Flux Line の運動　I

都築俊夫（京大理）

（11月22日受理）

この報告は、筆者の計算をもとに、中嶋・碓井・恆藤・阿部・宗田・和田各氏の御批判、御討論を経てなされたことをおことわりして、各氏に感謝いたします。特に、中嶋・恆藤両先生からは、熱心な御討論を頂きました。

§1　始めに

量子化された flux line の運動のメカニズがどのようなものであるかという問題は、才2種超電導体の臨界現象の理論とからんで興味ある問題である。超電導体内に単位磁束量子 $\varphi_0 = ch/2e$（c：光速、e：電荷単位、h：プランク定数）をもつ flux line がとおることから超電導性の破壊が始まる。
flux line の生成エネルギーの考察から分るように、単位磁束量子 φ_0 をもつ flux line があちこちに出来ることにより超電導性の破壊が進む。flux line のまわりにはアイス current が流れるので、この current 分布をとおして、flux line の間に相互作用があるが、flux line の密度が十分小さければ、（理想的な才2種超電導体（磁場の侵入度≫コヒーレンスの距離）では、密度はもつと高くなつてもよい）この相互作用はほとんどない。このような場合には、才0近似として、超電導体内に唯1本の flux line が存在するとして、その振舞を調べるとよい。どのような力が働くかを知るためには、よくなされるように、定方向に定速度で flux line を動かしてみればよい。この問題を検討した論文はいくつかあるようであるが、代表的なものは、de Gennes 達の[1)]ものと、Bardeen 達[2)] のものであると思う。しかもこれらは全く異つた結論を出している。

de Gennes 達は、超電導体の場合も、流体ヘリウムにおける Vortex

ring の場合と全く同一で、 flux line にマグナス力が働き、従つて振動のモードが存在し得ると主張している。

一方、Bardeen 達は、液体ヘリウムの場合と違つて、超電導体内には、電子の電荷を打ち消すイオンの正電荷の分布があることを考えることが基本的に大事なことであると主張している。なるほど電子のみをきりはなして、力を考えれば、 flux line に net force としてマグナス力が働いているようにみえるが、同時に back ground ion から大きさが全く同じで逆向きの力を受け、結局全体として flux line は力を受けないということである。

実験結果から云えば、今迄のところいずれとも判定がつかない。Kim 達[3]の実験からは Bardeen の結果が正しいようにみえる。de Sorbo[4]の実験ではゆるやかな pressional motion がみられ、de Gennes 達の結論を保証しているようにみえる。de Sorbo は pure indium を材料にとつた実験である。従つて、才1種超電導体の中間状態における実験である。才2種の dirty superconductor である Nb-Ta 合金では、このような drift force は観測されていない (Vinen 達[5]の実験)ことは注意を要すると思われる。混合状態の場合と中間状態の場合とで flux の運動のメカニズムが異るかも知れないからである。

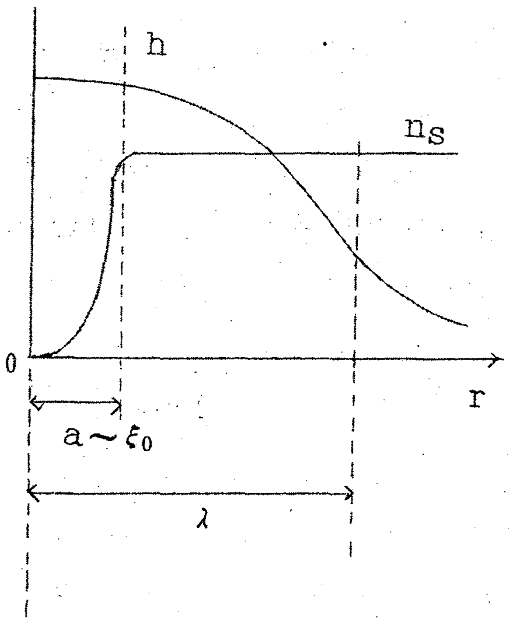
モデルについては次章でくわしく述べるが、この報告では、才2種超電導体内に1本の flux line がある場合に話を限ることにする。超流体に対して London の理論を応用する。結論を云えば、Bardeen の idea が正しいと考えられる。 flux line のまわりの超電導領域に正常電子による電流 (磁場の運動により作り出された電場による Ohmic current) がなければ、マグナス力とローレンツ力は全体として釣合い、 flux line には力が働かない。正常電子の Ohmic current があると friction force が働く。しかしながら、Bardeen と異つて、化学ポテンシャルが flux line のまわりで空間的に変化する。Bardeen 達はこの変化を考えていない。化学ポテンシャルが不変であるとすると、 flux の表面での境界条件と矛盾する。

最後にこの報告の構成を書いておく。§2でモデルと境界条件を与え、§3では絶対零度での超流体領域の解を調べる。§4では flux core の内部での場の様子を境界条件を使いながら決める。§5ではエネルギー・運動量定理を

