Title	不安定プラズマの輸送方程式 : Part VII 量子論的拡張
Author(s)	松平, 升
Citation	物性研究 (1965), 4(5): 403-414
Issue Date	1965-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/85783
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

不安定プラズマの輸送方程式

松　平　升（ブリテイッシユ・コロンビア大）

（6月29日 受理）

Part VII　量子論的拡張

§1. 序

この連載のPart I ～ VI[1] において我々は、古典的電子プラズマについてB-B-G-K-Y方程式を第2段階で打ち切つて、それをとくことにより、weakly unstable なプラズマの輸送方程式を得、更にこの方程式を書き変えると、Pines-Schrieffer[2] の電子－プラズモン系に対する連立方程式の古典極限に形式的に一致することを見た。

安定プラズマに対するBalescu-Lenard-Guernsey 方程式は、Balescu[3] と Guernsey[4] によつて量子論の場合に拡張された。彼等はsingular integral equation の方法を用いているが、より初等的な方法はDupree[5] による、線型Vlasov 方程式の解を用いる方法で、たとえばRon[6] によつて電子－フォノン系のkinetic equation の導出に使用された。我々のPart III における方法もそれである。

一方、Pines-Schrieffer〔以下P－Sと略す〕の方程式は電子によるプラズモン（又はフォノン）の吸収－放出過程からgolden rule で導かれる分布関数の変化でもともと量子論的な方程式である。古典的極限（$\hbar \to 0$）において種々の方程式と形式的一致するが、両者が一致する必然性は自明ではない。〔我々はPart V (unpublished) で電子－プラズモン系→Part III の方程式の導出を行いたいと考えていたが、未だ成功していない〕

ここでは、Guerhsey-Ron の方法を用いて電子－イオン系の量子的B-B-G-K-Y方程式をつくり、近似的にとくことによつて系が不安定な場合のkinetic equation を導き、更にその書き変えは、P－Sの量子的方程式と完全に一致することを示す。§2－3はGuernsey[4] Wu[5]　§4－5 は Part III, VI[1] の直接的の拡張である。

§2. B-B-G-K-Y方程式

電子－イオン系を考えよう。両方ともフエルミ粒子と仮定し、再度量子化の演算子を$\Psi_\sigma(r)$ と書く。σ はスピンと粒子の種類をあらわす。ハミルトニアンは

$$H = \sum_{\sigma_j} \frac{-\hbar^2}{2m_j} \int d\mathbf{r}\, \Psi^+_{\sigma_j}(\mathbf{r})\, \nabla^2\, \Psi_{\sigma_j}(\mathbf{r})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i \sigma_j} \int d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\, \phi_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \Psi^+_\sigma(\mathbf{r})\, \Psi'^+_\sigma(\mathbf{r}')\, \Psi'_\sigma(\mathbf{r}')\, \Psi_\sigma(\mathbf{r}) \qquad (2.1)$$

$$\phi_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e_i e_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad ; \quad e_i = e_{\sigma_j}\ ,\quad m_j = m_{\sigma_j}$$

n－体の分布関数を

$$F_n(x_1 \cdots x_n) = \langle \Psi^+_{\sigma_1}(\mathbf{r}'_1, t) \cdots \Psi^+_{\sigma_n}(\mathbf{r}'_n, t)\, \Psi_{\sigma_n}(\mathbf{r}_n, t) \cdots \Psi_{\sigma_1}(\mathbf{r}_1, t) \rangle \qquad (2.2)$$

で定義する。 $x_j = (\,r_j\,,\, r'_j\,,\ \sigma_j\,)$

$$\langle A(t) \rangle \equiv \mathrm{Tr}\,[\rho(0)\, A(t)] = \mathrm{Tr}\,[\rho(t)\, A\,]$$

である。$\rho(t)$は系の密度行列でLionville 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \rho(t) = [\,H\,,\ \rho(t)\,] \qquad (2.3)$$

に従う。(2.3)から直ちに

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar}\, \mathrm{Tr}\, \rho(0)\, [\,A(t)\,,\ H\,]\,\}$$

となるから、これを (2.2)に適用して整理すると次の階級方程式が得られる。

$$[\frac{\partial}{\partial t} + T_n(x_1 \cdots x_n) - U_n(x_1 - x_n)]\, F_n(x_1 \cdots x_n)$$

$$= \int dx_{n+1}\, V_n(x_1 \cdots x_n\, ;\, x_{n+1})\, F_{n+1}(x_1 \cdots x_{n+1}) \qquad (2.4)$$

