乱れた弱電離プラズマの電気伝導の現象論

西　川　恭　治（京大理）

表記の問題を、Yoshikawa-Rose[1], Kadomtsev[2]らの考え方を若干一般化して論ずる。

運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Gamma}_\alpha+\frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha}\nabla n_\alpha+\boldsymbol{\Gamma}_\alpha\cdot\nabla\left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}_\alpha}{n_\alpha}\right)+\frac{\boldsymbol{\Gamma}_\alpha}{n_\alpha}\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_\alpha-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}[n_\alpha\mathbf{E}+\boldsymbol{\Gamma}_\alpha\times\mathbf{B}]=-\nu_\alpha\boldsymbol{\Gamma}_\alpha \quad (1)$$

ここに、suffix αは電子(e)又はイオン(i)を区別し、$\boldsymbol{\Gamma}$は粒子の流束、Tは温度、mは質量、nは密度、eは電荷、Eは電場、Bは磁場、νは中性粒子との衝突頻度を表わす。この式で、オ3、4項は慣性項を表わし、又、温度は一様とした。

今、"乱れ"として、波数K、振動数ω_Kで定まる弱い密度揺動（縦波とする）を考え、それが空間的に一様な外部からの振動電場$\mathbf{E}_0e^{i\omega_0t}$の下にある場合を考える。

$$n_\alpha=n_0+\Sigma_{K\neq0}\{n_\alpha^f(K)+n'_\alpha(K)e^{i\omega_0t}\}e^{i\omega_Kt}e^{iK\cdot r} \quad (2)$$

ここにprimeは外部電場に対する線型応答を表わし、superscript f は外部電場のない時の揺動を表わす。簡単のためイオンは一価とした。密度揺動に対応して、連続の式

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_\alpha=0 \quad (3)$$

及びPoissonの式

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\Sigma_\alpha e_\alpha n_\alpha \quad (4)$$

によつて流速及び電場も揺動を受ける。

$$\boldsymbol{\Gamma}_\alpha=\boldsymbol{\Gamma}'_\alpha e^{i\omega_0t}+\sum_{K\neq0}[\boldsymbol{\Gamma}_\alpha^f(K)+\boldsymbol{\Gamma}'_\alpha(K)e^{i\omega_0t}]e^{i\omega_Kt}e^{iK\cdot r} \quad (5)$$

Plasma

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\, e^{i\omega_0 t}+\sum_{\mathbf{K}\neq 0}\Big[\overbrace{\mathbf{E}^f(\mathbf{K})+e^{i\omega_0 t}}^{\mathbf{E}'(\mathbf{K})}\Big]e^{i\omega_{\mathbf{K}} t}\,e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \tag{6}$$

但し定常流は存在しないとした。今の近似の範囲内では、磁場Bは一様定常とする。

(2), (5), (6)を(1), (3), (4)と適用して、電流

$$\mathbf{J}=\Sigma_\alpha e_\alpha \Gamma'_\alpha \tag{7}$$

を計算し、電気伝導度 σ を $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}_0$ より求める。

簡単な計算から、まず

$$\Gamma'_\alpha=\frac{n_0 e_\alpha}{m_\alpha(i\omega_0+\nu_\alpha)}\,[\widetilde{\mathbf{E}}_0]^\alpha_{\omega_0} \tag{8}$$

が求まる。ここに $\widetilde{\mathbf{E}}_0$ は電流が感ずる effective な電場で、

$$\widetilde{\mathbf{E}}_0=\mathbf{E}_0-i\frac{4\pi e_\alpha}{n_0}\Sigma_{\mathbf{K}\neq 0}\frac{\mathbf{K}}{k^2}[n^f_\alpha(\mathbf{K})n'_\beta(-\mathbf{K})-n^f_\beta(\mathbf{K})n'_\alpha(-\mathbf{K})]\quad(\beta\neq\alpha) \tag{9}$$

で与えられる。又、$[\quad]^\alpha_\omega$ は、任意のベクトルAから

$$[\mathbf{A}]^\alpha_\omega\equiv\frac{1}{1+a^2_\alpha(\omega)}\{\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{B}a_\alpha(\omega)+\frac{\mathbf{BB}}{B^2}\cdot\mathbf{A}\,a^2_\alpha(\omega)\} \tag{10}$$

$$(a_\alpha(\omega)\equiv\Omega_\alpha/[i\omega+\nu_\alpha],\qquad \Omega_\alpha\equiv e_\alpha B/m_\alpha)$$

を作る演算を表わす。

まず $\mathbf{E}_0$ が $\mathbf{B}$ に平行な場合は

$$\Gamma'_\alpha=\frac{n_0 e_\alpha}{m_\alpha(i\omega_0+\nu_\alpha)}\widetilde{\mathbf{E}}_0$$

となり、且つ $\widetilde{\mathbf{E}}_0$ は $\mathbf{E}_0$ に平行となるから、乱れの存在は電流に小さな影響しか与えない。

これに対して $\mathbf{E}_0\perp\mathbf{B}$ では、$\mathbf{E}_0$ 方向の電流に乱れの影響が強く現われうることが吉川ら[1)]により指摘された。即ち、$\mathbf{E}_0$ をx方向、Bをz方向にとると、x方向の流束は

$$\Gamma'_{\alpha x}=\frac{ne_\alpha}{m_\alpha}\frac{i\omega_0+\nu_\alpha}{(i\omega_0+\nu_\alpha)^2+\Omega^2_\alpha}\{\widetilde{E}_{0x}+\widetilde{E}_{0y}\,a_\alpha(\omega_0)\} \tag{11}$$

