

Flux Line の運動 II

都 築 俊 夫 (京大理)

(11月22日受理)

この報告では、才 I 部にひきつづき、有限温度の場合について述べる。モデルは前回と同様である。しかし超流体領域には正常電子があり、Ohmic current が流れるとする。考えている温度領域は臨界温度に比して十分低く、正常電子の平均自由路 ℓ_0 は λ_L , ξ_0 に比して十分長いとする。

結論をいえば、この場合にも、 $O(v_L/c)^2$, $O(\lambda_L/\ell_0)^2$ 以上を無視する近似では、flux line に drift force は働かない。しかし、運動方向とは逆向きの friction force が働く。これは超流体領域にある正常電子の密度に比例する。

才 I 部からの引用は、(I-...) のようにかく。

§ 1 超流体領域での解

基礎方程式は、London 方程式 (I-1)、加速度方程式 (I-2, 3, 4) 及び Maxwell 方程式 (I-5, 6, 7, 8) である。電流密度 \underline{j} は

$$\underline{j} = \underline{j}_s + \underline{j}_n; \quad \underline{j}_s = -en_s \underline{v}_s, \quad \underline{j}_n = \sigma_0 \underline{E} \quad (1)$$

である。磁場 \underline{h} に対する方程式は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\ell_0} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{1}{4\ell_0^2} \right) \right] \underline{h} = 0 \quad (2)$$

となる。ここで

$$1/\ell_0 = 4\pi\sigma_0 v_L/c^2, \quad 1/\lambda_L^2 = 4\pi n_s e^2/mc^2$$

である。

都築俊夫

$$\left\{ \begin{array}{l} x - v_L t = \lambda \xi, \\ y = \lambda \eta, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \zeta \cos \theta \\ \eta = \zeta \sin \theta \end{array} \right. ; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{1}{4\ell_0^2}$$

ととると、 $\zeta \rightarrow \infty$ で $h \rightarrow 0$ となり、 $v_L \rightarrow 0$ で円対称になる解は

$$h = \alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0} \zeta \cos \theta} K_0(\zeta) \quad (3)$$

ここで $K_0(\zeta)$ は才2種 modified Bessel function。

次に \underline{v}_S を決める。(I-2)から

$$\underline{\tilde{E}} = \frac{m}{e} (\underline{v}_L \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}_S \quad (4)$$

(I-5)に代入すると

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0} \frac{\partial}{\partial x} \underline{v}_S - \underline{v}_S = \frac{\lambda_L^2}{mc} \underline{\nabla} \times \underline{h}$$

(3)を用いて成分でかくと

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0} \frac{\partial}{\partial x} v_S - v_S = \frac{\lambda_L^2 e}{mc} \underline{\nabla} \times \underline{h}$$

(3)を用いて成分でかくと

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0 \lambda} \frac{\partial v_{SX}}{\partial \xi} - v_{SX} = -\frac{e \lambda_L^2}{mc \lambda} \alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0} \xi} \sin \theta K_1(\zeta) \quad (5)$$

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0 \lambda_L} \frac{\partial v_{SY}}{\partial \xi} - v_{SY} = \frac{e \lambda_L^2}{mc \lambda} \alpha \left[\frac{\lambda}{2\ell_0} K_0 + \cos \theta \cdot K_1(\zeta) \right] e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0} \xi} \quad (6)$$

$v_{SX} + i v_{SY} = w$ とおくと

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0 \lambda} \frac{\partial w}{\partial \xi} - w = \frac{ie \lambda_L^2}{mc \lambda} \alpha \left[\frac{\lambda}{2\ell_0} K_0(\zeta) + e^{i\theta} K_1(\zeta) \right] e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0} \xi} \quad (7)$$

$$w = \frac{ie \lambda_L^2}{mc \lambda} \alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0} \xi} \left[\frac{1}{2} M_0 K_0(\zeta) + \sum_{p=1} \{ M_p \cos p\theta + i N_p \sin p\theta \} K_p(\zeta) \right] \quad (8)$$