ただし $T_n = \sum_{j=1} T_j(x_i) = \sum_{j=1} \frac{\hbar}{2!\, m_i} (\nabla_i^2 - \nabla_i'^2)$

$$U_n = \frac{1}{i\hbar} \sum_{i>j}^{n} \{ \phi_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \phi_{ij}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \}$$

$$V_n = \frac{1}{i\hbar} \sum_{j=1}^{n} \{ \phi_{j,n+1}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{n+1}) - \phi_{j,n+1}(\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_{n+1}) \}$$

$$\int dx = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Guernsey[4)] に従つて、反対称化演算子

$$\gamma_n = \prod_{j=2}^{n} \{ 1 - \sum_{k=1}^{j-1} \delta_{\sigma_i \sigma_k} P_{j,k} \} \tag{2.5}$$

を導入して、分布関数を対称化する。

$$F_n(x_1 \cdots x_n) = \gamma_n f_n(x_1 \cdots x_n) \tag{2.6}$$

ただし $P_{j,k}$ は $r_j \leftrightarrow r_k$ の交換演算子である。

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \{ 1 - \sum_{j=1}^{n} \delta_{\sigma_j \sigma_{n+1}} P_{j,n+1} \}$$

なること、および γ_n が T_n, U_n, V_n と可換であることを使うと、(2.4)から f_n に対する方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + T_n \right) f_n = \int dx_{n+1} V_n f_{n+1} + \lambda \{ U_n f_n - \\ - \int dx_{n+1} V_n \sum_{j=1}^{n} \delta_{\sigma_j \sigma_{n+1}} P_{j,n+1} f_{n+1} \} \tag{2.7}$$

が得られる。(2.7)で我々は平均クーロンエネルギーが、平均運動エネルギーよりも小さいこと(プラズマ近似)を仮定してプラズマ・パラメーター λ を導入した。(2.7) で $\lambda = 0$ とおくと、この方程式の解は

$$f_n^{(0)}(x_1 \cdots x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_1^{(0)}(x_j)$$

であることがわかるから、一般に

$$f_n(x_1 \cdots x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_1(x_j) + \lambda g_n(x_1 \cdots x_n) + O(\lambda^2) \tag{2.8}$$

とおく。以下必要なのは、$n = 1$, $n = 2$ の場合だけであるから。

$$\mathscr{g}_3(x_1x_2x_3) = f_1(x_1)\mathscr{g}_2(x_2x_3) + (\text{cyclic}) + O(\lambda) \tag{2.9}$$

と書いて3体相関関数を無視すれば(2.7)は f_1 と $\mathscr{g}_2$ について閉じた方程式の体系

$$(\frac{\partial}{\partial t} + T_1) f_1(x_1) = \int dx_2 \{ W_{12}(1 - \lambda\,\delta_{\sigma_1\sigma_2} P_{12}) \times f_1(x_1) f_1(x_2) + \lambda W_{12}\mathscr{g}_2(x_1x_2)\} + O(\lambda^2) \tag{2.10}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + T_1 + T_2) g_2(x_1x_2) = W_{12} f_1(x_1) f_1(x_2) - \int dx_3 [W_{13}\delta_{\sigma_2\sigma_3} \times P_{23} + W_{23}\delta_{\sigma_1\sigma_3}P_{13}] f_1(x_1) f_1(x_2) f_1(x_3) + \int dx_3 \{ W_{13} \times g_2(x_2x_3) f_1(x_1) + W_{23} g_2(x_1x_3) f_1(x_2) + [W_{13} + W_{23}] \times g_2(x_1x_2) f_1(x_3)\} + O(\lambda) \tag{2.11}$$

$$W_{ij} = \frac{1}{i\hbar}[\phi_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \phi_{ij}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j)]$$

を得る。

§3. 均 一 系

特に系が homogeneous な場合に、Wigner の分布関数を導入して (2.10) (2.11) を書き変えると、古典的場合との対応がついて、Part III の方法をほとんどそのまま適用することが出来る。

$$f_1(x_i) \equiv f_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j) \equiv \sum_p f_j(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j)} \tag{3.1}$$

$$g_2(x_ix_j) \equiv g_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i, \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j, (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j)/2)$$

$$\equiv \sum_{pp'k} g_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{p}';\mathbf{k})\, e^{i[(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2})\mathbf{r}_i - (\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2})\mathbf{r}'_i + (\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}}{2})\mathbf{r}_j - (\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}}{2})\mathbf{r}'_j]} \tag{3.2}$$

