

J.M.Luttinger: 多体フェルミ粒子系に於ける  
超伝導と超流動の新しい機構

宗 田 敏 雄 (教育大)

Luttinger は芸術家的に物理を探求する風格を持つた物理学者で、その話振りは聞く者を魅了する。彼は Kohn との共作について話をし、相互作用の形がどんなものであつても弱く相互作用をしているフェルミ粒子系は、絶対零度まで normal であり得なくて Cooper pair の形成に対して不安定になる新しいメカニズムについて話をした。相互作用は純粹に斥力であつてもよく、問題の系のフェルミ面の sharpness と云うことに関り合いを持つている。

具体例として一個の impurity を metal に入れると、いわゆる Friedel 振動ポテンシャル  $\phi \sim \frac{\cos(k_F r + \varphi)}{r^3}$  を惹起す。今一對の impurity を入れると、その間に有効ポテンシャル  $u^{\text{eff}}(r) \sim \frac{\cos k_F r}{r^3}$  を生じて距離によつては引力になつたり、斥力になつたりするので、引力になつた部分で超伝導が起ることになる。

もつと一般的に spin  $\frac{1}{2}$  を持つた weak short range force が相互に働くフェルミ粒子系の超伝導や超流動を示す条件を調べよう。この超伝導になる規準は Thouless と Gorkov-Pitaevski によつて、今フェルミ面上での運動量の大きさが等しく、向きが反対の quasi particle の散乱振巾を考えると、それが T が  $T_0$  に近づくと、 $\text{const}/T - T_0$  の異常点の振舞いを示すと述べられている。

もつと解析的には、二体のグリーン函数

$$G_{l_1 l_2, l_1' l_2'}(v_1 v_2, v_1' v_2') = \langle T(a_{l_1}(v_1) a_{l_2}(v_2) a_{l_2'}^+(v_2') a_{l_1'}^+(v_1')) \rangle$$

$$(\ell = k, s, A(v) = e^v (\mathcal{N} - \mu N) A e^{-v (\mathcal{N} - \mu N)} \quad (1a)$$

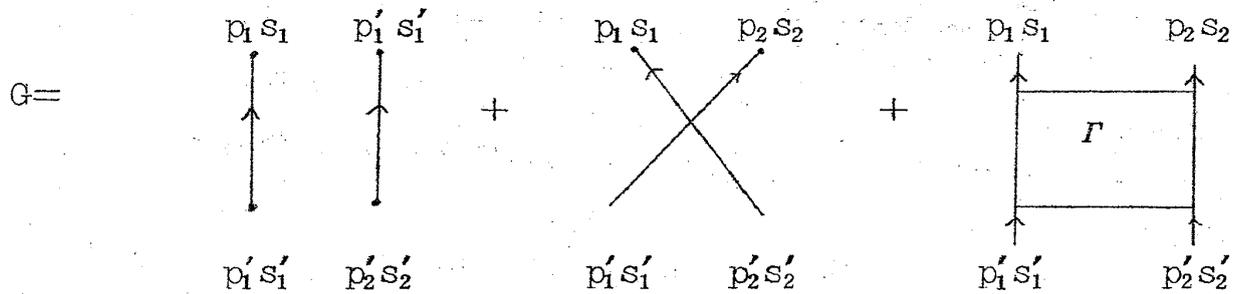
を考える。G の Fourier 展開は

$$G_{l_1 l_2, l'_1 l'_2}(v_1 v_2, v'_1 v'_2) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m'_1 m'_2}}^{\infty} G_{S_1 S_2, S'_1 S'_2}(p_1 p_2, p'_1 p'_2) \\ - [w_1 v_1 + w_2 v_2 - w'_1 v'_1 - w'_2 v'_2] \\ (\omega_m = \frac{\pi i(2m+1)}{\beta}; p=k, \omega) \quad \times e \quad (1b)$$

