pi^2} \Delta_{00}^2 \left\{ 2\pi \int_0^\infty \frac{1-f^2}{2} \, r dr \right\} \\ &= \frac{m p_0}{2\pi^2} \Delta_{00}^2 \left\{ \frac{\pi^2 \tau_{\tau r} v^2}{6 \Delta_{00}} \ell n \frac{\left(\frac{4\pi^2 e^2 N}{m} \tau_{\tau r} \Delta_{00}\right)^{-1/2}}{\left(\frac{\pi \tau_{\tau r} v^2}{12 \Delta_{00}}\right)^{1/2}} \right\} , \\ &= \frac{m p_0}{12} \Delta_{00} \tau_{\tau r} v^2 \; \ell n \left(\frac{1}{\pi e \tau_{\tau r} v} \left(\frac{12 m}{4\pi N}\right)^{1/2} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

上の計算で積分の下限は $r = \left(\frac{\pi}{12} \frac{\tau_{\tau r} v^2}{\Delta_{00}}\right)^{1/2}$ にとつた。こうした渦糸を作ることがエネルギー的に可能であるためには外場の強さを H_0 としたとき $F_1 - \frac{1}{4\pi} H_0 B$ が負でなければならない。こゝで F_1 は渦糸の単位面積あたりの数を n としたとき

$F_1 = n\varepsilon$ ，で与えられまたBは

$B = \overline{H} = n \int H ds = n \phi A d\ell$ になるが、(8)式を用いると

$$B = \frac{2\pi}{2e} n = \pi n/e \quad , \tag{12}$$

になる。これから H_{c1} は

$$H_{c1} = 4e\varepsilon = \frac{emp_0}{3} \Delta_{00} \tau_{TT} \left(\pi \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \kappa \right) , \tag{13}$$

あるいは

$$H_{c1} / \sqrt{2}\, H_c = \frac{1}{2\kappa_3} \ln \kappa_3 , \tag{14}$$

で $\kappa_3 = \pi \left(\frac{2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} \kappa = 1.53\kappa$, (15)

のようにかける。

3° 上の議論ではH_{c1}はnによらずにきまつたが相転移が二次のときには常にこのような事情になつている。実際には渦糸の間に反撥力が働らくのでnはH_0の函数としてきめることができる。以下の計算はAbrikosovによつてすでに行なわれているので詳しくはやらないけれどMagnetization Bについて次のような結果がえられる。

$$\kappa_3 (H_0 - H_{c1}) = H_c \sum_{l,m} \left[2\kappa_0 (x_{l,m}) + x_{l,m} \kappa_1 (x_{l,m}) \right] \tag{16}$$

で三角形の格子に対しては

$$x_{l,m} = a \sqrt{\frac{2\pi (l^2 + m^2 + lm)}{\sqrt{3} eB}} , \tag{17}$$

正方形の格子に対しては

$$x_{l,m} = a \sqrt{\frac{\pi (l^2 + m^2)}{eB}} , \tag{18}$$

の式がえられる。上の式からH_{c1}の近くでのAbrikosovの構造は一つのパラメーターκ_3を用いて完全に記述されることがわかる。したがつてκ_3の温度依存性を求めればH_{c1}の近くでの混合状態は温度によらずそのκ_3を用いることによつて、もとのAbrikosovの理論でもつて議論できることが期待される。任意の温度でのκ_3は(3)式から

$$\kappa_3 = 2\pi(7\zeta(3))^{-1/2}\,\kappa\,\frac{\{\int_0^{\Delta}\Delta^2 dh\}^{1/2}}{\Delta\tanh(\frac{\Delta}{2T})}\quad, \tag{19}$$

で　$h = \ell n\,\Delta/\Delta_\infty + 2\Sigma(-1)^{n+1}\kappa_0(\frac{\Delta n}{T})$　, (20)