と展開して解を求める。係数 M_p , N_p は

$$\lambda_L^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\ell_0^2} \right) M_0 + \frac{\lambda_L^2}{\ell_0 \lambda} M_1 = -\frac{\lambda}{\ell_0} \quad (9)$$

$$\lambda_L^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\ell_0^2} \right) M_p + \frac{\lambda_L^2}{2\ell_0 \lambda} (M_{p-1} + M_{p+1}) = -\delta_{p,1} \quad (p \geq 1) \quad (10)$$

$$\lambda_L^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\ell_0^2} \right) N_1 + \frac{\lambda_L^2}{2\ell_0 \lambda} N_2 = -1 \quad (11)$$

$$\lambda_L^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\ell_0^2} \right) N_p + \frac{\lambda_L^2}{2\ell_0 \lambda} (N_{p-1} + N_{p+1}) = 0 \quad (p \geq 2) \quad (12)$$

で決められる。 $\ell_0 \gg \lambda_L$ として $(\lambda_L/\ell_0)^2$ 以上を無視すると

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= N_1 = -1 \\ M_2 &= N_2 = \frac{\lambda_L}{2\ell_0} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

従つて

$$\begin{aligned} v_{sx} &= -\frac{e\lambda_L^2}{mc\lambda} \alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0}\zeta \cos\theta} \sum_{p=1} N_p \sin p\theta \cdot K_p(\zeta) \\ &= +\frac{e\lambda_L}{mc} \alpha \left[\sin\theta \cdot K_1(\zeta) - \frac{\lambda_L}{2\ell_0} \sin 2\theta \left\{ \frac{\zeta}{2} K_1(\zeta) + K_2(\zeta) \right\} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_{sy} &= \frac{e\lambda_L^2}{mc\lambda} \alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0}\zeta \cos\theta} \left[\frac{1}{2} M_0 K_0(\zeta) + \sum_{p=1} M_p \cos p\theta \cdot K_p(\zeta) \right] \\ &= -\frac{e\lambda_L}{mc} \alpha \left[\cos\theta \cdot K_1(\zeta) - \frac{\lambda_L}{2\ell_0} \left\{ \frac{\zeta}{2} K_1(\zeta) + \cos 2\theta \left(\frac{\zeta}{2} K_1(\zeta) + K_2(\zeta) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

(4)から \underline{E} を求める。以後表式が長々となるので λ_L/ℓ_0 の程度まで書く。

$$E_x = -\frac{v_L}{2c} \alpha \left[\sin 2\theta \cdot K_2(\zeta) + \frac{\lambda_L}{2\ell_0} \left\{ \sin\theta (K_1(\zeta) - \frac{\zeta}{2} K_2(\zeta)) - \sin 3\theta \left(\frac{\zeta}{2} K_2(\zeta) + K_3(\zeta) \right) \right\} \right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{v_L}{2c} \alpha \left[K_0(\zeta) + \cos 2\theta \cdot K_2(\zeta) - \frac{\lambda_L}{2\ell_0} \left\{ \cos\theta (\zeta K_0(\zeta) - K_1(\zeta) + \frac{\zeta}{2} K_2(\zeta)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos 3\theta (K_3(\zeta) + \frac{\zeta}{2} K_2(\zeta)) \right\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

これは $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ を満たすから ϕ は

都築俊夫

$$\phi = \mu_{S\infty} + \sum_{p=1} \frac{1}{\zeta^p} \{ A_p^S \cos p\theta + B_p^S \sin p\theta \} \quad (18)$$

このようにして、係数を除いて超流体領域の解は決つた。

§ 2 Core 領域での解

基礎方程式は報告 I と全く同じである。超流体領域で解に λ_L/ℓ_0 の程度の変化が生じたので、境界条件を通して、Core 領域の解にも同程度の変化を生じる。従つて磁場は一様ではなくなる。実際 core 表面で磁場をつなぐと

$$\begin{aligned} \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L} \right) \left\{ 1 - \frac{a}{2\ell_0} \cos \theta \right\} e^{\frac{a}{2l} \cos \theta} \\ = \beta I_0 \left(\frac{a}{2\ell} \right) + 2 \sum_{p=1} \{ \beta_{cp} \cos p\theta + \beta_{sp} \sin p\theta \} I_p \left(\frac{a}{2\ell} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