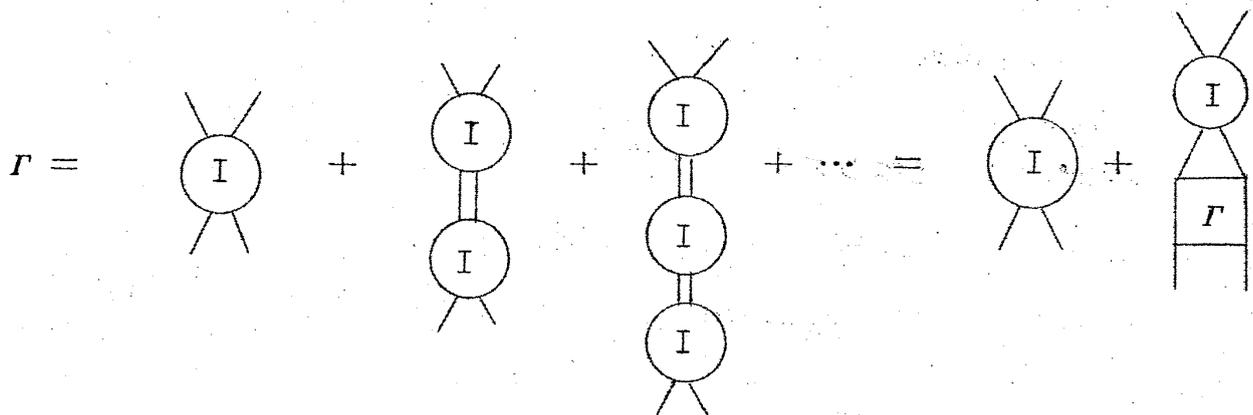
は次の式を満足する。

$$G_{S_1 S_2, S'_1 S'_2}(p_1 p_2, p'_1 p'_2) = G(p_1) G(p_2) [\delta_{p_1, p'_1} \delta_{p_2, p'_2} \delta_S \delta_{p_1 p'_2} \delta_{p_2 p'_1} \delta_S] \\ - \frac{1}{\beta} G(p_1) G(p_2) \Gamma_{S_1 S_2, S'_1 S'_2}(p_1 p_2, p'_1 p'_2) G(p'_1) G(p'_2) \\ \left( \begin{array}{l} \delta_S = \delta_{S_1 S'_1} \delta_{S_2 S'_2} \\ \delta_S = \delta_{S_1 S'_2} \delta_{S_2 S'_1} \end{array} \right) \quad (5)$$

図で表わすと



ここに  $\Gamma$  は vertex 部分と呼ばれるもので、次のグラフで表わせる。



特に  $p_1 = -p_2 = p$  と  $p'_1 = -p'_2 = p'$  の vertex 部分に興味があるので、それを式で書くと

$$\Gamma_{s_1 s_2, s'_1 s'_2}(pp') = I_{s_1 s_2, s'_1 s'_2}(pp') - \frac{1}{2\beta} \sum_{s''_1 s''_2 p''} I_{s_1 s_2, s''_1 s''_2}(p, p'') \times G(p'') G(-p'') \Gamma_{s''_1 s''_2, s'_1 s'_2}(p'' p') \quad (3)$$

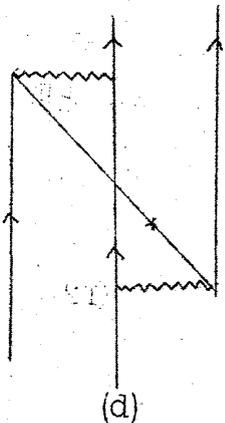
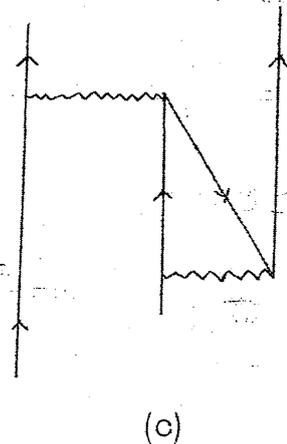
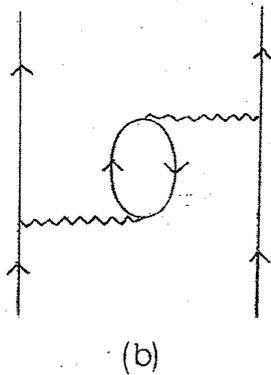
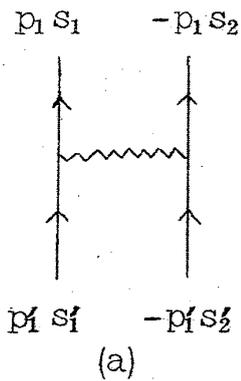
となる。ここで  $I$  は bare の相互作用である。ここで次の定理を主張する。