(2.10), (2.11)に代入して、f(p), g(p, p'; k) の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1) = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_{\sigma_2} \sum_{p_2 k} \phi_{12}(k)(T_+^{(1)} - T_-^{(1)}) g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k}) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\,\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right] g_{12}(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{\sigma_3} \phi_{13}(k) \left[f_1(\mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}) - f_1(\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2})\right] \sum_{p_3} g_{23}(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 ; -\mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \sum_{\sigma_3} \phi_{23}(k) \left[f_2(\mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{k}}{2}) - f_2(\mathbf{p}_2 - \frac{\mathbf{k}}{2})\right] \sum_{p_3} g_{13}(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3 ; \mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \phi_{12}(k) \left[F_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) F_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{k}) - F_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}) F_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k})\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。ただし

$$T_\pm^{(1)} g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k}) = g_{12}(\mathbf{p}_1 \pm \frac{k}{2}, \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k})$$

$$\mathbf{v}_j = \frac{\hbar}{m_j} \mathbf{p}_j ,$$

$$F_j(\mathbf{p}_j \pm \mathbf{k}) = f_j(\mathbf{p}_j \pm \frac{k}{2}) \left[1 - f_j(\mathbf{p}_j \mp \frac{k}{2}) \right]$$

である。

(3.4)を Dupree の方法でとくために、これを

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + H_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}) + H_2(\mathbf{p}_2 ; -\mathbf{k})\right] g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k}) = R_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k}) \tag{3.5}$$

$$H_j(p_i, k) = i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i - \frac{i}{\hbar} \phi_j(k) \left[f_i(p_i + \frac{k}{2}) - f_j(p_i - \frac{k}{2})\right] \sum_{\sigma_j} e_j \sum_{p_j} \tag{3.6}$$

$$\phi_{ij}(k) = e_i \phi_j(k) = e_i e_j \phi(k)$$

と書き変える。R_{12} は(3.4)の最終項。(3.5)において、Part III と同様に $H_j(p_i, \pm k)$ の時間変化を無視すると、形式解は

$$g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}, t) = e^{-i(H_1+H_2)t} g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}, 0)$$
$$+ \int_0^t d\tau\, e^{-i(H_1+H_2)\tau} R_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}, t-\tau) \tag{3.7}$$

と書ける。(3.7) 中の演算子を

$$e^{-i(H_1+H_2)t} = P_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{k}, t)$$
$$= P_1(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1'; k, t)\, P_2(\mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_2'; -\mathbf{k}, t) \tag{3.8}$$

と書くと、(3.3), (3.7) は結局

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1) = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_k \phi_1(k)\, (T_+ - T_-)\, G_1(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}, t) \tag{3.9}$$

$$G_1(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}, t) = Q_{12}(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{k}, t)\, g_{12}(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{k}, 0)$$
$$+ \int_0^t d\tau\, Q_{12}(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{k}, \tau)\, R_{12}(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{k}, t-\tau) \tag{3.10}$$

$$Q_{12}(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{k}, t) = P_1(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1'; \mathbf{k}, t) \times$$
$$\times \sum_{\sigma_2} e_2 \sum_{p_2} P_2(\mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_2'; -\mathbf{k}, t) \tag{3.11}$$

と書かれて、我々の問題は Q_{12} を求めることに帰着する。Q_{12} を求めるために

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + H_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1)\right] f_1(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}, t) = 0$$

なる方程式を考えると、これは線型Vlasov 方程式にほかならない。形式解

$$f_1(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}, t) = P_1(p_1 | \mathbf{p}_1'; \mathbf{k}, t)\, f(\mathbf{p}_1'; \mathbf{k}, 0)$$

とLandau の解をくらべて

$$P_1(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1'; k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c ds \frac{e^{st}}{s + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1'} \Big\{ \sum_{p_1'} \delta_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1'} -$$
$$- \frac{D_1(p_1, k)}{\varepsilon(\mathbf{k}, s)} \sum_{\sigma_1} e_1 \sum_{p_1'} \frac{1}{s + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1'} \Big\} \tag{3.12}$$

$$D_1(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar}\phi_1(k)\left[f_1(\mathbf{p}_1 + \frac{k}{2}) - f_1(\mathbf{p}_1 - \frac{k}{2})\right]$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, s) = 1 + \sum_{\sigma_1} e_1 \sum_{\mathbf{p}_1} \frac{D_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k})}{s + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1} \tag{3.13}$$

