

## Fourier 変換の漸近形について

広池和夫 (東北大工)  
福井芳彦

(7月14日受理)

## §1 まえがき

距離  $r$  だけの函数  $v(r)$  の Fourier 変換をつぎの式で定義しよう。

$$V(k) = \int v(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}. \quad (1)$$

通常われわれは、 $r \rightarrow \infty$  (または  $r \rightarrow 0$ ) における  $v(r)$  の様子が、 $k \rightarrow 0$  (または  $k \rightarrow \infty$ ) のときの  $V(k)$  の様子に反映されるであろうというイメージを持っている。実際、このイメージを定量的に公式化して、物理の問題に応用している例が最近見受けられる。所が筆者等が見た範囲ではそれらの公式はいづれも証明や reference なしに提出されている。筆者等はそれらの公式を使う必要があったので、手許にある数学の本を調べてみたが、なかなか見つからず、僅かに Titchmarsh<sup>2)</sup> の本にそれらしきものを発見した。しかし、その本にある定理のままでは、筆者等が応用しようと思っている対象には不十分なので、定理の拡張を試みた。その結果、筆者等なりの公式を作ることができたので、このノートに公式を発表する次第である。全くの数学で、「物性研究」と銘うった雑誌のページを浪費するのは気が引けるが、将来同じような公式を使いたい人が現われたばあい、その人の時間の無駄を救うことになれば幸いである。書き落したが、前述のイメージが破れる簡単な例は、積分  $\int v(r) d\vec{r}$  が収束するばあいで、このときは  $V(0)$  が存在するから、 $r \rightarrow \infty$  での  $v(r)$  の様子がどうであつても  $k \rightarrow 0$  で  $V(0)$  となる。

物理的に興味があるのは、1次元、2次元、3次元であるから、そのときの (1) を具体的に書くとつぎのようになる。

広池、福井

$$V(k) = 2 \int_0^{\infty} v(r) \cos kr \, dr \quad (1 \text{次元}) \quad (2-1)$$

$$V(k) = 2\pi \int_0^{\infty} rv(r) J_0(kr) \, dr \quad (2 \text{次元}) \quad (2-2)$$

$$V(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} rv(r) \sin kr \, dr \quad (3 \text{次元}) \quad (2-3)$$

ここで、 $J_0(kr)$  は Bessel 函数である。 $J_{\pm \frac{1}{2}}(kr)$  が essential には  $\sin kr$ ,  $\cos kr$  と同じものだということから、つぎの式で定義される Hankel 変換を考えることにする。

$$F_{\nu}(k) = \int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(kx) \sqrt{kx} \, dx, \quad \nu \geq -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$J_{\nu}(kx)$  は  $\nu$  次の Bessel 函数である。次節で  $F_{\nu}(k)$  の漸近形を調べる。その結果で  $\nu = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$  とおけば  $V(k)$  の漸近形が分るわけで、それを §3 に書くことにする。

## §2 数 学

Bessel 函数の性質のうち、必要なものを証明なしで書いておく。

$$z \sim 0 \text{ のとき } J_{\nu}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}$$

$$|z| \rightarrow \infty \text{ のとき } J_{\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{\nu} J_{\nu}(az)] = az^{\nu} J_{\nu-1}(az)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_{\nu}(az)] = -az^{-\nu} J_{\nu+1}(az)$$

$$\int_0^{\infty} z^{s-1} J_{\nu}(az) \, dz = \frac{2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{a^s \Gamma\left(\frac{\nu-s}{2} + 1\right)} ; a > 0, \nu > -s > -\frac{3}{2}$$

$f(x)$  としては(3)の右辺の積分が  $k > 0$  で常に収束するものだけを考える。特に

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  とする。

Lemma :  $0 < \alpha < \nu + \frac{3}{2}$  で、かつ  $x^{\alpha+1} f(x)$  がすべての  $x \geq 0$  に対して有界であるとする。そのとき、 $x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) で  $f(x) \sim x^{-\alpha}$  ならば、 $k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow 0$ ) で

$$F_\nu(k) \sim \frac{2^{-\alpha+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu-\alpha+\frac{3}{2}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}{2}\right)} k^{\alpha-1} + o(k^{\alpha-1}) \quad (4)$$

となる。

[証明] まず  $x \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  のときを証明する。(3)の積分を3つに分けて  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  とする。

$$F_\nu(k) = \int_0^{d/k} + \int_{d/k}^{L/k} + \int_{L/k}^\infty \equiv I_1 + I_2 + I_3$$

