一次元 Ising model と相転移

鈴　木　増　雄（東大理）

（3月22日受理）

スピン系の二次の相転移について、分子場近似の結果とは違った、実験事実や Padé の結果を説明出来るような半現象論的な理論を、前に提案した。[1] そこでは Free energy を磁化Mで展開した時の展開係数を cumulant で表わす公式を作り、二体と四体の cumulant の singularity の相対的な強さによつて、Mの四次の係数が、Curie 点 T_c で零になる可能性のあることを指摘し、更に、cumulant が Curie 点の上・下で same order の singlarity を持つとして、帯磁率 χ，自発磁化 M_s，比熱C等の転移点近傍に於ける振舞を議論した。即ち、Free energy Φ をMで展開して、その展開係数は、$T \geqq T_c$ で、

$$\Phi = \Phi_0 + AM^2 + BM^4 + CM^6 \cdots - HM \tag{1}$$

$$A = \frac{kT}{2!}\frac{1}{<S^2>_c}, \quad B = -\frac{kT}{4!}\frac{<S^4>_c}{<S^2>_c^4},$$

$$C = -\frac{kT}{6!}\left[\frac{<S^6>_c}{<S^2>_c^6} - 10\times\frac{<S^4>_c^2}{<S^2>_c^7}\right], \quad \cdots\cdots \text{etc} \tag{2}$$

と与えられる。但し、

$$S = \sum_i \delta_i^z \ (\text{total spin}).$$

帯磁率 $\chi = (\mu_\beta g)^2 \cdot <S^2>_c / kT$. これより、Mの四次の係数 B(T)が、Curie 点 T_c で零になるかどうかを見るには、cumulant $<S^2>_c$ と $<S^4>_c$ の singularity の相対的な order を知ればよい。とは言つても、二次元三次元モデルで、それを調べるのは、一般に、個々の cumulant の singularity を調べるのと同程度に困難である。そこで、ここでは、厳密に解ける

鈴木増雄

一次元Ising modelを、上の新しい立場から、見直して、一般の場合にsuggestiveな結論を引き出して見たいと思う。

良く知られているように、一般にshort range forceで、一次元のclassical systemでは、相転移は起らない。[2,3,4] この一般的な定理にあるように、一次元Ising modelでは、相転移は起らない。もつと厳密に言うと、有限温度では、相転移は起らない。しかし、この系は、絶対零度で、相転移を起していると見ることが出来る。事実、T＝0で、熱力学的関係は、singularityを持つている。又、exchange interaction (−J)がnegativeであれば、T＝0では、Ferroになる。そこで、一次元Ising modelを、$T_C=0$なる系と見て、$T \geqq T_C$でのcumulantによる表式(2)のsingularityの様子をこの場合について調べて見るのは、有意義であると思う。

さて、一次元Ising modelでは、磁場Hの存在する場合のFree energy Φは

$$\Phi = -kT \log T_r \exp\left(K \sum_j \delta_j \delta_{j+1} + H' \sum_j \delta_j\right),$$

ここで、$K=J/kT$, $H'=mH/kT=\mu_B gH/kT$. N(粒子数)$\to\infty$ の極限で、容易に、次式のように求まる。[5]

$$\Phi = -NkT \log \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{\mu}} \left\{ 1+\mu+\sqrt{(1-\mu)^2+4\mu z^2} \right\} \tag{3}$$

ここで、

$$z=\exp(-2J/kT), \quad \mu=\exp(-2mH/kT).$$

又、磁化Mは

$$M = NkT \frac{\partial}{\partial H} \log Z = Nm\left[1-\frac{2\mu\Lambda_\mu}{\Lambda}\right] \tag{4}$$

ここで、

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left\{ (1+\mu)+\sqrt{(1-\mu)^2+4\mu z^2} \right\}$$

$$\Lambda_\mu = \frac{1}{2} + \frac{2z^2-(1-\mu)}{2\sqrt{(1-\mu)^2+4\mu z^2}} .$$