から与えられる。漸近的には

$$\kappa_3(T) = \kappa_3(0)\,\{1-\frac{2\pi^2}{3}(\frac{T}{\Delta})^2\}^{1/2}\quad,\quad T \ll T_c \tag{21}$$

$$= \kappa(1+0.32(1-\frac{T}{T_c}))\,,\quad |T-T_c| \ll T_c \tag{22}$$

のようになる。この $\kappa_3(T)$ を用いると

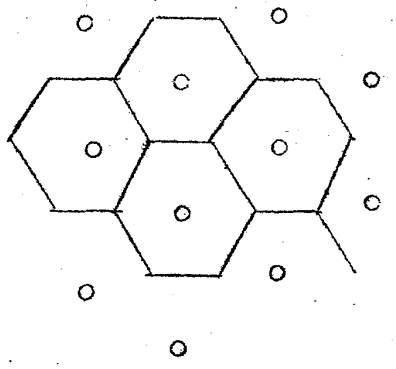
$$H_{c1}(T)/\sqrt{2}\,H_c(T) = \frac{1}{2\kappa_3(T)}\,\ell n\,\kappa_3(T)\quad, \tag{21}$$

が成立する。また H_{c1} の近くでの Abrikosov の構造は κ_3 だけで記述できることが示される。(21)式及び (19)式から κ の大きなときには

$$H_{c1}(T) = \frac{emp_0}{3}\,\tau_{\tau r}\,v^2\,\ell n\,\kappa\,(\Delta\tanh\frac{\Delta}{2T}) \tag{22}$$

のようにかけることがわかる。

4°　$\kappa \gg 1$ のときには中間領域を次のようにしてとりあつかうことができる。$H_0 > H_{c1}$ になると独立した渦糸の集まりと考えることはもはやできないが、渦糸間の距離が $(\frac{\pi}{12}\frac{\tau_{\tau r}v^2}{\Delta_{00}})^{1/2}$ にくらべてずつと大きい時には、1つの渦糸を考えるとき他の渦糸の影響は近似的に渦糸の点での磁場でおきかえることができる。この時具体的に解くには下図のような bulk を同等な



一つの渦糸を含むような cell に分けて、一つの cell について考察すれば十分である。(こゝでは三角格子のときのみ考える。)渦糸の中心部を除いては Δ の変化はごく小さいと考えられるので、これらの磁場の存在は

Δを小さくすること、それからこうした問題に常に起こる励起スペクトラムのずれとして理論の中にとり入れることができる。T＝0°k のときにはΔ及びjについての式は、

$$\{ \ell n\, \Delta/\Delta_{00} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\Delta}(a + b(q+2ieA)^2) \}\, \Delta' = 0 \quad , \tag{23}$$

$$j = \frac{e^2 N \tau}{m}(\pi\Delta - \frac{4}{3\pi}a\}A \quad , \tag{24}$$

になり

$$a = \frac{\tau_{\tau r} v^2}{3}\overline{(4e^2 Q'^2)} = \frac{\tau_{\tau r} v^2}{3}\alpha^2 \overline{\left[\sum_{m \neq 0} \kappa_1(\alpha|r - r_m|)\right]^2} \quad ,$$

$$b = \frac{\tau_{\tau r} v^2}{3} \tag{25}$$

であらわされる。このとき平均操作は一つのcellについてとるものとする。aはパラメーターと考え後でself consistentに後できめるものとする。(24)式とMaxwellの式から、

$$H = \frac{\alpha^2}{2e}\sum_m \kappa_0(\alpha|r - r_m|) \quad , \tag{26}$$

$$\text{で} \quad \alpha = \{\frac{4\pi^2 e^2 N}{m}\tau_{\tau r}(\Delta_0 - \frac{4}{3\pi}a)\}^{1/2} \quad , \tag{27}$$

また(23)式から

$$f = 1 - \frac{\pi b}{4(\Delta_0 - \frac{\pi}{4}a)}\frac{1}{r^2} \quad , \tag{28}$$