$I_1$ は部分積分を行なつてつぎのようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_0^{d/k} f(x) J_\nu(kx) \sqrt{kx} \, dx = \int_0^{d/k} f(x) \frac{x^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k}} \frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(kx)] \, dx \\ &= \frac{1}{k} f(x) \sqrt{kx} J_{\nu+1}(kx) \Big|_{x=0}^{x=d/k} - \frac{1}{k} \int_0^{d/k} \left[ f'(x) - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x)}{x} \right] J_{\nu+1}(kx) \sqrt{kx} \, dx \\ &= \frac{1}{k} f\left(\frac{d}{k}\right) \sqrt{\frac{d}{k}} J_{\nu+1}(d) - \frac{1}{k} O\left\{ \int_0^{d/k} x^{-\alpha-1} J_{\nu+1}(kx) \sqrt{kx} \, dx \right\} \\ &= O(k^{\alpha-1} d^{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}). \end{aligned}$$

$I_3$  も同様にして

$$I_3 = O(k^{\alpha-1} L^{-\alpha})$$

となる。 $I_2$  を調べるために、つぎの式で  $I_2$  を定義する。

$$I_2 \equiv \int_{d/k}^{L/k} [x^\alpha f(x) - 1] x^{-\alpha} J_\nu(kx) \sqrt{kx} \, dx.$$

さらに函数  $m(\xi)$  を

$$m(\xi) \equiv \max_{0 \leq x \leq \xi} |x^\alpha f(x) - 1|$$

広池、福井

で定義すると、 $\lim_{\xi \rightarrow 0} m(\xi) = 0$  である。 $I'_2$  の大きさは

$$\begin{aligned} |I'_2| &\leq m\left(\frac{L}{k}\right) \int_{\Delta/k}^{L/k} x^{-\alpha} |J_\nu(kx) \sqrt{kx}| dx \\ &= k^{\alpha-1} m\left(\frac{L}{k}\right) c(\Delta, L) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $c(\Delta, L)$  は  $\Delta, L$  には関係するが  $k$  には無関係な定数である。一方、 $I_2$  はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Delta/k}^{L/k} x^{-\alpha} J_\nu(kx) \sqrt{kx} dx + I'_2 \\ &= \int_0^\infty - \int_0^{\Delta/k} - \int_{L/k}^\infty + I'_2 \\ &= k^{\alpha-1} \frac{2^{-\alpha+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}{2}\right)} + O(k^{\alpha-1} \Delta^{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}) + O(k^{\alpha-1} L^{-\alpha}) + I'_2. \end{aligned}$$

したがって、 $F_\nu(x)/k^{\alpha-1}$  を考えると、 $I_1/k^{\alpha-1}$ 、 $I_3/k^{\alpha-1}$  および  $I_2$  の中の第二項、第三項は  $\Delta$  を十分小さく、 $L$  は十分大きくとることによつて、任意に小さくできる。そのように選ばれた  $\Delta, L$  の値に対して、 $k \rightarrow \infty$  とすれば  $I'_2/k^{\alpha-1}$  は  $m\left(\frac{L}{k}\right)$  のため 0 となる。これで、 $x \rightarrow 0$ 、 $k \rightarrow \infty$  のときの Lemma が証明できた。 $x \rightarrow \infty$ 、 $k \rightarrow 0$  のときの証明も全く同様で、ただ  $I_2$  が小さくなることを証明するとき、上の  $m(\xi)$  の代りに

$$M(\xi) \equiv \max_{\xi \leq x} |x^\alpha f(x) - 1|$$

を定義して、 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} M(\xi) = 0$  を利用すればよい。

証明終

上の Lemma は  $f(x)$  の微分可能を仮定してあるが、この制限はいわゆる区分的に滑らかというところまでゆるめることができる。すなわち、 $f(x)$  が  $x=a$  で有限の不連続を持ち、 $0 < x < a$ 、 $a < x < \infty$  では微分可能であるとすると、不連続点からの contribution として、 $k \rightarrow \infty$  のときには  $I_3$  に  $O(1/k)$ 、 $k \rightarrow 0$  のときには  $I_1$  に  $O(k^{\nu+\frac{1}{2}})$  の項が現われるが、これらの項はいずれも  $k^{\alpha-1}$  くらべて省略できる。