定理：Eq(3) の smooth な函数  $I_{s_1 s_2, s'_1 s'_2}(p, p')$  を除いて作られた homogeneous な方程式は  $T_C$  で解を持ち、そして pole を惹き起して、超伝導を示す。

今 homogeneous な部分を  $\psi_{s_1 s_2}(p)$  とすると、

$$\psi_{s_1 s_2}(p) = -\frac{1}{2\beta} \sum I_{s_1 s_2, s'_1 s'_2}(p, p') G(p') G(-p') \psi_{s'_1 s'_2}(p') \quad (4)$$

となる。 $\psi_{s_1 s_2}(p)$  は  $\psi_{s_1 s_2}(p) = -\psi_{s_2 s_1}(-p)$  を満足する。今  $\psi$  を相互作用の二次まで考えると次の diagram が考察の対称になる。



これらの寄与を  $K$  と呼び計算する。二体の weak short range のポテンシャルを  $u(q)$  とすると、

$$K^{(a)}(p, p') = u(k - k') \quad (5)$$

$$K^{(b)} = 2 \Sigma_{k''} u^2(k - k') Q_{k''}(k - k', \omega - \omega') \quad (6)$$

$$K^{(c)} = - \Sigma_{k''} u(k - k') [u(k'' + k') + u(k'' - k)] \times Q_{k''}(k - k', \omega - \omega') \quad (7)$$

$$K^{(d)} = - \Sigma_{k''} u(k' - k) u(k'' - k') Q_{k''}(k + k', \omega + \omega') \quad (8)$$

で、ここに  $Q$  は、 $f_k^-$  を  $\epsilon_k = k^2/2m$  のフェルミ分布函数とすると、

$$Q_{k''}(q, z) = \frac{f_{k''}^- - f_{k''-q}^-}{\epsilon_{k''} - \epsilon_{k''-q}} \quad (9)$$

である。二次まで正確に取つたときの eq.(4) は

$$\chi(p) = - \frac{1}{\beta} \Sigma_{p'} K(p, p') G(p') G(-p') \chi(p') \quad (10)$$

となる。ここで

$$G(p') = \frac{1}{\omega' - \tilde{\epsilon}_{k'}} , \quad \omega' = \frac{\pi i (2m' + 1)}{\beta} , \quad \tilde{\epsilon}_{k'} = \frac{k'^2 - k_F^2}{2m} \quad (\hbar = 1)$$

であり、

$$G(p') G(-p') = - \frac{1}{\omega'^2 - \tilde{\epsilon}_{k',2}} = \frac{1}{|\omega'|^2 + \tilde{\epsilon}_{k',2}} \quad (11)$$

である。今は Cooper pairing を生ずるようなものを考えているので  $|k|$  も  $|k'|$  も  $k_F$  の近くである。所で  $\omega'$  は  $\frac{1}{\beta} \sim k_B T_C$  の order であり、 $\epsilon_k = \epsilon_{k_F} \sim \epsilon_B T_F$  で  $T_C \ll T_F$  から、eq.(10) で  $K$  の argument を  $\omega = \omega' = 0$  と取れる。 $\beta \rightarrow \infty$  で

$$\frac{1}{\beta} \Sigma_{\omega'} G(p') G(-p') = \frac{\tanh \frac{\beta \tilde{\epsilon}_{k'}}{2}}{2 \tilde{\epsilon}_{k'}} \frac{\text{sign} \tilde{\epsilon}_{k'}}{\tilde{\epsilon}_{k'}} \quad (12)$$