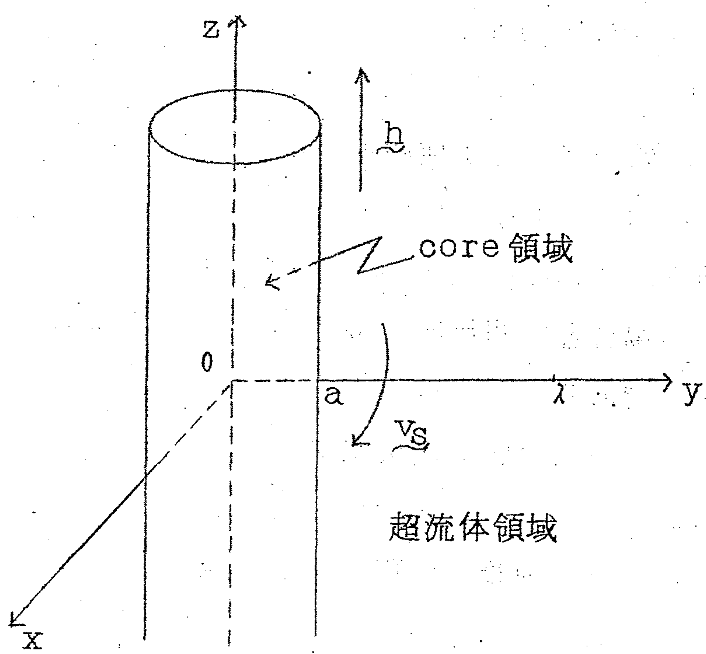
論じ、 flux line に力が働くかどうかを調べる。なお附録で flux にのつた座標系でみた時の解を調べる。§6で全体の討論・結論が与えられる。有限温度で、超流体領域に正常電子による Ohmic current がある場合は才II部で報告する。

§2 モデルと境界条件

理想的な才2種超電導体を考える。磁場の侵入度を λ、超電導電子密度が急激に減少し始める半径をaとすると、 flux が静止しているときには、才1図



才 1 図



才 2 図

のような分布になるであろう。aはコヒーレンスの距離 ξ_0程度である。($\xi_0 \ll \lambda$)
flux の中心から距離aの程度離れたところでは磁場 $\underset{\sim}{h}$ はほとんど変化していない。従つて、超電導電子密度 n_S は $r=a$ で階段的に0となり、半径aの円筒内には超電導電子は存在しないというモデルを取つてもよいであろう（才2図）。この円筒領域を「core 領域」とよぶことにする。まわりの領域を超流体領域と呼ぶ。この領域では n_S は一定である。絶対零度では、 n_S は全電子密度nに等しい。有限温度では、 n_S との和がnになるような一様な正常電子がある。

今 x方向に定速度 v_L で flux を動かせたとしよう。磁場は時間的に変化することになるので電場 $\underset{\sim}{e}$ を生じる。場の量は、 core surface で

$$\left.\begin{array}{l}\text{磁場の接線成分 } h_{11} \text{ 連続}\\ \text{電場の接線成分 } e_{11} \text{ 連続}\\ \text{電流の法線成分 } j_{\perp} \text{ 連続}\end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

なるように決められなければならない。[6]

実際の系では局所的電荷は存在しないであろう。もし存在するとしても、 core surface の近傍だけであるが、これは急速に減衰する。しかしこの結果は、我々のモデルでは自動的に導かれるものではないので、

局所的電荷なし (II)

の条件を解に対する要請としてもちこまねばならない。

(I),(II)の条件だけでは解は一意的に決らない。core 表面に全体として零になるような表面電荷が存在するとすれば、無数の解が作られるからである。しかし core 表面に電荷が現われると考えることはむしろ困難である。たまたまそこに磁束がとおつているから、内部の電子が正常状態にあるだけだからである。従つて core 表面で

電場の法線成分 $e_{\perp}$ 連続 (III)

の条件をおく。これで解は唯一つに決る。

最後の条件は、磁束が量子化されていることからくる。それは

$$\oint \underset{\sim}{p_s}\cdot d\underset{\sim}{r} = \frac{h}{2} \qquad \underset{\sim}{p_s} = -\frac{e}{c}\left\{\underset{\sim}{A} - \frac{mc}{e}\underset{\sim}{v_s}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

で与えられる。$\underset{\sim}{A}$ はベクトルポテンシャルである。積分路は超流体領域に core をかこむように閉じた曲線にとる。

ところで、磁束の移動速度が十分ゆつくりしているとすると、磁場のパターンは全体としてその型を変えないで動くと考えてよかろう。従つてすべての場の量は $\underset{\sim}{r}-\underset{\sim}{v_L}t$ の座標依存性をもつと考える。又解は flux line が静止しているときの解に連続的につながるように決めることにする。

$(v_L/c)^2$ 以上のオーダーの量は無視する。

都築俊夫

§ 3　超流体領域での解（T＝0）

まず基礎方程式はLondon 方程式

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{v_s} = \frac{e}{mc}\underset{\sim}{h} \tag{1}$$

加速度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{v_s} = -\frac{e}{m}\underset{\sim}{E} \tag{2}$$

ここで

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{e} + \frac{1}{e}\underset{\sim}{\nabla}\phi \tag{3}$$

$$\phi = \mu_s + \frac{1}{2} m v_s^2 \tag{4}$$

である。ここで $\underset{\sim}{v_s}$ は超電導電子の速度ベクトル、μ_s は超流体領域での化学ポテンシャルである。$\underset{\sim}{e}$ はマックスウエル方程式に現われる true field（電荷単位 e (＞0) と混合しないよう）である。電流密度を $\underset{\sim}{j}$、電荷密度を ρ として(1)(2)にマックスウエル方程式が連立する。

