Excitation Spectrum of He II.(1)

一 柳 正 和（阪大工）

（3月23日受理）

§1 序論

He II の Excitation spectsum を micro. な立場からもとめることは長い間のけん案である。He II を Bose 系とみなした London の idea はその基礎をなすものである。Bogoliubov は弱い相互作用のある場合の Excitation spectrum を得た。しかし、いわゆる roton の部分は説明され得なかつた。

多体系の集団運動を記述する方法としては Pines-Bohm の理論の拡張した Tomonaga[1] の方法が有力である。Tomonaga 理論によれば density $\rho(x)$ の Fourier 成分 ρ_k は longitudinal mode を記述する良い normal coordinate となる。

一方、Drummond と Pines[2] は Plasma 振動の理論において、mode-mode coupling のもとめ方を明らかにし、その effect を研究している。He II において、何を集団運動の座標とするかは着目する物理量によるが、low-lying excitation の議論においては ρ_k を normal coordinate としてよい。Tomonaga 理論に従えば、Drummond-Pines 理論は He II の longitudinal oscillation にそのまま応用することが出来る。

我々は、分布関数 $f_k(v;\ t)$ に対する collisionless Boltzmann 方程式により出発し、Drumond-Piues 理論に従つて mode-mode coupling の excitation spectrum に対する effect をしらべる。

§2 で Tomonaga 流に Field amplitude を定義する。§4 では mode-mode coupling の effect を collission-less Boltzmann 方程式より計算し excitation spectrum は $k \sim k_c$（$=2mc$ c:He の中での音速）* の近くでは k^3 に比例して下に下ることを示す。特に $k=k_c$ のときの excitation evergy は 実験値によくあうことを示す。

§2 Field amplitudes

Tomonaga理論[1]によれば、多体系のlongitudinal oscillationは粒子のdensity $\rho(\mathbf{r})$によつて記述される。

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}) \tag{2.1}$$

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \Sigma_{\mathbf{k}}\, \rho_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{n} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} \tag{2.3}$$

$\mathbf{r}_n$ は粒子の位置座標である。

粒子間の相互作用Hamiltomianは

$$H_{int} = \frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\, v(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r})\left[\rho(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right] \tag{2.4}$$

または

$$H_{int} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mathbf{k}(\neq 0)}\,\varphi_{\mathbf{k}}^{*}\,\rho_{\mathbf{k}} \tag{2.5}$$

と書けるものとする。 $\varphi_{\mathbf{k}}$ は粒子間の相互作用potential のFourier 成分である。$\varphi_{\mathbf{k}} > 0$ (for all k) と仮定する。

ここで 電磁気的類推からfield energy を

$$H_{field} \equiv \frac{1}{8\pi}\Sigma_{\mathbf{k}}^{*}\, E_{\mathbf{k}} \quad (k \lesssim k_c) \tag{2.6}$$

と定義する。ただし

$$E_k = -i\sqrt{4\pi\varphi_k}\cdot\rho_{\mathbf{k}} \tag{2.7}$$

はfield amplitude であり、系の集団運動を記述する基準座標である。

なお、量

$$H_s \equiv H_{int} - H_{field} \tag{2.8}$$

---

*) (前ページ) (4.18) 式のfoot-note をみよ。

は粒子間のshort-rangeの相互作用である。

§3 Dispersion relation

collisionless Boltzmann 方程式は

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + v\cdot k f_k = -\left(\frac{k^2\varphi_k}{4\pi m^2}\right)^{1/2} E_K \nabla_v f_0 - \Sigma' \left(\frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2}\right)^{1/2} E_{k-q}\cdot\nabla_v f_q \tag{3.1}$$