ΦもMも、磁場Hに関しては、$T=T_c(=0)$では、singularな関数である。しかし、Hを二つの式(3)と(4)から消去して、ΦをMの関数と見たとき、ΦがMのsingular な関数がどうかは、調べて見ないとわからない。即ち、ΦをMの級数で、展開できるかどうか調べて見ることは意義がある。それには形式的に展開した表式(1)の係数を調べてみればよい。

ここで問題にしたいのは、全てのorder の cumulant $<S^{2n}>_c$ $(n=1, 2, \cdots)$ の singularity である。それを求めるには、(3)式を形式的にHで展開して、その展開係数を調べればよい。けれども、この方法は、原理的に容易だが、実際の計算は、面倒で面白くない。しかも、singularity の様子を一般的に知る上でも、見通しが良くない。そこで、一般に、スピン系の localized model に於いて、correlation function 等を計算する最も易しい instructive な例として、直接 diagram を用いて、求めてみる。

(i) 二体の cumulant $<S^2>_c$ の計算。

$$<S^2>_c=<S^2>-<S>^2=<S^2>=\sum_{ij}<\delta_i\delta_j>$$

ここで、一般に、 $$<A>=\frac{T_rAe^{-\beta\mathcal{H}_0}}{Tre^{-\beta\mathcal{H}_0}}\text{。}$$

$$\mathcal{H}_0=-J\sum_{j=1}^{N}\delta_j\delta_{j+1}\text{。}\quad(\delta_{N+1}\equiv\delta_1)$$

$$e^{-\beta\mathcal{H}_0}=(\cosh K)^N\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1}), \tag{4}$$

$$a=\tanh K\text{。}$$

故に

$$T_re^{-\beta\mathcal{H}_0}=(\cosh K)^N\{T_rI+a^NT_r(\delta_1\delta_2)\cdots(\delta_N,\delta_1)\}$$

$$=2^N(\cosh K)^N(1+a^N)$$

依つて

$$<S^2>_c=T_r(\sum_i\sum_{l=0}^{N-1}\delta_i\delta_{i+l})\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1}))\Big/T_r\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1})$$

$$=N\,T_r\Big(\sum_{\iota=0}^{N-1}\delta_1\delta_{1+\iota}\Big)\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1})\Big/2^N(1+a^N).$$

そこで、$T_r(\delta_1\delta_2)\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1})$ を調べると、下の二つの diagram だけが寄与する。

即ち

$$T_r(\delta_1\delta_2)\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1})$$

$$=T_r(\delta_1\delta_2)(a\delta_1\delta_2)+T_r(\delta_1\delta_2)(a\delta_2\delta_3\cdots a\delta_N\delta_1)$$

$$=2^N(a+a^{N-1}).$$

$$\therefore\quad \langle\delta_1\delta_2\rangle=\frac{a+a^{N-1}}{1+a^N}.$$

同様に、$\langle\delta_1\delta_3\rangle$ については

$$T_r(\delta_1\delta_3)\prod_j(1+a\delta_j\delta_{j+1})$$

$$=T_r(\delta_1\delta_3)(a\delta_1\delta_2\cdot a\delta_2\delta_3)$$

$$+T_r(\delta_1\delta_3)(a\delta_3\delta_4\cdot a\delta_4\delta_5\cdot\cdots\cdot a\delta_N\delta_1)$$

$$=2^N(a^2+a^{N-2})$$

同様にして、一般に、

$$\langle\delta_1\delta_{1+\iota}\rangle=\frac{a^\iota+a^{N-\iota}}{1+a^N}.$$

故に

$$<S^2>_c = N \sum_{\iota=0}^{N-1} <\delta_1 \delta_{1+\iota}>$$

$$\therefore \quad \frac{<S^2>_c}{N} = \frac{1+a}{1+a^N} \cdot \sum_{\iota=0}^{N-1} a^\iota = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1-a^N}{1+a^N} \tag{6}$$

$$\therefore \quad \lim_{N\to\infty} \frac{<S^2>_c}{N} = \frac{1+a}{1-a} = e^{2K} \tag{7}$$

故に、$T \to T_c\,(=0)$ で $<S^2>_c$ は激しく発散する。帯磁率 χ は

$$\chi = \frac{(\mu_B g)^2}{kT} \cdot <S^2>_c = \frac{N(\mu_B g)^2}{kT} \cdot \exp\left(\frac{2J}{kT}\right) \tag{8}$$