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{h} = \frac{4\pi}{c}\underset{\sim}{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{e} \tag{5}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{h} \tag{6}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{h} = 0 \tag{7}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{E} - \frac{1}{e}\nabla^2 \phi = 4\pi\rho = 0 \tag{8}$$

$O(v_L/c)^2$ を無視する近似では、(5)で変位電流の項を無視してよい。なぜなら、電場 $\underset{\sim}{e}$ は磁場の運動により生じるのであり、$\underset{\sim}{e}$ 自身が v_L/c のオーダーであるからである。

磁場の方向を z 軸に取れば、$\underset{\sim}{v_s}$, $\underset{\sim}{e}$ は x y 成分のみをもつ。

具体的に超流体領域の解を求めよう。T＝0 で正常電子がないとすると、電流は超電導電子による $\underset{\sim}{j_s}$ のみとなる。

$$\underset{\sim}{j}=\underset{\sim}{j_S}=-e\,n_S\,\underset{\sim}{v_S} \tag{9}$$

従つて、(1)(5)から

$$(\nabla^2-\lambda_L^{-2})h=0\ ;\quad \lambda_L^{-2}=4\pi n_S e^2/mc^2 \tag{10}$$

$r\to\infty$で0となる解は

$$h(\zeta,\theta)=\alpha K_0(\zeta)+\sum_{l=0}\{\alpha_{1l}\sin\ell\theta+\alpha_{2l}\cos\ell\theta\}K_l(\zeta)$$

となる。$K_l(\zeta)$は才2種modified Bessel functionである。又

$$\begin{cases} x-v_L t=\lambda_L\xi \\ y=\lambda_L\eta \end{cases}\qquad \begin{cases} \xi=\zeta\cos\theta \\ \eta=\zeta\sin\theta \end{cases}$$

とした。$\ell\neq 0$部分が$\ell=0$の部分に比して小さい理由はない。しかし(9)はflux lineが静止している場合と全く同型だから、$v_L\to 0$で静止しているときの円対称な解につながるように$\ell=0$の部分のみをとる。

$$h(\zeta)=\alpha K_0(\zeta) \tag{11}$$

ここでαは定数であり、量子条件から決められる。(11)を用いると、(5)から$\underset{\sim}{v_S}$は

$$\left.\begin{aligned} v_{Sx}&=\frac{\lambda_L e}{mc}\alpha\sin\theta\cdot K_1(\zeta) \\ v_{Sy}&=-\frac{\lambda_L e}{mc}\alpha\cos\theta\cdot K_1(\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となる。(2)から$\underset{\sim}{E}$は

$$\left.\begin{aligned} E_x&=-\frac{v_L}{2c}\alpha\sin 2\theta\cdot K_2(\zeta) \\ E_y&=\frac{v_L}{2c}\alpha[K_0(\zeta)+\cos 2\theta\cdot K_2(\zeta)] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

となる。或いは、法線成分（r方向成分）と接線成分（θ方向成分）でかくと

$$\left.\begin{aligned} v_{s\perp} &= 0 \\ v_{s\parallel} &= -\frac{\lambda_L e}{mc}\alpha K_1(\zeta) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{\perp} &= -\frac{v_L}{c}\alpha \sin\theta \cdot K_1(\zeta)/\zeta \\ E_{\parallel} &= -\frac{v_L}{c}\alpha \cos\theta \cdot K_1'(\zeta) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

となる。$K_1'(\zeta)$はK_1のζ微分を示す。(14)は超電導電子は、flux line のまわりで円運動していることを示す。

(13)からすぐわかるように$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{E}=0$であるから$\underset{\sim}{e}$の縦成分は(8)から

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (16)$$

で決められる。$\zeta\to\infty$　で　$\phi\to\mu_{s\infty}$となる解は

$$\phi = \mu_{s\infty} + \sum_{n=1} \frac{1}{\zeta^n}\{A_n^s \cos n\theta + B_n^s \sin n\theta\} \qquad (17)$$

となる。

§ 4　Core 領域での解

core 領域では電子は正常状態にある。Ohmic current

$$\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{j}_n = \sigma \underset{\sim}{E} \qquad (18)$$

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{e} + \frac{1}{e}\underset{\sim}{\nabla}\mu_n \qquad (19)$$

が流れていると仮定する。σは電気伝導度、μ_nは core 領域にある電子の化学ポテンシャルである。(18) を用いると、基礎方程式は(5)(6)(7)及び

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{E} - \frac{1}{e}\nabla^2\mu_n = 4\pi\rho = 0 \qquad (20)$$

である。次元のない長さ

$$\begin{cases} x - v_L t = 2\ell\xi \\ y = 2\ell\eta \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \zeta\cos\theta \\ \eta = \zeta\sin\theta \end{cases}$$

$$\ell^{-1} = \frac{4\pi\sigma v_L}{c^2}$$

を導入すると、hに対する労程式は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + 1\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - 1\right] h = 0 \tag{21}$$