から

$$\left. \begin{aligned} \beta_{cp} &= \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L} \right) \cdot \frac{I_p \left(\frac{a}{2\ell} \right) - \frac{a}{2\ell_0} I_p' \left(\frac{a}{2\ell} \right)}{I_p \left(\frac{a}{2\ell} \right)} \quad (p \geq 0) \\ \beta_{sp} &= 0 \quad (p \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。ここで $\beta_{c0} = \beta$ 。従つて

$$\begin{aligned} h(\zeta, \theta) &= \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L} \right) \left[1 - \frac{a}{2\ell_0} e^{-\zeta \cos \theta} \left\{ \frac{I_0' \left(\frac{a}{2\ell} \right)}{I_0 \left(\frac{a}{2\ell} \right)} I_0(\zeta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{p=1} \cos p\theta \cdot \frac{I_p' \left(\frac{a}{2\ell} \right)}{I_p \left(\frac{a}{2\ell} \right)} I_p(\zeta) \right\} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$I_p'(\zeta)$ は $dI_p/d\zeta$ を示す。(I-5)から

$$E_x = -\frac{v_L a}{4c\ell_0} \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L} \right) e^{-\zeta \cos \theta} \sum_{p=1} \left[\frac{I_{p-1}' \left(\frac{a}{2\ell} \right)}{I_{p-1} \left(\frac{a}{2\ell} \right)} - \frac{I_{p+1}' \left(\frac{a}{2\ell} \right)}{I_{p+1} \left(\frac{a}{2\ell} \right)} \right] \sin p\theta \cdot K_p(\zeta) \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
E_y = & -\frac{v_L a}{4c\ell_0} \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L}\right) e^{-\zeta \cos \theta} \left\{ \frac{I_0' \left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_0 \left(\frac{a}{2\ell}\right)} - \frac{I_1' \left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_1 \left(\frac{a}{2\ell}\right)} \right\} I_0(\zeta) \\
& - \sum_{p=1} \left\{ \frac{I_{p-1}' \left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_{p-1} \left(\frac{a}{2\ell}\right)} - 2 \frac{I_p' \left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_p \left(\frac{a}{2\ell}\right)} + \frac{I_{p+1}' \left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_{p+1} \left(\frac{a}{2\ell}\right)} \right\} \cos p\theta \cdot I_p(\zeta)
\end{aligned} \quad (23)$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を充すので e のタテ成分は

$$\nabla^2 \mu_n = 0$$

で与えられる μ_n から決る。

$$\mu_n = \mu_{n0} + \sum_{p=1} \zeta^p \{ A_p^n \cos p\theta + B_p^n \sin p\theta \} \quad (24)$$

境界条件を使つて係数 A, B を決める。 j_{\perp} については自動的につながる。 e_{\parallel} , e_{\perp} の連続条件から (表式が長くなるので結果だけを書く)

$$A_p^s = A_p^n = 0 \quad (p \geq 1) \quad (25)$$

B_p を $1/\ell_0$ で展開して

$$B_p^s = B_p^{s(0)} + B_p^{s(1)}, \quad B_p^n = B_p^{n(0)} + B_p^{n(1)} \quad (26)$$

とかくと、 $B_p^{s(0)}$, $B_p^{n(0)}$ は報告 I で与えたものになる。

$$B_p^{s(0)} = \frac{v_L e a^2}{2c\lambda_L} \alpha K_2 \left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \delta_{p,1} \quad (p \geq 1) \quad (27)$$

$$B_p^{n(0)} = -\frac{v_L e \ell}{c} \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \delta_{p,1} \quad (p \geq 1) \quad (28)$$