これは、勿論(4)から、得られているものと、一致する。

(ii) 四体の cumulant

$$<S^4>_c = <S^4> - 3<S^2>^2$$

ここで

$$<S^4> = 0(N) + 0(N^2)\,。$$

order (N^2) の項は、$3<S^2>^2$ と cancel して、$<S^4>_c$ は N の order となる。即ち、$<S^4>$ の中で、N の order の寄与をする項のみ集めればよろしい。[6)]

$$<S^4> = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_\iota <\delta_i \delta_j \delta_k \delta_\iota> = \frac{T_r (\Sigma \delta_j) \prod_j (1+a\delta_j \delta_{j+1})}{T_r \prod_j (1+a\delta_j \delta_{j+1})}$$

以下で便宜上、次の記号を用いることにする。

$$\ll A \gg = T_r A \prod_j (1+a\delta_j \delta_{j+1})$$

$$\therefore \quad \ll S^4 \gg = \sum_{i,j,k,\iota} \ll \delta_i \delta_j \delta_k \delta_\iota \gg / \ll 1 \gg \tag{9}$$

$$= N \sum_{i,j,k} \ll \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \gg / \ll 1 \gg \tag{9'}$$

そこで、$\ll \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \gg$ を計算するには、i, j, k の相対的な関係によつて、

鈴木増雄

次のようにいろいろな場合を考えねばならない。

1) $\ll \delta_1^4 \gg = \ll 1 \gg$ … 1通り。

2) 1 i $\ll \delta_1^3 \delta_i \gg = \ll \delta_1 \delta_i \gg$ … 3通り。

3) 1 i $\ll \delta_1 \delta_i^3 \gg = \ll \delta_1 \delta_i \gg$ … 1通り。

4) 1 i $\ll \delta_1^2 \delta_i^2 \gg = \ll 1 \gg$ … $3(N-1)$ 通り。
$(i=2,3,\cdots N)$

5) 1 i j=k $\ll \delta_1 \delta_i \delta_k^2 \gg = \ll \delta_1 \delta_i \gg$ … $3(N-2)$ 通り。

6) 1 i j $\ll \delta_1^2 \delta_i \delta_j \gg = \ll \delta_i \delta_j \gg$ … 6通り。
$(1 < i < j)$

$= \ll \delta_i \delta_j \gg$ … 3通り。
$(1 < i, j)$

$\Rightarrow (N-2) \ll \delta_1 \delta_i \gg$ … 3通り。
$(i=2,3,\cdots N)$

7) 1 i j k $\ll \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \gg$ … 6通り。
$(1 < i < j < k \leqq N)$

以上合計すると、

$$\ll S^4 \gg / N = \frac{1}{\ll 1 \gg} \Big[\sum_{i=2}^{N} \ll \delta_1 \delta_i \gg \{4 + 6(N-2)\} +$$

$$+ \ll 1 \gg + 3(N-1) \ll 1 \gg + 6 \sum_{1<i<j<k\leqq N} \ll \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \gg \Big]$$

$$= \sum_{i=2}^{N} < \delta_1 \delta_i > (6N-8) + (3N-2)$$

$$+6 \sum_{1<i<j<k\leq N} \langle \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \rangle$$

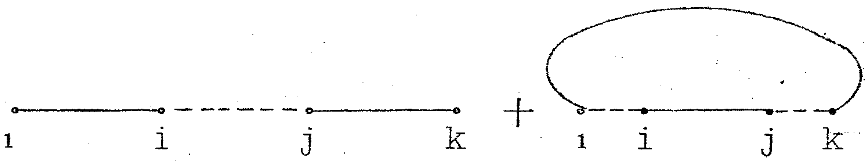
ここで、

$$\sum_{i=2}^{N-1} \langle \delta_1 \delta_j \rangle = \sum_{\ell=1}^{N-1} (a^{\ell} + a^{N-\ell})$$

$$= \frac{2a}{1-a} + \frac{-2a^N}{1-a}$$

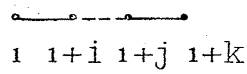
$$\Rightarrow \frac{2a}{1-a} \quad (N \to \infty)$$