となり、$\zeta \to 0$ で regular な解は

$$h(\zeta, \theta) = e^{-\zeta\cos\theta}\left[\beta I_0(\zeta) + 2\sum_{n=1}(\beta_{cn}\cos n\theta + \beta_{sn}\sin n\theta) I_n(\zeta)\right] \tag{22}$$

となる。core surface でhが連続であると云う条件を使うと

$$\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) e^{a\cos\theta/2l} = \beta I_0\left(\frac{a}{2\ell}\right) + 2\sum_{n=1}\{\beta_{cn}\cos n\theta + \beta_{sn}\sin n\theta\} I_n\left(\frac{a}{2\ell}\right) \tag{23}$$

ところで

$$e^{z\cos\theta} = I_0(z) + 2\sum_{n=1}\cos n\theta \cdot I_n(z)$$

だから

$$\begin{aligned} \beta = \beta_{cn} &= \alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \\ \beta_{sn} &= 0 \end{aligned} \qquad (n \geq 1) \tag{24}$$

となる。(24)を(23)に代入すれば

$$h = e^{-\zeta\cos\theta} \cdot \beta e^{\zeta\cos\theta} = \alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) = \text{一定} \tag{25}$$

となる。core 内では磁場は一様に定つた値をもつ。従つて

$$\underset{\sim}{E} = 0 \tag{26}$$

となり、$\underset{\sim}{e}$の縦成分は

$$\nabla^2 \mu_n = 0 \tag{27}$$

から決められる。$\zeta \to 0$ で $\mu_n \to \mu_{n0}$ になるとすると

$$\mu_n = \mu_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k \{ A_k^n \cos k\theta + B_k^n \sin k\theta \} \tag{28}$$

残りの境界条件を考えて係数 A_k^s, A_k^n, B_k^s, B_k^n を決めよう。core 領域で $\underset{\sim}{E} = 0$ であり、$v_{s\perp}$ は 0 だから $j_\perp$ の条件は自動的に充される。e_n の条件、surface charge 0 の条件は

$$\left[eE_{\text{II}} - \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_{\zeta = a/\lambda_L} = -\frac{1}{a} \left[\frac{\partial \mu_n}{\partial \theta} \right]_{\zeta = a/2l} \tag{29}$$

$$\left[eE_\perp - \frac{1}{\lambda_L} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = a/\lambda_L} = -\frac{1}{2\ell} \left[\frac{\partial \mu_n}{\partial \zeta} \right]_{\zeta = a/2l} \tag{30}$$

と書けるから、$\underset{\sim}{E}$, ϕ, μ_n の表式を使うと (29) から

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\lambda_L}{a}\right)^k A_k^s = \left(\frac{a}{2\ell}\right)^k A_k^n \qquad (k \geq 1) \\
&\frac{ev_L}{c} \alpha K_1' \left(\frac{a}{\lambda_L}\right) + \frac{\lambda_L}{a^2} B_1^s = \frac{1}{2\ell} B_1' \\
&\left(\frac{\lambda_L}{a}\right)^k B_k^s = \left(\frac{a}{2\ell}\right)^k B_k^n \qquad (k \geq 2)
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

(30) から

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\lambda_L}{a}\right)^k A_k^s = -\left(\frac{a}{2\ell}\right)^k A_k^s \qquad (k \geq 1) \\
&\frac{ev_L \lambda_L}{ca} \alpha K_1 \left(\frac{a}{\lambda_L}\right) - \frac{\lambda_L}{a^2} B_1^s = \frac{1}{2\ell} B_1^n \\
&\left(\frac{\lambda_L}{a}\right)^k B_k^s = -\left(\frac{a}{2\ell}\right)^k B_k^n \qquad (k \geq 2)
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

をうる。従つて

$$\left.\begin{aligned} A_k^s=A_k^n=0 \qquad & (k\geqq 1) \\ B_k^s=B_k^n=0 \qquad & (k\geqq 2) \end{aligned}\right. \tag{33}$$

$$B_1^s=\frac{a^2 v_L e}{2c\lambda_L}\alpha K_2\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \tag{35}$$

$$B_1^n=-\frac{ev_L \ell}{c}\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \tag{36}$$

となる。従つて

$$\phi=\mu_S+\frac{1}{2}mv_S^2=\mu_{S\infty}+\frac{a^2 v_L e}{2c\lambda_L}\alpha K_2\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\zeta} \tag{37}$$

$$\mu_n=\mu_{n0}-\frac{ev_L\ell}{c}\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\zeta\sin\theta \tag{38}$$

となる。

最後に量子条件から定数αを決める。積分路を超流体領域にcoreと同心円にとると、London方程式を使つて

$$\int_{core} h\,ds=\varphi_0 \qquad \varphi_0=\frac{ch}{2e} \tag{39}$$

となる。積分はcoreの軸に垂直な面で行う。従つて

$$\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)=\frac{\varphi_0}{\pi a^2}=\frac{c\hbar}{ea^2} \tag{40}$$