となる。$\varepsilon(\mathbf{k}, s)$は系のdielectric constantで、$\varepsilon(\mathbf{k}, s)=0$が集団運動（プラズマ振動，フオノン振動）をきめることは周知の通りである。

(3.12)を(3.11)に代入し、(3.10)のラプラス変換を行つて、

$$\widetilde{G}_1(\mathbf{p}_1 ; \mathbf{k} ; s) = \widetilde{Q}_{12}(\mathbf{p}_1 \,|\, \mathbf{p}_2' \mathbf{p}_2' ; \mathbf{k}, s)\, F_{12}(p_1', p_2' ; k, s) \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{12}(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2' ; k, s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1} ds_1 \int_{c_2} ds_2 \;\times \\ &\times \frac{1}{s - s_1 - s_2}\, \frac{1}{s_1 + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1}\left\{ \sum_{p_1'} \delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1'} - \frac{D_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}, s_1)} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{p_1'} \sum_{\sigma_1} \frac{e_1}{s_1 + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1'} \right\} \frac{1}{\varepsilon(-\mathbf{k}, s_2)} \sum_{p_2'} \sum_{\sigma_2} \frac{e_2}{s_2 - i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2'} \\ &\equiv \widetilde{Q}_{12}^{\mathrm{I}} + \widetilde{Q}_{12}^{\mathrm{II}} \quad .\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$F_{12}(p_1 p_2 ; k, s) = \frac{R_{12}(p_1, p_2 ; k)}{s} + g_{12}(p_1, p_2 ; k, 0) \tag{3.16}$$

となる。(3.15)で$\widetilde{Q}_{12}^{\mathrm{I}}$については$s_1$と$s_2$。$\widetilde{Q}_{12}^{\mathrm{II}}$については$s_1$の積分は直ちに実行出来て、次の結果を得る。

$$\widetilde{Q}_{12}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\varepsilon(-\mathbf{k}, s + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)} \sum_{p_1'} \delta_{p_1 p_1'} \sum_{p_2'} \sum_{\sigma_2} \frac{e_2}{s + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2')} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{12}^{\mathrm{II}} &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{ds_1}{s_1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1} \frac{D_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}, s_1)} \sum_{p_1'} \sum_{\sigma_1} \frac{e_1}{s_1 + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1'} \;\times \\ &\times \frac{1}{\varepsilon(-\mathbf{k}, s - s_1)} \sum_{p_2'} \sum_{\sigma_2} \frac{e_{12}}{s - s_1 - i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2'}\end{aligned} \tag{3.18}$$

ここから先の計算は、プラズマ極；

$$\varepsilon(k, s_k) = 0 \qquad s_k = \delta_k - i\,\omega_k \tag{3.19}$$

の位置が問題になる。系が安定の場合（$\gamma_k < 0$）、量子論的Balescu-Lenard-Guernsey 方程式[4]を得ることは直ちに示すことが出来る。

§ 4. Kinetic Equation

以下、簡単のために、(3.19)をみたし，$\gamma_k > 0$ なる s_k はただ一つで、それ以外の pole は s－平面の虚軸から十分遠くにあると仮定しよう。ラプラス逆変換

$$G_1(\mathbf{p}_1 ; \mathbf{k}\, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds\, e^{st}\, \tilde{Q}_{12} F_{12} \tag{4.1}$$

に (3.16)～(3.18)を代入すると、この方程式は、Part III で扱われたものとそつくり同じ形をしているので、Part III の方法がそのまま借用出来る。

$s \sim s_k$ で

$$\varepsilon(\mathbf{k}, s) = (s - s_k)\, \varepsilon'(\mathbf{k}) \tag{4.2}$$

と書き、(4.1)の積分で、$s = 0$ の極とプラズマ極 (3.19) のみをひろい、更に運動量分布関数 $f(\mathbf{p}, t)$ をSchwartz の意味の分布関数と考えて、$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1 = -s_k$，$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1 = s_k^*$ の項をひろうと、次の結果が得られる。

$$G_1(\mathbf{p}_1 ; \mathbf{k}, t) = G_1^{\mathrm{I}} + G_1^{\mathrm{II}} \tag{4.3}$$