又、$\langle \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \rangle$には、次の二つの graph が対応する。



しかし、二つの graph は、i, j, k について和をとつた後には、全く同じ寄与をする。

$$\sum_{1<i<j<k\leq N} \langle \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \rangle = 2 \sum_{1\leq i<j<k\leq N-1} \langle \delta_1 \delta_{1+i} \delta_{j+1} \delta_{k+1} \rangle \ ($$



$)$

$$= 2 \sum_{1\leq i<j<k\leq N-1} a^{i-j+k} = 2 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\sum_{1\leq i<j<k} a^{i-j} \right) a^k$$

ここで、

$$\sum_{1\leq i<j<k} a^{i-j} = \left(\frac{1}{a}\right)^{k-2} \sum_{\ell=1}^{k-2} \ell a^{\ell-1}$$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)^{k-2} \times \frac{1+a^{k-2}-2a^{k-1}-ka^{k-2}(1-a)}{(1-a)^2}$$

$$\therefore \sum_{1<i<j<k\leq N} \langle \delta_1 \delta_i \delta_j \delta_k \rangle = 2 \sum_{k=3}^{N-1} \frac{a^2}{(1-a)^2} - \frac{2a^2}{(1-a)^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{N-1} \{ a^k + k(1-a) a^k \} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{2Na^2}{(1-a)^2} - \frac{6a^2}{(1-a)^2} - \frac{2a(1+a^2)}{(1-a)^3}$$

$$+ \frac{2a^3}{(1-a)^2} \text{。} \quad (N\to\infty)$$

故に、結局求める四体の cumulant は

$$\frac{<S^4>_c}{N} = -\frac{12a(1+a^2)}{(1-a)^3} + \frac{12a^2(a-3)}{(1-a)^2}$$

$$-\frac{16}{1-a} + 14 \tag{10}$$

特に、$T_c(=0)$ の近傍では、$a\to1$、故に、

$$\frac{<S^4>_c}{N} \cong -\frac{24}{(1-a)^3} \cong -3(e^{2k})^3 \tag{11}$$

以上の計算からもわかるように、highest order singularity のみを調べるには、次の項を計算すればよい。

$$\frac{<S^4>_c}{N} \cong 3!\left[\sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq N} <\delta_1\delta_i\delta_j\delta_k>\right] \quad (N\to\infty \text{で finite になる part})$$

$$=2\times3!\left[\sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq N} a^{i-1+k-j}\right] \quad (\;〃\;)$$

$$=2\times3!\,a\left[\sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq N} a^i\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^j\cdot a^k\right] \quad (\;〃\;)$$

(iii) 一般に $2n$ 体の cumulant は highest singularity に関しては、

$$\frac{<S^{2n}>_c}{N} \cong (2n-1)!\times2a\left[\sum_{1\leq k_1\leq k_2\cdots\leq k_{2n-1}} a^{k_1}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^{k_2}\cdot a^{k_3}\right\}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdot\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^{k_{2n-2}}\cdot a^{k_{2n-1}}\right\}\right] \quad (N\to\infty \text{で finite になる part})$$

$$\tag{12}$$

一般にこの singularity の様子を調べてみよう。上式の括弧の中を $f_n(a, k_{2n-1})$ とおくと、次の漸化式が成り立つ。

$$f_n(a,m) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} a^{l-k} \cdot f_{n-1}(a,k) \tag{13}$$

$$f_1(a,k) = \frac{a}{1-a} \cdot (1-a^k) \tag{14}$$

便宜上、次の operator を導入しよう。

$$\mathscr{L} \cdot f(a,k) \equiv \sum_{l=1}^{k} \sum_{k=1}^{l} a^{l-k} f(a,k) \tag{15}$$

即ち、

$$f_n(a,k) = \mathscr{L} \cdot f_{n-1}(a,k)$$

$$= \cdots\cdots = \mathscr{L}^{n-1} f_1(a,k)$$

次に、一般項 $f_n(a,m)$ を見つけるのに必要な $\mathscr{L}$ に関する公式を作っておこう。証明を略して結果のみを書くことにする。

〔公式 1〕
$$\mathscr{L}(1-a^k) = \frac{-2a}{(1-a)^2}(1-a^k) + \frac{k(1+a^{k+1})}{1-a} \tag{16}$$