となる。このようにして場の量はすべて決つた。

§5　エネルギー・運動量定理

flux lineの受ける力を考えよう。そのためまずエネルギー・運動量定理を導く。これはすでによく知られたものではある。[6] 単位体積当りの電荷密度・電流密度は

$$\left.\begin{aligned} &\rho=\rho_s+\rho_n+\rho_i \\ &\underset{\sim}{j}=\underset{\sim}{j}_s+\underset{\sim}{j}_n\,, \qquad \underset{\sim}{j}_i=0 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

イオンは格子点に固定されているから$\underset{\sim}{j}_i$は0である。単位体積当りの全ローレンツ力は、マックスウエル方程式を用いて

$$\rho\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}[\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{h}]=-\underset{\sim}{\nabla}\cdot\{\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{e})+\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{h})\}-\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}_5 \tag{42}$$

ここで

$$T_{ik}(\underset{\sim}{e})=\frac{1}{8\pi}\{\underset{\sim}{e}^2\delta_{ik}-2e_ie_k\} \tag{43}$$

$$T_{ik}(\underset{\sim}{h})=\frac{1}{8\pi}\{\underset{\sim}{h}^2\delta_{ik}-2h_ih_k\} \tag{44}$$

$$\underset{\sim}{g}_f=\frac{1}{4\pi c}\underset{\sim}{e}\times\underset{\sim}{h} \tag{45}$$

T_{ik} は応力テンソル、$\underset{\sim}{g}_f$ は場の運動量密度である。

$$(\underset{\sim}{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T})_k=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}T_{ik} \tag{46}$$

である。

一方London 方程式と加速度方程式を用いると

$$\rho\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}[\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{h}]=\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}_s+(\rho_n+\rho_i)\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}[\underset{\sim}{j}_n\times\underset{\sim}{h}]$$

$$+\underset{\sim}{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{S}-\frac{1}{e}\rho_s\nabla\phi \tag{47}$$

ここで

$$\underset{\sim}{g}_s=n_s m\underset{\sim}{v}_s \quad \text{：超電導電子運動量密度} \tag{48}$$

$$S_{ik}=\frac{1}{2}n_s m\{\underset{\sim}{v}_s^2\delta_{ik}-2v_{si}v_{sk}\} \tag{49}$$

である。従つて (42) (47)から

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\underset{\sim}{g}_s+\underset{\sim}{g}_f\}+(\rho_n+\rho_i)\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}[\underset{\sim}{j}_n\times\underset{\sim}{h}]$$

$$+\underset{\sim}{\nabla}\cdot[-\frac{\rho_s}{e}\phi\overleftrightarrow{1}+\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{e})+\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{h})+\overleftrightarrow{S}]=0 \tag{50}$$

これがエネルギー運動量定理である。いたるところ電荷がなければ $\rho_n+\rho_i=-\rho_s=e\,n_s$ である。

力の考察にうつる。我々は flux を x 方向に定速度 v_L で動かした。そのときの解を用いて、(50) の左辺を超流体領域にわたつて積分したとき、もし零でない値をえたとすれば、このような運動をさせるためには、外力でささえてやる必要があることを示す。従つて core はその反作用として、力をうけていることになる。単位体積当りの外力を $\underset{\sim}{f}^{ext}$ とかくと

$$\underset{\sim}{f}^{ext}=\frac{\partial}{\partial t}\{\underset{\sim}{g}_s+\underset{\sim}{g}_f\}+(\rho_n+\rho_i)\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}[\underset{\sim}{j}_n\times\underset{\sim}{h}]$$

$$+\underset{\sim}{\nabla}\cdot[-\frac{1}{e}\rho_s\phi\overleftrightarrow{1}+\overleftrightarrow{T}(e)+\overleftrightarrow{T}(h)+\overleftrightarrow{S}] \tag{51}$$

しかし流体ヘリウムの場合との対応を明らかにするためには、場の量が $\underset{\sim}{r}-v_L t$ の関係であることを明らさまに使つておく方がよい。

$$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}_s=-m\,n_s(\underset{\sim}{v}_L\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v}_s$$

$$=-\underset{\sim}{\nabla}\cdot(m\,n_s\,\underset{\sim}{v}_L\cdot\underset{\sim}{v}_s)+n_s\,m\,\underset{\sim}{v}_L\times(\nabla\times\underset{\sim}{v}_s)$$

$$=-\nabla\cdot(n_s\,m\,\underset{\sim}{v}_L\,\underset{\sim}{v}_s)+\frac{n_s e}{c}\underset{\sim}{v}_L\times\underset{\sim}{h}$$

従つて

$$\underset{\sim}{f}^{ext}=\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}_f+(\rho_n+\rho_i)\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}\{\underset{\sim}{j}_n+n_s\,e\,\underset{\sim}{v}_L\}\times\underset{\sim}{h}$$

$$+\underset{\sim}{\nabla}\cdot[n_s(\phi+m\,\underset{\sim}{v}_L\cdot v_s)\overleftrightarrow{1}+\overleftrightarrow{T}(e)+\overleftrightarrow{T}(h)+\overleftrightarrow{S}] \tag{52}$$