Lemma では  $\alpha$  の値が  $0 < \alpha < \nu + \frac{3}{2}$  という範囲に限られているが、この制限をゆるめることを考えよう。まず、 $x \rightarrow \infty, k \rightarrow 0$  のばあいから始める。このときは、 $x \rightarrow \infty$  での  $f(x)$  の性質に着目しているのであるから、 $x \rightarrow \infty$  以外での  $f(x)$  の性質は十分素直であると仮定しておく。(3)の積分が収束しなければいけないことから、 $\alpha$  の値は負にはなれないことは明らかである。したがって、 $\alpha$  の値の範囲を拡張できるのは  $\alpha > \nu + \frac{3}{2}$  の方向である。 $\alpha > \nu + \frac{3}{2}$  として、

$$f_1(x) \equiv \int_x^\infty f(y) y^{\nu + \frac{1}{2}} dy$$

を定義すると、 $f_1(x)$  は確かに存在して、

$$f_1(x) \sim \frac{1}{\alpha - \nu - \frac{3}{2}} x^{-(\alpha - \nu - \frac{3}{2})} \quad (x \rightarrow \infty)$$

である。(3)の右辺で部分積分を行なつてつぎの式が得られる。

$$F_\nu(k) = \frac{k^{\nu + \frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \int_0^\infty f(x) x^{\nu + \frac{1}{2}} dx - k \int_0^\infty f(x) x^{-\nu - \frac{1}{2}} J_{\nu+1}(kx) \sqrt{kx} dx.$$

$\nu + \frac{7}{2} > \alpha > \nu + \frac{3}{2}$  とすると、上式の右辺の第2項に対しては Lemma が使えて(上述のように、Lemma の通用できる条件のうち、 $\alpha$  の制限以外は満足されていると仮定して)、 $k \rightarrow 0$  のとき、

$$F_\nu(k) = \frac{k^{\nu + \frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \int_0^\infty f(x) x^{\nu + \frac{1}{2}} dx + k^{\alpha-1} \frac{2^{-\alpha + \frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\nu + \frac{3}{2} - \alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\nu + \alpha + \frac{1}{2}}{2})} + O(k^{\alpha-1}), \quad (5)$$

となる。右辺の第2項は Lemma (4) と形式的に同じものであるが、いま考えている  $\alpha$  の範囲に対しては第1項にくらべて省略できる。

第1項は  $f(x) \sim x^{-\alpha}$  という  $f(x)$  の漸近形だけではきまらないから、 $k \rightarrow 0$  での  $F_\nu(k)$  の形は  $x \rightarrow \infty$  での  $f(x)$  の漸近形だけではきまらない。§1 であげた例は、このことの特珠なばあいになつている。

つぎに、 $x \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  のときに  $\alpha$  の範囲を拡げることを試みる。このばあい

広池、福井

には、 $\alpha$ の範囲を $\alpha > \nu + \frac{3}{2}$ の方向へ拡げることは、(3)の積分の原点における収束性から不可能である。したがって、 $\alpha \leq 0$ のほあいを考える。 $x \rightarrow 0$ での $f(x)$ の性質に着目しているから、 $x \rightarrow 0$ 以外での $f(x)$ の性質は十分素直で、下に現われる種々の積分の $x \rightarrow \infty$ での収束性は問題がないと仮定しておく。種々の函数のHankel変換が現われるので、便宜上、(3)をつぎのように書くことにする。

$$F_\nu(k; f) \equiv \int_0^\infty f(x) J_\nu(kx) \sqrt{kx} dx \quad (3')$$

$f(x)$ は繰返し微分可能であると仮定して、右辺に部分積分を行なうと、

$$F_\nu(k; f) = -\frac{1}{k} \left[ F_{\nu+1}(k; f') - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) F_{\nu+1}\left(k; \frac{f}{x}\right) \right] \quad (6)$$

という関係が得られる。この関係を繰返し使うと、 $n$ を正数としてつぎの関係が得られる。

$$F_\nu(k; f) = \left(-\frac{1}{k}\right)^n \sum_{r=0}^n (-1)^r a_r^{(n)} F_{\nu+n}\left(k; \frac{f^{(n-r)}}{x^r}\right). \quad (7)$$

ここで $a_r^{(n)}$ は $k$ に無関係な定数である。 $a_r^{(n)}$ に対する漸化式は容易に得られるが書くのは省略する。ただ、その漸化式での初期条件にあたるものは、(6)から分かるように