〔公式 2〕
$$\mathscr{L}(k) = \frac{a^2(1-a^k)}{(1-a)^3} - \frac{ak}{(1-a)^2} + \frac{1}{1-a}\,\frac{k(k+1)}{2} \tag{17}$$

〔公式 3〕
$$\mathscr{L}(ka^k) = \frac{a(1-a^k)}{(1-a)^3} - \frac{k(3-a)a^{k+1}}{2(1-a)^2} - \frac{k^2 a^{k+1}}{2(1-a)} \tag{18}$$

〔公式 4〕
$$\mathscr{L}(k^2) = -\frac{a^2(1+a)}{(1-a)^4}(1-a^k) + \frac{a(1+a)}{(1-a)^3} \cdot k - \frac{a}{(1-a)^2} \cdot k(k+1) + \frac{1}{(1-a)} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{19}$$

〔公式 5〕（公式 4 を一般化して）

$$\mathscr{L}(k^n) = A_{n0} \cdot \frac{1-a^k}{(1-a)^{n+2}} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{A_{np} \cdot k^p}{(1-a)^{n-p+2}} \tag{20}$$

〔公式 6〕（公式 3 を一般化して）

$$\mathscr{L}(k^n a^k)=B_{no}\cdot\frac{1-a^k}{(1-a)^{n+2}}+\sum_{p=1}^{n+1}B_{np}\cdot\frac{k^{n-p+2}\cdot a^k}{(1-a)^p} \tag{21}$$

ここに、A_{np}, B_{np} は a の多項式。

以上の項式を用いると、数学的帰納法によつて、一般式 $f_n(a,N)$ の形が次のようになることが証明される。

$$f_n(a,N)=C_{no}\frac{1-a^N}{(1-a)^{2n-1}}+\sum_{p=1}^{n-1}C_{np}\frac{N^p}{(1-a)^{2n-1-p}}$$
$$+\sum_{p=1}^{n-1}D_{np}\cdot\frac{N^p\cdot a^N}{(1-a)^{2n-p-1}} \tag{22}$$

ここに、C_{np}, D_{np} は a の多項式である。依つて、$\langle S^{2n}\rangle_c$ に寄与する部分、即ち、$f_n(a,N)$ の中で、$N\to\infty$ に於いて、finite になる部分は、

$$C_{no}(a)\cdot\frac{1}{(1-a)^{2n-1}}$$

である。故に、

$$\frac{\langle S^{2n}\rangle_c}{N}\cong 2a\cdot(2n-1)!\cdot C_{no}(a)\times\frac{1}{(1-a)^{2n-1}}$$
$$\cong\frac{C_n}{(1-a)^{2n-1}} \tag{23}$$

ここに、

$$C_n=2(2n-1)!\,C_{no}(1)$$

更に、$a=\tanh k=\tanh(J/kT)$ より、

$$\frac{\langle S^{2n}\rangle_c}{N}\cong\frac{C_n}{2^{2n-1}}\cdot(e^{2K})^{2n-1} \tag{24}$$

結局、数 factor を別にすると、highest order singularity に関しては、

$$\boxed{\langle S^{2n}\rangle_c/N\cong(e^{2K})^{2n-1}} \tag{25}$$

となる。

さて、以上のことから、全ての cumulant は $T_C(=0)$ で、発散している。しかも、higher order の cumulantになるにつれ、益々激しい singularity を持つている。又、これらの発散は、単なる統計の factor $1/kT$ に依るものではなく、粒子数 $N\to\infty$にしたときの cooperativeな結果として、現われているのである。例えば、2体の cumulant $<S^2>/N$ について、見るならば、(6)より、

$$\frac{<S^2>}{N}(T=T_C=0)=\lim_{a\to 1}\frac{1+a}{1-a}\,\frac{1-a^N}{1+a^N}=N$$

$$\therefore \quad \frac{<S^2>}{N}(T=0)=N \ (\text{finite}) \tag{26}$$

$N\to\infty$にして、始めて、$<S^2>/N$ は N の order で発散する。この結果は二次元 Ising model の比熱の発散の仕方が、

$$C_V/N \propto \log N \quad (\text{at } T_C)$$

であること[5)]と比較すると面白い。

以上で、全ての cumulant の highest order singularity がわかつたから、前に求めた公式(2)によつて、Free energy の展開係数の $T_C(=0)$ に於ける singularity の様子を調べることができる。数 factor は別にして、