である。ただし $f_k(v,t)$ は分布関数の Fourier 成分である：

$$\rho_k = \int d^3v\cdot f_k(s\,;\,t) \tag{3.2}$$

(3.1)式の第二項はnon-linear term である。linear の範囲では

$$f_k^{(0)} = \left(\frac{k^2\varphi_R}{m^2}\right)^{1/2}\cdot \int_{-\infty}^{t} dt'\, G_k(t-t') E_k(\epsilon') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \tag{3.3}$$

$$G_k(+) \equiv e^{-ikvt} \tag{3.4}$$

この式を用いれば、定義(2.7)より field amplitude は

$$E_k = ti\sqrt{4\pi\varphi_k}\sqrt{\frac{k^2\varphi_k}{m^2}} \int_{-\infty}^{t} tt'\, G_k(t-t') E_k(f') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \tag{3.5}$$

となる。ここで $E_k(t')$ を

$$E_k(t') = E_k(t)\, e^{-i(s_k - i\delta)(t-t')} \quad (\delta\to 0^+) \tag{3.6}$$

と仮定し、

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{m}{k}\cdot k\frac{\partial f_0}{\partial v} \simeq \frac{m}{k}\left[f_0(p+k) - f_0(p) \right] \tag{3.7}$$

に注意すれば

$$E_k(t) = E_k(t)\frac{k^2}{m} N\varphi_k / s_k^2 \tag{3.8}$$

を得る。すなわち、

$$\epsilon(k.s_k) = 1 - \frac{k^2}{m} N \varphi_k / s_k^2 = 0 \qquad (3.9)$$

ただし、我々は $f_0(p) = N \cdot \delta(v)$ と仮定した。

(3.9)式により s_k は

$$\begin{aligned} s_k^2 &= \frac{k^2}{m} N \varphi_k = k^2 c^2 \\ c^2 &= \frac{N}{m} \varphi_k \end{aligned} \qquad (3.10)$$

となる。s_k が linear theory での mode E_k に附随する energy である。

§ 4 mode couplings

Drummondら[2)]は collisionless Boltzmann 方程式から出発して、plasma の nonlinear oscillation を論じた。彼らは mode coupling の結果 spectrum が distortion されることを示した。この節では、He II 中での fidld E_k の mode coupling の影響を論ずる。

(3.1)式を iteration で解くと、$f_k(t)$ は

$$\begin{aligned} f_k = &-\left(\frac{k^2\varphi_k}{4\pi m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{t} dt' G_k(t-t') E_k(t') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \\ &+ \sum_q{}' \frac{q^2\varphi_q}{4\pi m^2} \cdot \left(\frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{t} dt' G_k(t-t') E_{k-q}(t') \frac{\partial}{\partial v} \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_q(t'-t'') E_q(t'') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \\ &- \sum_{qq'} \left(\frac{q'^2\varphi_{q'}}{4\pi m^2} \frac{(q-q')^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2} \frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{t} dt' G_k(t-t') E_{k-q}(t') \frac{\partial}{\partial v} \\ &\int_{-\infty}^{t''} dt'' G_q(t-t') E_{q-q'}(t') \frac{\partial}{\partial v} \int_{-\infty}^{t''} dt'' G_{q'}(t''-t''') E_{q'}(t''-t''') E_{q'}(t''') \frac{\partial}{\partial v} f_0 + \cdots \end{aligned} \qquad (4.1)$$

となる。したがつて、$E_k(t)$ は

$$E_k(t) = i\sqrt{\varphi\pi\varphi_k}\{-(\frac{k^2\varphi_k}{4\pi m^2})^{1/2}\int_{-\infty}^{t}dt'\,G_k(t-t')\frac{\partial}{\partial v}+\sum_q{}'(\frac{q^2\varphi_q}{4\pi m^2}\frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2})^{1/2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{t}dt'\,G_k(t-t')E_{k-q}(t')\frac{\partial}{\partial v}\int_{-\infty}^{t'}dt''G_q(t'-t'')E_q(t'')$$