となる。ここで右辺才二項は乱れによつて始めて現われる項で、強磁場（$|a_\alpha(\omega_0)|\gg 1$）では才一項より大きくなる可能性がある。以下この場合に話を限ろう。

吉川らは、$\omega_K=\omega_0=0$ とし、電子の流れΓ_eのみを考えて、もしも密度揺動$|n_e^f(K)|^2$ が磁場によらなければ、強磁場の極限で、乱れのないときの$J\propto \Omega_e^{-2}$ に対して、乱れがあれば$J\propto \Omega_e^{-1}$ となることを示した。これに対して Kadomtsev[2]は強磁場ではイオンの流れが無視できず、特に (11)式の$\widetilde{E}_{0y}$に比例する項の電流への影響は電子とイオンで互いに消し合うことを指摘した。しかしこれは強磁場の極限での話で、外部電場を充分早く振動させて（$\omega_0\gg\Omega_i$）イオンがついて行けなくすれば事情が変つて来る。

そこでこのような場合、乱れの効果が電流にどの程度現われるかを、(1),(2)(3)式に基いて評価してみた。問題は$\widetilde{E}_{0y}$，従つて$n_\alpha^f(K)$，$n_\alpha'(K)$を求めることである。

まず簡単な計算から次のような関係式が導かれる。

$$\eta_\alpha(K,\omega_K)n_\alpha^f(K)-n_\beta^f(K)=R_\alpha^f(K) \tag{12}$$

$$\eta_\alpha(K,\omega_K+\omega_0)n_\alpha'(K)-n_\beta'(K)=R_\alpha'(K)+\frac{n_\alpha^f(K)}{4\pi n_0 e_\alpha}\psi_\alpha(K,\omega_0) \tag{13}$$

但し

$$\eta_\alpha(K,\omega)=1+k^2\lambda_\alpha^2+\frac{i\omega(i\omega+\nu_\alpha)}{\omega_\alpha^2}\left[1+a_\alpha^2(\omega)\right]/\left[1+a_\alpha^2(\omega)k_z^2/k^2\right] \tag{14}$$

$$\omega_\alpha^2=\frac{4\pi n_0 e^2}{m_\alpha},\qquad \lambda_\alpha^2=\frac{\kappa T_\alpha}{4\pi n_0 e^2}$$

又、$\psi_\alpha(K,\omega)$は、E_0に比例するある複雑な関数、$R_\alpha(K)$は異る波数間の結合による項を表わす。(12)式で$R_e^f(K)=R_i^f(K)=0$とすれば分散式

$$\eta_e(K,\omega_K)\eta_i(K,\omega_K)=1$$

がえられるが、ここではこれを使わない。その代り、R_e^f又はR_i^f の中の一方だけを残し、*) R_e'及びR_i' は無視するという近似を行うと、$n_\alpha^f(K)$；$n_\alpha'(K)$の間の関係が得られ、それを(9)に代入すれば次の結果をうる。

Plasma

$$\widetilde{E}_0 - E_0 = \frac{i}{n_0^2}\sum_K{}' \frac{K}{k^2}\frac{|n_\alpha^f(K)|^2}{\theta(-K,\omega_0+\omega_{-K})}\left\{\frac{\eta_\alpha(-K,\omega_0+\omega_{-K})\eta_\beta(K,\omega_0)-1}{|\eta_\beta(K,\omega_K)|^2}\psi_\beta(-K,\omega_0)\right.$$
$$\left. + \frac{\eta_\beta(-K,\omega_0+\omega_{-K})-\eta_\beta(K,\omega_K)}{\eta_\beta(K,\omega_K)}\psi_\alpha(-K,\omega_0)\right\} \tag{15}$$

ここに

$$\theta(K,\omega) \equiv \eta_e(K,\omega)\eta_i(K,\omega) - 1$$

又、R_α^f を残し、R_β^f を無視した。

(15)式を、(i) $\omega_\gamma^2 \gg \Omega_\gamma^2$, (ii) $k^2\lambda_\gamma^2 \ll 1$, (iii) $\Omega_e \gg \omega_0 \gg \omega_K$, $\Omega_i \gg \nu_\gamma$ ($\gamma = e$, i) という条件の下で評価してみると、$\alpha = i$ では

$$\widetilde{E}_{0y} \sim i\frac{E_0}{n_0^2}\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_0}{\Omega_i}\Sigma_K |n_i^f(K)|^2$$

又、$\alpha = e$ では

$$\widetilde{E}_{0y} \sim i\frac{E_0}{n_0^2}\frac{m_i}{m_e}\Sigma_K \frac{\omega_K}{\Omega_i}|n_e^f(K)|^2$$

となることが示される。この結果から、$\alpha = i$ では乱れる影響は概して小さいが、$\alpha = e$ ではかなり大きく出て来ること、又、$|n_\alpha^f(K)|^2$が磁場に無関係な場合は、電流は一般に磁場の二乗に逆比例することが分る。今考えているような低周波の乱れの場合には、通常 $\alpha = i$ となるので乱れの影響が小さいことが期待されるが、特殊な場合として、例えば電子系のプラズマ振動のモード間結合の結果として低周波振動が励起されたような場合には、$\alpha = e$ となることが考えられる。しかし、このような場合の議論は、上のような現象論的取り扱いでは不充分であると思われる。

文　　献

1) S. Yoshikawa and D. J. Rose, Phys. Fluids 5 (1962), 334.
2) B. B. Kadomtsev, J. Nucl. Energy, Part C 5 (1963), 31.

---

*)このような近似は、適当な条件の下で許されることが多い。