と云う性質を用いると、方程式 (10)は

$$\chi(\vec{k}) = -\Sigma_{k'} K(\vec{k}, \vec{k}') \frac{\tanh \frac{\beta \tilde{\epsilon}_{k'}}{2}}{2 \tilde{\epsilon}_{k'}} \chi(\vec{k}') \quad (13)$$

となる。運動量の絶対値は、すべて  $k_F$  だから、 $\chi$  と  $K$  は角度だけの函数であるので、

$$\chi(\theta, \varphi) = -\int d\Omega' K(\cos \theta) \frac{mk_F}{(2\pi)^3} \log(\beta E) \chi(\theta', \varphi') \quad (14)$$

となる。今  $K$  を Legendre 展開すると

$$1 = -\frac{k_F m}{(2\pi)^2} K_l \log(\beta \epsilon_l) \quad (15)$$

となり、ここで  $\epsilon_l$  は cut off である。もし  $K_l < 0$  ならば超伝導超流動への転移を示す。

今  $u(r)$  の Fourier transform を  $u(q)$  とすると

$$\int u(q) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{q} = u(r) \quad (16)$$

$$\text{となり、} K_l^{(a)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \text{ となり、} \quad (17)$$

$$K_{\text{sing}}^{(b)} = 2u^2(2k_F) Q(x) \quad (18)$$

$$K_{\text{sing}}^{(c)} = -2u(2k_F) u(0) Q(x) \quad (19)$$

$$K_{\text{sing}}^{(d)} = -u^2(0) Q(-x)$$

となる。ここで

$$Q(x) = \frac{mk_F}{16\pi^2} (1+x) \log(1+x) \quad (20)$$

である。今  $l \gg 1$  の性質をみると

$$K_l^{(b)} = 2 \left( \frac{\ln k_F}{4\pi^2} \right) \frac{(-)^l}{l^4} u^2(2k_F) \quad (21)$$

$$K_l^{(0)} = -2 \left( \frac{\ln k_F}{4\pi^2} \right) \frac{(-)^l}{l^4} u(2k_F) u(0) \quad (22)$$

$$K_l^{(d)} = - \left( \frac{\ln k_F}{4\pi^2} \right) \frac{1}{l^4} u^2(0) \quad (23)$$

となる。これらの和は

$$K_l^{(2)} = - \left( \frac{mk_F}{4\pi^2} \right) \frac{1}{l^4} \{ u^2(0) + 2(-)^l [u(0)u(2k_F) - u^2(2k_F)] \} \quad (24)$$

所で  $l$  が奇数だと、(24)式の大括弧の中は

$$[u(0) - u(2k_F)]^2 + u^2(2k_F) \quad (25)$$

とまとまるので、もし sharp な Fermi 面があれば、必ず奇数の  $l$  で  $T_C$  が存在することが導びかれる。

この上記の結果を  $\text{He}^3$  と metal に応用する。

(1)  $\text{He}^3$

今相互作用として hard core diameter  $a$  の pseudo potential

$$u(r) \sim \frac{4\pi a}{m} \delta(\vec{r}) \quad (26)$$

を取ると

$$\frac{k_B T_C^{(l)}}{\epsilon_l} \sim e^{-\frac{\pi^2}{(k_F a)^2} l^4} \sim e^{-2.5 l^4}$$

なる。今  $k_F a \sim 2$  とすると  $l \geq 2$  で

$$\frac{k_B T_C^{(l)}}{\epsilon_l} \sim e^{-40}$$

となつて、従つて  $\text{He}^3$  では、ここに考察した二次の効果は、一次の項に較べて省略できる。

(2) metal 中の electron

$u(r)$  として screened coulomb を取ると、

$$\frac{kT_c}{\epsilon_l} \sim e^{-(2l)^4}$$

となる。所で或る種の metal で、sharp な Fermi 面があつて、それが異常に flat であると、これが極めて大きく効いてくる。また density of states を増加することによつて顕著な結果を示す。