$$+[(E\cdot E\cdot E)]\text{ の type の term}] + \cdots\} \qquad (4.2)$$

（4．2）式より second order の E_k の変化 $E_k^{(2)}$ は

$$E_k^{(2)}(t) = \int d^3v\{-i\sqrt{4\pi\varphi_k}(\frac{k^2\varphi_k}{4\pi m^2})^{1/2}\int_{-\infty}^{t}dt'G_k(t')E_k^{(2)}(t')\frac{\partial}{\partial v}f_0$$

$$+\sum_q{}'i\sqrt{4\pi\varphi_k}(\frac{\delta^2\varphi_q}{4\pi m^2}\frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2})^{1/2}\int_{-\infty}^{t}dt'G_k(t-t')E_{k-q}(t')\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\times\int_{-\infty}^{t'}dt''G_q(t'-t'')E_q(t'')\frac{\partial}{\partial v}f_0 \qquad (4.3)$$

となる。ただし（4．3）式で E_k と書いた量は $E_k^{(0)}$ を意味する。§3と同様にして

$$\left.\begin{aligned}E_k^{(2)}(t') &= E_k^{(2)}(t)\,e^{iw_k(t-t')}\\ E_k(t') &= E_k(t)\,e^{is_k(t-t')}\end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

と仮定すれば、（4．3）式により　我々は

$$E_k^{(2)}(t) = \frac{1}{\epsilon(k,\omega_k)}(\frac{1}{4\pi mN})^{1/2}\sum_q{}'E_{k-q}(t)E_q(t)\frac{ik\cdot s_{k-q}}{s_k^2} \qquad (4.5)$$

$$s_k = s_{k-q}+s_q \qquad (4.6)$$

を得る。$\epsilon(k,\omega_k)$ は（3．9）で定義した。

3次の order も同様にしてもとまる。それは、次の二つの type より成る。

$$\left.\begin{aligned}&\text{type I} : E_{k-q}(t)E_q^{(2)}(t)\text{ の type の項}.\\ &\text{type II} : E_{k-q}(t)E_{q-q'}(t)E_{q'}\text{ の type の項}\end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

type Iの計算は$E_k^{(2)}(t)$のそれと全く同じである。

$$E_k^{(3)}(t:I) = -\frac{1}{\epsilon(k,\omega_k)} \sum_{qq'} E_{k-q}\, E_{q-q'}\, E_{q'}(t) \times$$
$$\times\{\frac{1}{\epsilon(q\omega_q)} \frac{q'\cdot s_{q-q'}}{(s_{q-q'}+s_{q'})^2} \frac{k\cdot s_{k-q}}{(s_{k-q}+s_{q-q'}+s_{q'})^2} + \tag{4.8}$$
$$+\frac{1}{\epsilon(k-q+q',\omega_{k-q-q'})} \frac{(k-q+q')s_{k-q}}{(s_{k-q}+s_{q'})^2} \frac{k.s_{k-q'}}{(s_{k-q'}+s_{q'})^2}\}$$

$$s_k = s_{k-q}+s_{q-q'}+s_{q'}, \quad s_q = s_{q-q'}+s_{q'} \tag{4.9}$$

同様にして、

$$E_k^{(3)}(t:II) = -\frac{1}{\epsilon(k\omega_k)} \frac{k^2}{4\pi mN} \sum_q E_{k-q}\, E_{q-q'} E_{q'}(t) \cdot s_{k-q'} s_{q-q'} \times$$
$$\frac{1}{(s_{k-q}+s_{q-q'}+s_{q'})^2} \times$$
$$\frac{1}{s_{q-q}+s_{q'}} \{\frac{1}{s_{k-q}+s_{q-q'}+s_{q'}} + \frac{q}{k}\frac{1}{s_{q-q_1}+s_{q'}}\} \tag{4.10}$$