これを用いて1本の渦糸のエネルギー ε' は

$$\varepsilon' = \frac{\Delta_0}{\Delta_{00}}\varepsilon \quad , \tag{29}$$

のようになる。Δ_0 は

$$\ell n\, \Delta_0/\Delta_{00} = -\frac{\pi}{4\Delta_0}a \tag{30}$$

から求められる。

aのExplicitな形は、1) $a|r_m| \gg 1$ のときには非常に簡単で、

$$\kappa_1(a|r-r_m|)=\exp\{-i\arcsin(\frac{|r|\sin\varphi}{|r-r_m|})\}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\kappa_{1+v}(a|r_m|)J_r(a|r|)\,e^{iv\varphi}$$

$$,\qquad |r_m|>|r|$$

の展開を用いると

$$a=\frac{\tau_{tr}v^2}{3}a^2(\sum_m\kappa_0(a|r_m|))^2\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}rdr(J_1(a|r|))^2$$

$$=\frac{\tau_{tr}v^2}{3}a^2(\sum_m\kappa_0(a|r_m|))^2[(J_1(a|r_0|)^2-J_0(a|r_0|)J_2(a|r_0|))]$$

$$\simeq\frac{\tau_{tr}v^2}{3}a^2\{6\sqrt{\frac{\pi}{2a\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}eB}}}}\exp\{\frac{-a\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}eB}}}{}\}\}^2(\frac{2}{\frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}eB}}})$$

$$\simeq\frac{\tau_{tr}v^2}{3}\cdot 72(\frac{\sqrt{3}eB}{\pi})\exp\{\frac{-2a\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}eB}}}{}\} \tag{31}$$

一方渦糸がかなりつまつてきて $a\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}eB}}<1$ のときには（もちろんまだ渦糸の構造が見えないくらいにはなれているとする。）IIの議論から

$$a=\frac{\tau_{tr}v^2}{3}eB \tag{32}$$

になることが期待される。これらの表式を用いる中間領域についてもかなり立ち入つた議論が期待されるが、ここでは最も重要だと思われる励起スペクトラムの gap のふるまいを考えよう。一般に電子自由行路が短い場合、時間反転に対しての不変性をやぶるような相互作用があるときには、励起スペクトラムの gapは Δ でなく、（ここでのnotation を用いれば）$\omega_0=\{\Delta^{2/3}-a^{2/3}\}^{3/2}$ でかけることがわかつている。[3] もつとも今考えている系では渦糸の中心は正常状態であるのでこゝでは $\Delta=0$ になるが、これらは比熱その他に殆んど寄与を与えないので（極く低温を除いては）、指数項は $e^{-\frac{\omega_0}{T}}$ のようになることが期待される。すなわち

$$(_s=\frac{mp_0}{\pi^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,T^{-1/2}\zeta^{-3/2}\Delta^{-1/3}\omega_0^{11/6}\,e^{-\omega_0/T}\quad, \tag{33}$$

で与えられる。注意すべきことは、H_{c2} の近くで $\overline{|\Delta|^2}$ が finite でも空間的に一様に励起スペクトラムの gap が消えた状態（gapless superconductivity）があらわれることである。この磁場 H′ はほぼ

$$\Delta H = H_{c2} - H' \simeq \frac{2\kappa^2 - 1}{96\pi\kappa^2} H_{c2}$$

で与えられる。したがつてこのような状態では混合状態にあるにもかゝわらず比熱は温度に線型にふるまう。（実際にはもつと低い磁場のもとで線型の項があらわれることが期待される。

文　　献

1) K. Maki and T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. 28 (1962) 163

2) A.A. Abrikosov and L.P. Gor'kov, J E T P 35 (1958), 1558

3) K. Maki, to be published in Prog. Theor. Phys.
又は物性研究 1, (1963) 1を見よ。