$$G_1^{\mathrm{I}} = \frac{e^{(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)t} - 1}{(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\, \varepsilon'(-\mathbf{k})} \sum_{\sigma_2} e_2 \sum_{p_2} \frac{R_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ; \mathbf{k})}{s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2} \tag{4.4}$$

$$G_1^{\mathrm{II}} = D_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}) \left\{ \frac{e^{(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)t} - 1}{(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\, \varepsilon(\mathbf{k} - s_k^*)\, \varepsilon'(-k)} \hat{R}_{12}(-s_k^*, s_k^* ; \mathbf{k}) + \frac{e^{-(s_k + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)t} - 1}{(s_k + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\, |\varepsilon'(\mathbf{k})|^2}\, e^{2\gamma_k t} \hat{F}_{12}(s_k, s_k^* ; \mathbf{k}. 2\gamma_k) \right\} \tag{4.5}$$

ただし

$$\hat{f}(s_1, s_2) \equiv \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{p_1}^{(-)} \sum_{p_2}^{(+)} \frac{e_1 e_2\, f_{12}(p_1, p_2)}{(s_1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)(s_2 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)} \tag{4.6}$$

$\sum_p^{(\mp)} \frac{f(p)}{s \pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}$ は $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\mathbf{p}$ の $\mathbf{k}$－方向の積分が極 $v = \pm \frac{is}{k}$ の下(上)を通る、と

いう意味である。F_{12} , R_{12} の具体的な表式を代入すると

$$\hat{R}_{12}(-s_k^* s_k^* ; k) = \bar{F}(s_k^* - \mathbf{k}) + \varepsilon(\mathbf{k} - s_k^*) F_-(s_k^* - \mathbf{k}) \tag{4.7}$$

$$\hat{F}_{12}(s_k s_k^* ; \mathbf{k}, 2r_k) = \frac{1}{2r_k}[F_+(-s_k, -\mathbf{k}) - F_-(s_k^*, -\mathbf{k})] + \hat{g}(s_k, s_k^* ; \mathbf{k}, 0) \tag{4.8}$$

ここで

$$F_\pm(s, \mathbf{k}) \equiv \sum_{\sigma_1} e_1^2 \sum_{p_1}^{(\mp)} \frac{F_1(\mathbf{p}_1 \mathbf{k})}{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1 - s} .$$

$$\bar{F}(s, k) \equiv F_+(s, k) - F_-(s, k)$$

と簡単化されて、結局

$$G_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}; t) = \frac{e^{(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t} - 1}{(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\varepsilon'(-\mathbf{k})}[e_1 F_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) - \frac{D_1(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)}{\varepsilon(\mathbf{k} - s_k^*)} \times \bar{F}(s_k^* - k)] + \frac{e^{-(s_k + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)t} - 1}{s_k + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} \frac{e^{2r_k t}}{|\varepsilon'(\mathbf{k})|^2} D_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) \times \{\frac{1}{2r_k}[F_+(-s_k, -\mathbf{k}) - F_-(s_k^* - k)] + \hat{g}(s_k, s_k^*; k, o)\} \tag{4.9}$$

となる。特にweak instability の極限

$$r_k \ll \omega_k$$

の場合には、(4.9)は更に簡単化されて最終的に

$$\frac{\partial f_1(p_1)}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \sum_k \phi_1(k)(T_+ - T_-) \frac{\pi}{i\,\varepsilon'(-\mathbf{k})} \delta(w_k - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1) \times \{ e_1 F_1(p_1, -\mathbf{k}) + \frac{D_1(p_1, k)}{\varepsilon'(\mathbf{k})}[\frac{1 - e^{2r_k t}}{2 r_k} \bar{F}(s_k) - e^{2r_k t} \hat{g}(s_k, s_k^* ; \mathbf{k}, 0)] \} \tag{4.10}$$

を得ることは、Part III と同じである。

§ 5. P−S Equation

最後に，Part VI と全く同じ手続きでP−Sの方程式が得られることを示そう。

$$\hat{g}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}, t) = \sum_{\sigma_1\sigma_2} e_1 e_2 \sum_{p_1}^{(-)} \sum_{p_2}^{(+)} \frac{g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}, t)}{(s_k + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)(s_k^* - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)} \qquad (5.1)$$