$$A=\frac{kT}{2}\frac{1}{<S^2>_c}\cong kT\cdot e^{-2K}\to 0\ (T\to T_C\equiv 0)$$

$$B\cong\frac{kT<S^4>_c}{<S^2>_c^4}\cong kT\,e^{-2K}\to 0$$

同様にして、公式(2)より

$$C\cong D\cong\cdots\cong kT\,e^{-2K}\to 0\ (\text{at } T_C)$$

即ち、一次元 Ising model では、全ての係数 A , B , C , D , … が T_C で零になる。依つて T_C の近くでは Free energy は M に関して、$M=0$ のまわりに展開出来、しかも絶対収束する。全ての係数が零になるのは、恐

らく一次元の特殊性に依るのであろう。二次元、三次元のモデルでは、途中までの係数が T_C で0になり、その後に、0にならない term も現われると期待される。それをきちんと証明するには、公式(2)から各 cumulant の相対的な singularity の order を計算しなければならない。

そこで、上の議論をもとに、次のような現象論を立てる。[1] Φ の展開式の中で $A_{2m}M^{2m}$ の項が寄与して、それより、前の係数は T_C で θ になり、しかも、higher order とする。そうすると、結果的には、T_C のごく近くでは、

$$\Phi = \Phi_0 + AM^2 + A_{2m}M^{2m} - HM \tag{27}$$

としてよい。更に、T_C 以下でも A, A_{2m} の singularity の order は、上側と同じであるとすれば、自発磁化 $M_S \propto t^{\beta}$, $\chi^{-1} \propto t^{\gamma}$, 比熱 $C \propto t^{-\alpha}$, $M(T_C) \propto H^{1/\delta}$, $t = (T_C - T)$ として $(T \leqq T_C)$

$$\gamma = \beta(2m-2) \tag{28}$$

$$\delta = 2m-1 \tag{29}$$

が示せる。更に、Fisher の関係 $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ を組み合わせると、次のように実験や Padé の結果をうまく説明出来る。

表 I

model		m(model)	α	β	γ	δ
分子場		2	0	$1/2$	1	3
イジング	2d	8	0 ／ 0 (Onsager)	$\frac{1}{8}$ (仮) ／ $\frac{1}{8}$ (Yang)	$\frac{7}{4}$ ／ $\approx\frac{7}{4}$	15 ／ 15.00±0.08 [7]
	3d	3	$\frac{1}{8}$ ／ $0 \leqq \alpha \lesssim \frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$ ／ $\approx\frac{5}{16}$	$\frac{5}{4}$ (仮) ／ $\approx\frac{5}{4}$	5 ／ 5.20±0.15 [7]
Heisenberg 3d		3	0	$\frac{1}{3}$ ／ $\approx\frac{1}{3}$?	$\frac{4}{3}$ (仮) ／ $\approx\frac{4}{3}$	5
実 験				0.33 (EuS)	1.33 (Ni)	4.2 (Ni)

d ⇒ dimension

上　段 ⇒ present theory
下　段 ⇒ Padé 近似又は厳密解
（仮）　⇒ α, β, γ の中一つを仮定した

最後に、御指導下さつた久保先生に、感謝致します。また有益な discussion をして下さつた久保研の皆さんに感謝致します。

reference

1) 鈴木増雄；物性研究 3，('65) 317
1965年春の分科会予稿集（物性基礎）
2) 久保亮五；物性論研究 1，('43) 1
3) H. Takahashi; Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24 ('42) 60
4) Van Hove; Physica 16, ('50) 137
5) C. Domb; Advances in Physics 9, ('60) 149
6) R. Kubo; J. Phys. Soc. Japan 17, ('62) 1100
7) D. S. Gaunt, M. E. Fisher, M. F. Sykes, J. W. Essam; Phys. Lett. 13, ('64) 713