とも書くことが出来る。超流体領域全域にわたつて体積積分しよう。z 方向には単位長さを取る。我々の場合には $\rho_n=0$，$\underset{\sim}{j}_n=0$ である。

$$\int\frac{\partial}{\partial t}g_{sy}\,d^3r=\int\frac{1}{c}n_s e[\underset{\sim}{v}_L\times\underset{\sim}{h}]_y$$

$$=-\frac{\pi v_L n_s e\lambda_L a}{c}\alpha K_1(\frac{a}{\lambda_L}) \tag{53}$$

$$\int \rho_i e_y \, d^3 r = \frac{\pi v_L n_S e \lambda_L a}{c} \alpha K_1 \left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \tag{54}$$

だけが零でない値をもつ。従つて net force を $\underset{\sim}{F}^{dxt}$ とかくと

$$\underset{\sim}{F}^{ext} = 0 \tag{55}$$

となり外力はいらないと云うことになる。もつと詳しく云えば、超電導電子のみを考えれば (53) で与えられる net force が働く。これはローレンツ力と向きが逆であり、マグナス力である。de Gennes はこの部分だけをみているのである。しかしこの力と逆向きで大きさの等しい力を core は受ける。これはイオンが格子点に固定されていることによるものである。Bardeen が正しく指摘したように、core の受ける力はマグナス力と positive back ground からの力との和となり、全体として力は働かない。しかし次章で議論するように、場の様子は全く異る。

§6　討論と結論

まずなぜ化学ポテンシャルが空間的に変化しなければならないかを示そう。μ_S が一定であるとしても h, $\underset{\sim}{v}_S$ は (11), (12) で与えられる。$\underset{\sim}{e}$ については $\phi = \frac{1}{2} m v_S^2$ と考えると（μ_S＝一定なら場の量に影響ない）$\nabla^2 \phi = 0$ は α が 0 でないかぎり充されない。従つて local neutral でない解に一般になるように見える。しかし v_S^2 は r のみの関数であるから e_n の連続条件から $\alpha = 0$ となり（core 領域で $\underset{\sim}{e} = 0$）すべての場の量が 0 と云う trivial な解しか境界条件(I)のもとでは与えない。境界条件(I)をすてる、特に core surface で h のとびを認めると core 内で h ＝一定、$\underset{\sim}{e} = 0$、超流体領域で $h = \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{v}_S = 0$ の解がある。無論 core 表面には、内部の磁場を打消す表面電流が流れる。しかし、London の境界条件(I)はマイスナー効果を保証し、超電導体が平こうにあることの表現であり、このような解は物理的でない。我々が考えている場合のように $v_L \ll c$ である場合には flux の運動は断熱的であり、境界条件は、London のもの(I)を用いねばならない。

化学ポテンシャルが空間的に変化することが基本的である。

flux line に働く力に関していえば、電子の電荷分布を打消す positive backgroundの存在を忘れてはならない。flux lineにはdrift forceは働かない。この結論は有限温度になつても、臨界温度に比して十分低い温度領域では変らない（才II部参照）。超流体領域にある正常電子がOhmic currentをもつとすればfriction forceが働く。

de Gennes達が引用しているpure Inの中間状態におけるpressional motionのメカニズム及び我々のモデルとの対応は続いて調べてみるつもりである。

附　　録

本文においては静止座標系Kからみた問題として考察した。Kに対してx方向へ定速度v_Lで動く座標系K'で問題をみてみよう。K'系の量にはダッシユをつけることにする。$O(v_L/c)^2$以上を無視する近似ではローレンツ変換[7]は

$$\left\{\begin{aligned} \underset{\sim}{r} &= \underset{\sim}{r}' + \underset{\sim}{v_L} t' \\ t &= t' + \frac{v_L}{c^2} x' \\ \underset{\sim}{v_S} &= \underset{\sim}{v}'_S + v_L \end{aligned}\right. \tag{A-1}$$

又$\underset{\sim}{e}$，$\underset{\sim}{h}$は

$$\left\{\begin{aligned} \underset{\sim}{e} &= \underset{\sim}{e}' - \frac{1}{c}\underset{\sim}{v_L} \times \underset{\sim}{h}' \\ \underset{\sim}{h} &= \underset{\sim}{h}' + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v_L} \times \underset{\sim}{e}' \end{aligned}\right. \quad \text{又は} \quad \left\{\begin{aligned} \underset{\sim}{e}' &= \underset{\sim}{e} + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v_L} \times \underset{\sim}{h} \\ \underset{\sim}{h}' &= \underset{\sim}{h} - \frac{1}{c}\underset{\sim}{v_L} \times \underset{\sim}{e} \end{aligned}\right. \tag{A-2}$$

変換後のマツクスウエル方程式は

$$\underset{\sim}{\nabla}' \times \underset{\sim}{h}' = \frac{4\pi}{c}\underset{\sim}{j}' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\underset{\sim}{e}' \tag{A-3}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}' \times \underset{\sim}{e}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\underset{\sim}{h}' \tag{A-4}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}' \cdot \underset{\sim}{h}' = 0 \tag{A-5}$$

$$\nabla' \cdot \underset{\sim}{e}' = 4\pi\rho' \tag{A-6}$$

となる。ここで

$$\underset{\sim}{j}' = \underset{\sim}{j} - \rho\, v_L \tag{A-7}$$

$$\rho' = \rho - \frac{1}{c^2} v_L \cdot j \tag{A-8}$$

となる。London 方程式は

$$\underset{\sim}{\nabla}' \times \underset{\sim}{v_S}' = \frac{e}{mc} \underset{\sim}{h}' - \frac{1}{mc^2} \underset{\sim}{v_L} \times \underset{\sim}{\nabla}' \phi' \tag{A-9}$$