よく知られているように、field E_k にともなうenergy s_k は

$$s_k = \frac{1}{2}|E_k|^2 \tag{4.11}$$

で与えられる。このことから $E_k^{(2)}$, $E_k^{(3)}$はenergy s_k への補正であることが分る。すなわち、spectrum のshift を$\triangle_k$とすると、

$$\triangle_k \cong \{\frac{1}{2}|E_k^{(2)}|^2 + \frac{1}{2}E_k^* E_k^{(3)} + \frac{1}{2}E_k^{*(3)}\}_{\text{in-phase}} \tag{4.12}$$

$$w_k = s_k + \triangle_k \tag{4.13}$$

となる。

まず (4.5)式より、我々は

$$|E_k^{(2)}(t)|^2_{\text{in-phase}} = \left|\frac{1}{\epsilon(k,\omega_k)}\right|^2 \frac{1}{4\pi m N}\sum_q |E_{k-q}|^2\cdot|E_q|^2\frac{k^2}{s_k^3}\, s_{k-q} \tag{4.14}$$

を得る。同様にして

$$\left[E_k^*\cdot E_k^{(3)}+E_k E_k^{*(3)}\right]_{\text{in-phase}} = -2\,\frac{1}{\epsilon(k,\omega_k)}\,\frac{1}{4\pi m c^2 N}\sum_q |E_{k-q}|^2\cdot|E_q|^2\frac{s_{k-q}}{q}\left(\frac{1}{\epsilon(q,\omega_q)}+3\right) \tag{4.15}$$

（4．14）と（4．15）式を（4．12）に代入し、

$$\epsilon(k,\omega_k)=\epsilon(k,s_k)+\Delta_k\cdot\frac{\partial\epsilon}{\partial s_k}+\cdots$$

$$\cong \Delta_k\cdot\frac{2}{s_k} \tag{4.16}$$

に注意すれば　Δ_k は

$$\Delta_k = -\frac{1}{(4\pi)^3}\frac{1}{\Delta_k}\frac{1}{m^2\rho_0}k_c^2\cdot k\int_0^k dq\, q^2(k-q)^2\left\{\frac{q}{\Delta_q}-\frac{q}{2\Delta_k}+6\right\} \tag{4.17}$$

$$R_c=2mc \tag{4.18*}$$

となる。すなわち

$$\Delta_k^2 = -\frac{1}{(4\pi)^3}\frac{1}{5m^2\rho_0}k_c^2\cdot k^6 - \frac{1}{(4\pi)^3}\frac{1}{m^2\rho_0}k_c^2\, k\int_0^k dq\, q^3(k-q)^2\left(\frac{1}{\Delta_q}-\frac{1}{2\Delta_k}\right) \tag{4.19}$$

となる。この式より、$k\sim k_c$ ではΔk は、

$$\Delta_k = -\beta k^3+\gamma k^5 \tag{4.20}$$

---

*）k_c を決定するにはいろいろ問題があるが　ここでは $s_{k_c}=\frac{1}{2m}k_c^2$ より cut-off を決めた。この k_c がroton のmomentumに程んど一致する点は興味がある。

をしていることが予想される。(4.20)を(4.19)に代入すれば

$$\beta^2 k^6 - 2\beta\gamma k^8 \cong -\frac{1}{(4\pi)^3}\frac{1}{5m^2\rho_0}k_c^2 k^6 + \frac{1}{(4\pi)^3}\frac{1}{3m^2\rho_0}k_c^2 k^4 \frac{1}{\beta}$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4\pi}\sqrt[3]{\frac{1}{3m^2\rho_0}} \\ \gamma &= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{10}\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{m^2\rho_0}\right)^{2/\beta} \ll \beta \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

となる。したがつて $k \sim k_c$ では excitation speetrum は

$$\omega_k \cong ck - \beta k^3 \tag{4.22}$$

となつていることが示される。

今

$$m = 6.4\times10^{-24}\,\mathrm{gr},\quad c = 2\times10^4\,\mathrm{cm/sec}\quad \rho_0 = 0.12$$

