スピン波の寿命（II）

（12月8日受理）　川　村　　清（東大理）

1．第一報で示した如く $\chi_{+-}(\mathbf{q},\omega_m)$は、次の形に書ける。[イ]

$$\chi_{+-}(\mathbf{q},\omega_m)=\frac{\Delta^{+}(\mathbf{q},\omega_m)\,\Delta^{-}(\mathbf{q},\omega_m)}{\omega_m-\omega(\mathbf{q})-\Pi(\mathbf{q},\omega_m)} \tag{1}$$

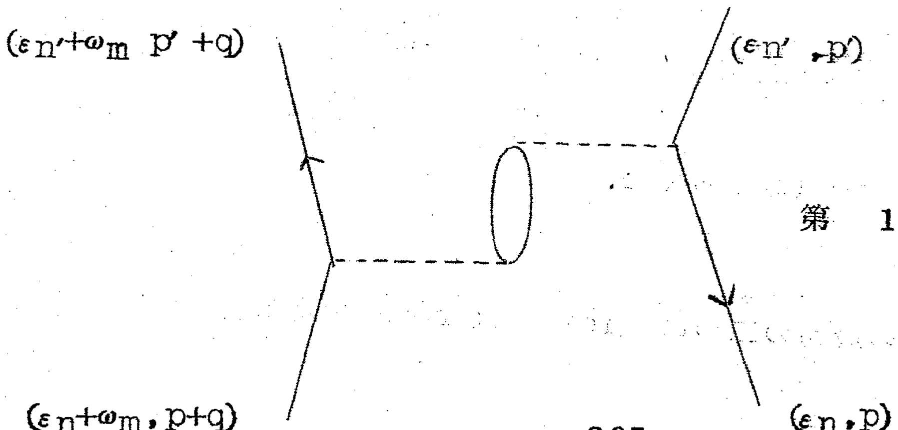
ここで $\omega(\mathbf{q})$は、Hartree-Fock での spin 波の振動数、$\Pi(\mathbf{q},\omega_m)$は Hartree-Fock 以外の self-energy, four vertex function の寄与を全て押込んである。$\Pi(\mathbf{q},\omega_m)$の中、self-energy からの寄与は、electron-hole pair が bound state を作つて、小さな energy をもつことから $\omega_m\rightarrow\omega+i\delta$ とおいた時、その虚部は ω^3に比例し十分低い振動数では、spin-wave の damping には効かないことを示した。この report において、$\Pi(\mathbf{q},\omega_m)$への four vertex function からの寄与も、同時に $0(\omega^3)$であることを示す。Πは、irreducible four uertex function と次の関係にある。

$$\Pi(\mathbf{q},\omega_m)=T^2\,\Sigma_{nn'}\,\Sigma_{pp'}\,\Delta(pq)\,\Gamma_{pp'}^{(0)}(\mathbf{q},\omega_m)\,\Delta(p'q) \tag{2}$$

$$\Delta(p,q)=vG_{p+q\uparrow}(\varepsilon_n+\omega_m)\,G_{p\downarrow}(\varepsilon_n) \tag{3}$$

完全な $\Gamma^{(0)}$を使つての証明は煩雑であるから、その全てをここに示すことはやめて、その一部を demonstrote するにとどめる。詳しいことは、後の機会に譲りたいと思う。

2．$\Gamma_{pp'}^{(0)}(\mathbf{q},\omega_m)$の中で第１図の様なものをとる。式で書くと



第　1　図

$$-v^2 T \Sigma_{n_1 n_2}\ G_{p_1}(\epsilon_{n_1})\, G_{p_2}(\epsilon_{n_2})$$

$$\delta(p_1-p_2-p+p')\,\delta(\epsilon_{n_1}-\epsilon_{n_2}-\epsilon_n+\epsilon_{n'})$$

$$=v^2 \sum_{p_1 p_2} \frac{f^+(\epsilon_{p_1})\, f(\epsilon_{p_2}) - f(\epsilon_{p_1})\, f^+(\epsilon_{p_2})}{\epsilon_n-\epsilon_{n_1}-(\epsilon_{p_1}-\epsilon_{p_2})}\ \delta(p_1-p_2-p+p^1) \qquad (4)$$

と書ける。

$$f(\epsilon)=(1+e^{\epsilon/T})^{-1}$$

$$f^+(\epsilon)=1-f(\epsilon)=(1+e^{-\epsilon/T})^{-1} \qquad (5)$$

(4)は

$$\int d\alpha\ \frac{A(\alpha)}{(\epsilon_n-\epsilon_{n'})-\alpha} \qquad (6)$$

という形に書ける。(7)は $\epsilon_n, \epsilon_{n'}\ ;\omega_m)$ を解析接続すると、$\mathscr{I}m(\epsilon-\epsilon')=0$ の所に cutをもつ。一般に $\Gamma(\epsilon_n, \epsilon_{n'}\ ;\omega_m)$ を解析接続すると、

$$\begin{cases} \mathscr{I}m\,\epsilon=0\ ,\ \mathscr{I}m\,\epsilon'=0\ ,\ \mathscr{I}m\,\omega=0 \\ \mathscr{I}m\,(\epsilon+\omega)=0\ ,\ \mathscr{I}m\,(\epsilon'+\omega)=0 \\ \mathscr{I}m\,(\epsilon-\epsilon')=0\ ,\ \mathscr{I}m\,(\epsilon+\epsilon'+\omega)=0 \end{cases} \qquad (7)$$