加速度方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t'} \underset{\sim}{v_S}' - \frac{1}{mc^2} \underset{\sim}{v_L} \frac{\partial}{\partial t'} \phi' = -\frac{e}{m} \underset{\sim}{E}' \tag{A-10}$$

となる。

$$\phi' = \mu_S' + \frac{1}{2} m (\underset{\sim}{v_S}')^2 \tag{A-11}$$

$$\underset{\sim}{E}' = \underset{\sim}{e}' + \frac{1}{e} \underset{\sim}{\nabla}' \phi' \tag{A-12}$$

となる。

K′系ではstaticな問題となる。従つて t′ での微分は零となる。以後しばらくダッシユを落すことにする。

(A) 超流体領域

(A-10)から

$$\underset{\sim}{E} = 0 \qquad \text{又は} \qquad \underset{\sim}{e} = -\frac{1}{e} \underset{\sim}{\nabla} \phi \tag{A-13}$$

$\rho = 0$, $\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{j_S} = -n_S e(\underset{\sim}{v_S} + \underset{\sim}{v_L})$ を用いて (A-6)から

$$\nabla^2 \phi = -\frac{m}{\lambda_L^2} \underset{\sim}{v_L} \cdot (\underset{\sim}{v_S} + \underset{\sim}{v_L}) \tag{A-14}$$

又 $\underset{\sim}{h}$ に対して

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{\lambda_L^2}\right]\underset{\sim}{h} = \frac{1}{\lambda_L^2}\cdot\frac{1}{c}\underset{\sim}{v_L}\times\underset{\sim}{e} \tag{A-15}$$

表面電荷零の条件を入れると $\underset{\sim}{e}$ は v_L/c のオーダーとなり (A-15) の右辺は無視してよい。対称な解をとつて

$$h' = \alpha' K_0(\zeta') \qquad r' = \lambda_L \zeta' \tag{A-16}$$

(A-3) から

$$v'_{sx} = \frac{\lambda_L e}{mc}\alpha' \sin\theta\cdot K_1(\zeta') - v_L \tag{A-17}$$

$$v'_{sy} = \frac{\lambda_L e}{mc}\alpha' \cos\theta\cdot K_1(\zeta') \tag{A-18}$$

(A-14) に代入して

$$(\nabla')^2 \phi' = -\frac{ev_L}{\lambda_L c}\alpha' \sin\theta\cdot K_1(\zeta') \tag{A-19}$$

従つて解は $\zeta'\to\infty$ は $\phi' = \mu'_{s\infty} + \frac{1}{2}mv_L^2$ だから

$$\phi' = -\frac{\lambda_L e v_L}{c}\alpha' \sin\theta\cdot K_1(\zeta') + \psi \tag{A-20}$$

$$\psi = \mu'_{s\infty} + \frac{1}{2}mv_L^2 + \sum_{k=1}(\zeta')^{-k}\{A_k^{s'}\cos k\theta + B_k^{s'}\sin k\theta\} \tag{A-21}$$

(A-13) を用いて

$$e'_x = -\frac{v_L}{2c}\alpha' \sin 2\theta\cdot K_2(\zeta') - \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial x'}\psi \tag{A-22}$$

$$e'_j = -\frac{v_L}{2c}\alpha' [K_0(\zeta') - \cos 2\theta\cdot K_2(\zeta')] - \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial y'}\psi \tag{A-23}$$

(B) Core 領域

K系での current は

$$\underset{\sim}{j}=\underset{\sim}{j}_n=\sigma\{\underset{\sim}{e}'-\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}_L\times\underset{\sim}{h}'\}+\frac{\sigma}{e}\{\underset{\sim}{\nabla}'\mu_n'-\frac{1}{c^2}\underset{\sim}{v}_L\frac{\partial\mu_n'}{\partial t'}\}\tag{A-24}$$

と書けるからマックスウエル方程式は、時間 t' 微分を0として

$$\underset{\sim}{\nabla}'\times\underset{\sim}{h}'=\frac{4\pi\sigma}{c}\{\underset{\sim}{e}'+\frac{1}{e}\underset{\sim}{\nabla}'\mu_n'\}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\underset{\sim}{v}_L\times\underset{\sim}{h}'\tag{A-25}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}'\times\underset{\sim}{e}'=0\tag{A-26}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}'\cdot\underset{\sim}{h}'=0\tag{A-27}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}'\cdot\underset{\sim}{e}'=-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\underset{\sim}{v}_L\cdot\{\underset{\sim}{e}'+\frac{1}{e}\underset{\sim}{\nabla}'\mu_n'\}\tag{A-28}$$

h'に対する方程式は本文におけると全く同一になる。h'の連続条件を使うと

$$h'=\alpha' K_0(a/\lambda_L)=一定\tag{A-29}$$

(A-25)から

$$\underset{\sim}{e}'+\frac{1}{e}\nabla'\mu_n'=\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}_L\times\underset{\sim}{h}'=一定\tag{A-30}$$