とすると

$$\omega_{k_c} \simeq 16\times10^{-16}(\mathrm{ery}) \simeq 11\,(^\circ k) \tag{4.23}$$

となり実験値に近い値を示すことが分る。

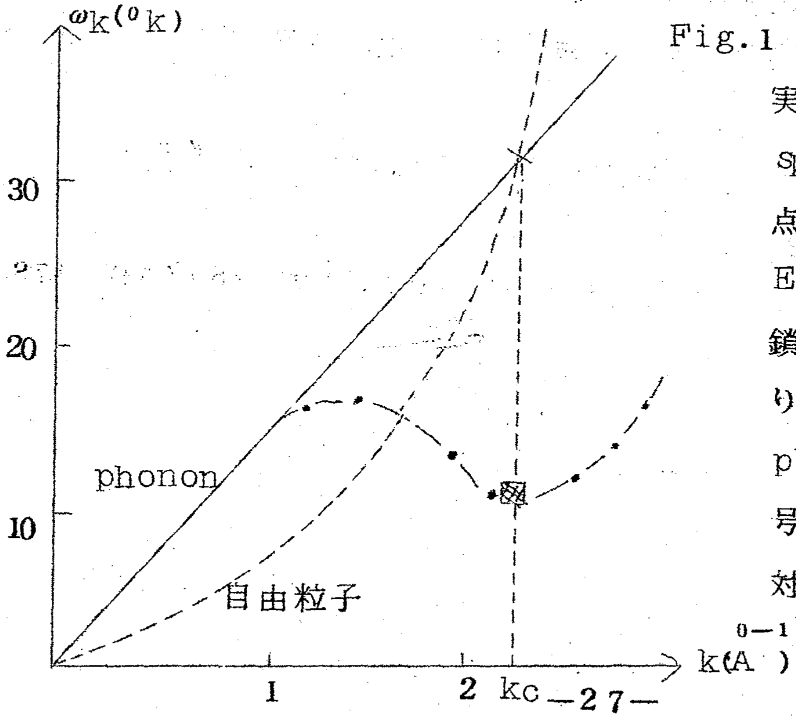

Fig.1 Excitation
実線は phonon の spectrum $s_k = ck$ を示す。
点線は自由粒子のそれで $E(k) = \dfrac{k^2}{2m}$ である。
鎖線は mode couplingにより distortion をうけた phononの spetru であり記号は計算値を示す。($k>k_c$に対しては予想)

一柳正和

§5 討論

我々は collisionless Boltzmann方程式を基礎に、field $E_k(t)$ の間のmode coupling の影響を論じた。Drummond-Pines theory を weakly interacting Bose 系に適用した。§4 に示したように、$E_k(t)$ のmode coupling はphonon の spectrum が大きなdistortion をうけることが分つた。特にcut-off wawe vector k_c の近傍では このdistortion はk^3 に比例する。$k=k_c$ の値のとき、excitation energy の計算値は実験値にほとんど一致している。この一致は、k_c のとり方に強く依存している。

k_c の定義には問題が残されている。この論文ではk_c をphonon と自由粒子のkinetic energy が等しくなる wave vector と定義した。

$$s_{kc}=\frac{k_c^2}{2m} \quad \text{すなわち} \quad k_c=2mc$$

次の問題はfield amplitudes $E_k(t)$を量子化することである。
この手続きはBohm-Pines theory と全く同じである。しかし、§4で論じたmodes 間のcouplingを考察するときは、彼らの使用したものとちがつたcanonical transformation を行なわなくてはならない。この問題は 目下考察中であるので次の回に報告する予定である。

後りに、御指導下さつた阪大（教）の西山敏之先生に感謝致します。

文　献　1）S.Tomonaga,Prog.theor.phys 13 ('55) 467, 482

2）W.E.Drummond etal, Ann.Phys 28 ('64) 478