$B_p^{s(1)}$, $B_p^{n(1)}$ は

$$B_p^{s(1)} = \frac{v_L e a \ell}{4c\ell_0} \alpha \frac{1}{p} \left(\frac{a}{\lambda_L}\right)^p \left[K_0 \delta_{p,1} - \frac{\lambda_L}{4\ell} \left\{ K_1' - \frac{2a}{\lambda_L} K_2 - 3K_3 \right\} \delta_{p,2} \right]$$

$$-\frac{a}{\ell} K_0 \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} (-)^{p-q} \frac{I_{p-q}}{I_q} (I_q'^2 - I_q I_q'') + \sum_{q=1}^{p+q} (-)^{p+q} \frac{I_{q+p}}{I_q} (I_q'^2 - I_q I_q'') \right\} \quad (29)$$

$$B_p^{n(1)} = \frac{v_L e a \ell}{4 c \ell_0} \alpha \frac{1}{p} \left(\frac{2\ell}{a} \right)^p \left[K_0 \delta_{p,1} - \frac{\lambda_L}{4\ell} \left\{ K_1' - \frac{2a}{\lambda_L} K_2 - 2K_3 \right\} \delta_{p,2} - \frac{a}{\ell} K_0 \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} (-)^{p-q} \frac{I_{p-q}}{I_q} (I_q'^2 - I_q I_q'') + \sum_{q=1}^{p+q} (-)^{p+q} \frac{I_{p+q}}{I_q} (I_q'^2 - I_q I_q'') \right\} \right] \quad (30)$$

となる。ここで $K_p = K_p(a/\lambda_L)$, $I_p = I_p(a/2\ell)$ である。

最後に量子条件から α を決める。結果は

$$\varphi_0 = \pi a^2 \alpha K_0 \left(\frac{a}{\lambda_L} \right) \left[1 - \frac{a}{2\ell_0} \left\{ \frac{I_1^3}{I_0} - 2 \sum_{p=1}^{p-1} (-)^p \frac{I_{p-1} I_p' I_{p+1}}{I_p} \right\} \right] \quad (31)$$

となる。 φ_0 は単位磁束量子である。

§ 3 エネルギー・運動量定理

エネルギー・運動量定理

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \underline{g}_S + \underline{g}_f \} + (\rho_n + \rho_i) \underline{e} + \frac{1}{c} \underline{j}_n \times \underline{h} + \underline{\nabla} \cdot \left[-\frac{1}{e} \rho_s \phi \underline{\vec{1}} + \underline{\vec{T}}(\underline{e}) + \underline{\vec{T}}(\underline{h}) + \underline{\vec{S}} \right] = \underline{f}^{\text{ext}} \quad (32)$$

を用いて力について考える。超流体領域にわたって積分する。z方向には単位長さを取る。flux line の drift motion に関係する y 方向の力については、報告 I と同様全く力をうけない。しかし x 方向には friction force が残り、それは $1/\ell_0$ に比例する ($1/\ell_0 = 4\pi\sigma_0 v_L/c^2$)。例えば、 \underline{j}_n は y 方向に平均の流れを与え、従つて $\underline{j}_n \times \underline{h}$ により x 方向の力となる。又 $\underline{\nabla} \cdot \underline{\vec{S}}$ も同様な力を与える。残りの項は寄与しない。結局 total force として

$$F_x^{\text{ext}} = \frac{\lambda_L^2}{4\ell_0} \alpha^2 \left[\int_{a/\lambda_L}^{\infty} \zeta K_0^2(\zeta) d\zeta + \frac{a^2}{2\lambda_L^2} K_1^2(\zeta) \right] \quad (33)$$

となる。flux line は反作用として $-F_x^{\text{ext}}$ で与えられる friction を受ける。

§ 4 結 論

有限温度で超流体領域にも正常電子があり、それらにより、Ohmic current が流れる場合について調べた。flux line に働くマグナス力は、background positive charge から受ける力と完全に打ち消し合う。flux line は drift motion をしない。しかしながら、運動方向とは逆向きの力を flux line は受け、やがてとまってしまう。この力は $(n-n_S)v_L$ に比例する (n は全電子密度)。我々が考えたような臨界温度より十分低い温度領域では、この力は非常に弱い。

de Sorbo の実験結果や flux line の振動の問題等については、ひきつづき考えてみるつもりである。