を計算する。(3.8)および(3.12)を使つて少し計算すると

$$\hat{g}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}, t) = e^{2\gamma_k t}\hat{F}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}\ 2\gamma_k) - \frac{1}{2\gamma_k}\hat{R}_{12}(s_k, s_k^*; \mathbf{k})$$

となり (4.8) を代入すれば

$$\hat{g}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}, t) = \frac{e^{2\gamma_k t} - 1}{2\gamma_k}\bar{F}(s_k) + + e^{2\gamma_k t}\hat{g}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}, 0) \qquad (5.2)$$

が得られる。(5.2)は(4.10)の〔……〕にほかならない。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\hbar}\sum_k \phi_1(k)(T_+ - T_-)\frac{\pi}{i\,\varepsilon'_+(-\mathbf{k})}\delta(w_k - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1) \times \{ e_1 F_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) - \frac{D_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1)}{\varepsilon'(k)}\hat{g}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}, t)\} \qquad (5.3)$$

一方，(5 2) を微分して

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{g}(s_k, s_k^*; \mathbf{k}, t) = 2\gamma_k \hat{g}(s_k, s_k^*; k, t) + \bar{F}(s_k) \qquad (5.4)$$

(5.3)，(5.4)は初期相関をあらわには含まねい。それ自身閉じた方程式の組みである。ここで

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{2\pi\omega_k^2}{k^2}\hat{g}(s_k s_k^*; \mathbf{k}, t) = \hbar\,\omega_k N_k(t) \qquad (5.5)$$

とおけば、近似式

(i) プラズマ・モード； $\varepsilon'(\mathbf{k}) \doteqdot \dfrac{2i}{\omega_k}$

(ii) フォノン・モード； $\varepsilon'(\mathbf{k}) \doteqdot \dfrac{2i}{\omega_k}\varepsilon_0(\mathbf{k})$

を使つて、(5.3)，(5.4)はP－Sの(i)電子ガス (ii)電子－フォノン系の量子論的表式に正確に一致し，$N_k(t)$はそれぞれプラズモン，フォノンの分布関数に対応する。(5.5)が場のエネルギーをあたえることは（5.1）を近似して

$$\hat{g}(s_k, s_k^*; k, t) \doteqdot \sum_{\sigma_1\sigma_2} \frac{e_1 k_2}{\omega_k^2} \sum_{p_1 p_2} g_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}, t)$$
$$= \frac{1}{\omega_k^2} \langle \rho(k, t)\, \rho(-k, t) \rangle$$

ただし、$\rho(k)$は荷電密度、となることから，Poisson 方程式

$$i\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}(k) = 4\pi\rho(k)$$

を用いて

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)|^2 \rangle}{8\pi} \tag{5.6}$$

と示される。

§ 6. 結　論

このようにして我々は

(i) Part III，VI の方法は多成分，量子系の場合にもほとんどそのまま適用出来ることを示してkinetic equation を導き。

(ii) それはPines-Schriëffer の方程式と完全に等価（形式的に）であることを示した。

電子－イオン系では，電子温度≫イオン温度の場合、低周波のフォノン・モードが存在するが，イオンに対する電子のdrift velocity が音速をこえると系は不安定になる。不安定性の発生条件はIchimaru[7]によつてくわしく調べられているが，安定化のメカニズム、或は外電場によつてdrift が生じた場合の定常状態の研究は今後の問題である。

§3の方法の特徴は，初期条件$\rho(0)$は任意であつて、たとえば熱平衡からのずれが小さい、と云つた制限はないことである。本論ではその一つの応用例とじ

て不安定プラズマの輸送方程式を導いたのだが、この方法は、伝導率，ゆらぎに現われる correlation function の計算にも応用出来る筈で、熱平衡からずれた系についてこの計算を実行することは興味ある問題であろう。いずれ稿をあらためて発表したいと考えている。

文　　献

1) 松平，西川，大阪；物性研究 2 (1964) 50，133，　3 (1964) 94.
K. Nishikawa and Y. Osaka; PTP 33 (1965) 402.
2) D. Pines and J.R. Schrieffer; P. R. 125 (1962) 804.
3) R. Balescu; Phys . Flinds 4 (1961) 94.
4) R.L. Guernsey; P.R. 127 (1962) 1446.
5) T.H. Dupree; Phys. Fluids 4 (1961) 696.
C.H. Wu; J. Math, Phys. 5 (1964) 1701
6) A. Ron; ibid 4 (1963) 1182.
7) S. Ichimura; Annals. Phys. 20 (1962) 78.