(A-30)を(A-28)に代入すると右辺は0となるから

$$\underset{\sim}{\nabla}'\cdot\underset{\sim}{e}'=0\tag{A-31}$$

即ち local neutral になつている。従つて μ_n' は

$$(\underset{\sim}{\nabla}')^2\mu_n'=0\tag{A-32}$$

で決められる。従つて

$$\mu_n'=\mu_{n0}'+\sum_{k=1}(\zeta')^k\{A_k^{n'}\cos k\theta+B_k^{n'}\sin k\theta\}\tag{A-33}$$

残りの境界条件を使つて $A_k^{s'}$, $A_k^{n'}$, $B_k^{s'}$, $B_k^{n'}$ を決めると、本文のものと全く同じになる。又、K系にもどせば場の量は本文のものと一致することは無論である。但し、

$$\mu_{n0} = \mu'_{n0} , \quad \mu_{s\infty} = \mu'_{s\infty} + \frac{1}{2} m v_L^2$$

である。

絶対零度ではK'系で問題を解くと非常に簡単になる。しかし有限温度で、超流体領域に正常電子によるOhmic currentがある場合には、K系で考える方が簡単である。

(C) エネルギー・運動量定理

最後にエネルギー運動量定理について述べる。K'系で考えると通常流体やヘリウムの場合との対応が明らかにしやすく、力について理解し易いと思う。エネルギー・運動量定理は本文におけると同様にして

$$\frac{\partial}{\partial t'}\{\underset{\sim}{g}'_s + \underset{\sim}{g}'_f\} + (\rho'_n + \rho'_i)\underset{\sim}{e}' + \frac{1}{c}(\underset{\sim}{j}'_n + \underset{\sim}{j}'_i) \times \underset{\sim}{h}'$$

$$+ \underset{\sim}{\nabla}' \cdot \{-\frac{1}{e}\rho'_s \phi' \overleftrightarrow{1} + \overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{e}') + \overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{h}') + \overleftrightarrow{S}'\} = 0 \qquad \text{(A-34)}$$

となる。但し、ϕ'がv_L/cの程度の量であることを明らさまに使わなければ$(v_L/c)^2$以上を無視した(A-34)において、ϕ'の微分を含む項が他にまだある。しかしそれは以下の議論にとつて不必要であり、式が面倒になるので省略した。$\underset{\sim}{g}'$や$\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{e}')$等は本文で定義した式で各量を$K'$系のものに書き直したもの（即ち $\underset{\sim}{v}_s$, $\rho_s \to \underset{\sim}{v}'_s$, ρ'_s 等とする）である。

前と同様にして力の計算をしよう。(A-34)の左辺を超流体領域にわたつて積分したとき、零でない値を与えるなら、x方向に定速度v_Lでflux lineを動かすためには外力が必要と云うことになる。従つてその反作用としてflux lineに力が働いていることになる。t'微分は0である。まず(A-34)の最後の項を計算しよう。ここから、通常流体やヘリウムの場合マグナス力が導かれる。実際我々の場合にもy方向にのみ残り

$$\int_{\text{superfluid}} [\nabla'(-\frac{1}{e}\rho'_s \phi')]_y d^3r' = \frac{\lambda_L^2 n_s v_L e}{2c}\alpha' \int_0^{2\pi} d\theta \int_{a/\lambda_L}^{\infty} d\zeta \; \zeta K_0(\zeta)$$

$$= \frac{\pi n_s e v_L \lambda_L a}{c}\alpha' \; K_1\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \qquad \text{(A-35)}$$

となる。$\overleftrightarrow{T}$, $\overleftrightarrow{S}$ からの寄与はない。α'は正だから、電子のみをみていれば、＋y方向の大きさが (A-35) で与えられる力でささえてやらなくてはならない。従つて、－y方向の力が core に働いており、いわゆるマグナス力である。しかしながら

$$\int_{\text{superfluid}} [\rho_i' \underset{\sim}{e}' + \frac{1}{c} \underset{\sim}{j}' \times h']_y \, d^3 r' = \rho_i \frac{\pi v_L \lambda_L a}{c} \alpha' K_1 (\frac{a}{\lambda_L}) \tag{A-36}$$

で与えられるイオンからの力がある。$\rho_i = -n_s e$ だから、マグナス力を完全に打ちけす。

結局、flux line には net force は働かないと云うことになる。

文　　献

1) P. G. de Gennes and J. Matricon: Rev. Mod. Phys. 36 (1964) 45,
P. G. de Gennes and P. Nozieres: Phys. Lett. 15 (1965) 216

2) J. Bardeen: Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 747
M. J. Stephen and J. Bardeen: Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 112

3) Y. B. Kim, C. F. Hempstead and A. R. Strnad: Rev. Mod. Phys. 36 (1964) 43
P. W. Anderson and Y. B. Kim: Rev. Mod. Phys. 36 (1964) 39

4) W. De Sorbo: to be published in Phil. Mag.

5) P. H. Borgherds, C. E. Gough, W. F. Vinen and A. C. Warren: Phil. Mag. 10n^0, 104 (1964) p.349

6) F. London: Super fluids Vol.I (1950) p.33, 69

7) L. D. Landau and E. M. Lifshitz: The Classical Theory of Fields (1951)