という所に(6)の様な cut がある。[2] (6) を(2)に代入すると、

$$\sum_{pp'} \frac{v}{\omega_m-\tilde{\epsilon}_{p+q\uparrow}+\tilde{\epsilon}_{p\downarrow}}\ \frac{v}{\omega_m-\tilde{\epsilon}_{p'+q\uparrow}+\tilde{\epsilon}_{p'\downarrow}}$$

$$\times\, T^2 \Sigma_{nn'} \int d\alpha\, [G_{p\downarrow}(\epsilon_n)-G_{p+q\uparrow}(\epsilon_n+\omega_m)]$$

$$\frac{A(\alpha)}{(\epsilon_n-\epsilon_{n'})-\alpha}\ [G_{p'\downarrow}(\epsilon_{n'})-G_{p'+q}(\epsilon_{n'}+\omega_m)] \qquad (8)$$

$\omega_m \longrightarrow \omega+i\delta$ とおき、$\omega \sim \omega(q)$ とおくと、

$\epsilon \ll \tilde{\epsilon}_{p+q\uparrow}-\tilde{\epsilon}_{p\downarrow}$ 故(8)の最初の二つの factor は real である。

(8)の imaginary part をとると

$$-\Sigma_{pp'}\left\{\left(\mathrm{th}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\omega}{2T}-\mathrm{th}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}}{2T}\right)-A(\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\tilde{\varepsilon}_{p'\downarrow}-\omega)\right.$$
$$\left(\mathrm{th}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}}{2T}+\mathrm{cth}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\tilde{\varepsilon}_{p'\downarrow}-\omega}{2T}\right.$$
$$+\left(\mathrm{th}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}}{2T}-\mathrm{th}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}+\omega}{2T}\right)A(\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}+\omega-\tilde{\varepsilon}_{p'+q\uparrow})\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon_{p'\downarrow}}{2T}\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{cth}\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}+\omega-\tilde{\varepsilon}_{p'+q\uparrow}}{2T}\right\}\cong 4\omega^2\rho_\uparrow(0)\,\rho_\downarrow(0)\,\{A(-\omega)+A(\omega)\} \qquad (9)$$

ここで

$$\begin{cases}\mathrm{th}\dfrac{\chi}{2T}-\mathrm{th}\dfrac{\chi+\omega}{2T}\cong 2\omega\delta(\chi)\\[2mm] \mathrm{th}\dfrac{\chi}{2T}-\mathrm{cth}\dfrac{\chi+\omega}{2T}\cong 2\omega\delta(\chi)\end{cases} \qquad (10)$$

この様に$\omega\longrightarrow 0$で (2)の虚部を計算すると (10)の様に、« spectral function » の変数にωの入つているようなものの和になつて入つて来ることが判る。(9)では、その他、ω^2という factor がたまたま入つて来ているが、一般にはωという factor の入るところもある。

3 . spectral function $A(-\omega)$,$A(\omega)$は、$0(\omega)$であることを次に証明する。
(4)から

$$A(\pm\omega)=v^2\Sigma_{p_1p_2}[f^+(\varepsilon_{p_1})\,f(\varepsilon_{p_2})-f(\varepsilon_{p_1})\,f^+(\varepsilon_{p_2})]$$
$$\times\,\delta(\pm\omega-(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2}))\,\delta(p_1-p_2-p+p') \qquad (11)$$

$$v^2\delta(p_1-p_2-p+p')$$

を方向で積分すると (11)は

$$\int d\varepsilon_{p_1}d\varepsilon_{p_2}\rho(\varepsilon_{p_1})\,\rho(\varepsilon_{p_2})\,v^2(\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2})$$
$$\times\,[f^+(\varepsilon_{p_1})\,f(\varepsilon_{p_2})-f(\varepsilon_{p_1})\,f^+(\varepsilon_{p_2})]\,\delta(\pm\omega-\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2})$$
$$=\int d\varepsilon_1\rho(\varepsilon_{p_1})\,\rho(\varepsilon_{p_1}\mp\omega,\varepsilon_{p_2})$$

$$\times \left[f^{+}(\varepsilon_{p_1}) f(\varepsilon_{p_1} \mp \omega) - f(\varepsilon_{p_1}) f^{+}(\varepsilon_{p_1} \mp \omega) \right] = 0\,(\omega)$$

それ故(9)は、ω^3に比例することになる。このω^3に比例するということは一般の diagram についてたしかめてある。第一報において、一体の Green 関数の self-energy part から来る damping も ω^3に比例することを示した。以上の議論から spin wave は長波長領域で十分長い寿命をもつことがいえた。

文　献

1)　川村　清：物性研寄　5，(1955)
2)　Eliashberg : Soviet Physics JETP. 14 ,886, (1962)