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = \nu + \frac{1}{2}$$

である。なお、(7)で $f^{(n-r)}$ は $f(x)$ の $(n-r)$ 次導函数である。 $x \rightarrow 0$ で $f(x) \sim x^{-\alpha}$ と仮定しているわけだが、さらに

$$\frac{f^{(n-r)}}{x^r} \sim (-1)^{n+r} \alpha(\alpha+1)\dots\{\alpha+(n-r-1)\} x^{-\alpha-n}, \quad r=0, 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

を仮定し、かつ $-n < \alpha < \nu + \frac{3}{2}$ で(7)の右辺の各項にLemmaが使えると仮定すると、 $k \rightarrow \infty$ で

$$F_\nu(k; f) \sim \frac{2^{-\alpha + \frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu + \frac{3}{2} - \alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \alpha + \frac{1}{2}}{2}\right)} k^{\alpha-1} + O(k^{\alpha-1}), \quad (9)$$

$$-n < \alpha < \nu + \frac{3}{2}$$

となることが証明できる。証明は省略するが、 $a_T^{(n)}$  に対する漸化式を使えばよい。(9)は形式的には Lemma の(4)と全く同じであり、 $n$ は任意の正整数でよいから。 $x \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  のときには、 $\alpha < \nu + \frac{3}{2}$  のすべての  $\alpha$  の値に対して(4)が成り立ちそうであるが、制限が2つある。その1つは、(4)の第1項の分母にある  $\Gamma$  関数が  $\infty$  になるばあいである。よく知られた  $\Gamma$  関数の性質から、 $\alpha$  の値が

$$-\alpha = 2m + \nu + \frac{1}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

のときそのようなことが起り、(4)の第1項は0となり、 $k \rightarrow \infty$  での  $F_\nu(k)$  の漸近形は、 $x \rightarrow 0$  における  $f(x) \sim x^{-\alpha}$  の漸近形から定まることになる。もう1つの制限は、 $f(x)$  の導函数に不連続があるばあいで、(7)のように部分積分を繰返しているとき、 $\delta$ -函数が現われ、それからの contribution が(9)の第1項より大きくなってしまふ。従つて(9)が成立つのは  $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  が存在して連続であり、 $f^{(n)}(x)$  に初めて有限の不連続が現れる場合である。勿論 (8)の仮定および(7)の各項に Lemma が使えるための  $f^{(n-r)}(x)/x^r$  に対する条件も満足されていなければならない。

以上のことをまとめるとつぎのようになる。 $x \rightarrow \infty, k \rightarrow 0$  に対する Lemma は  $\alpha$  の範囲を  $0 < \alpha < \nu + \frac{3}{2}$  以外には拡張できない。 $x \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  に対する Lemma は、 $f(x)$  が繰返し微分可能で、かつ(4)の第1項が0にならないければ(もつと数学的な条件はさらに必要であるが)、 $\alpha < \nu + \frac{3}{2}$  の範囲で成り立つ。 $f(x)$  の導函数のうち、はじめて  $f^{(n)}(x)$  に有限の不連続が現われるとき、 $-n \leq \alpha < \nu + \frac{3}{2}$  で Lemma の結果が成り立つ。

### §3 む す び

前節の結果を §1 の (2-1~3) で定義された Fourier 変換にほんやくすることは簡単である。まず、Lemma をそのままほんやくするとつぎのようになる。1次元、2次元、3次元をまとめて  $d$ -次元と書く。

$\frac{d-1}{2} < \beta < d$  の  $\beta$  の値に対して、 $r^{\beta+1}v(r)$  がすべての  $r \geq 0$  において有界であるとする。そのとき、 $r \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) で  $v(r) \sim r^{-\beta}$  ならば、 $k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow 0$ ) で

$$V(k) \sim C_d k^{\beta-d} \sin \frac{\beta\pi}{2} + o(k^{\beta-d}) \quad (11)$$

である。ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 2\Gamma(1-\beta) \\ C_2 &= 2^{2-\beta} \left\{ \Gamma\left(\frac{2-\beta}{2}\right) \right\}^2 \\ C_3 &= 4\pi\Gamma(2-\beta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$r \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow 0$  のときには、 $\beta$  の値の範囲は上記の範囲以上に拡張できない。Fisher<sup>1)</sup> は  $d=2$  のばあい、 $0 < \beta < 2$  で (11) が成立するという公式をあげているが、これは  $\frac{1}{2} < \beta < 2$  としなければならない。 $\beta < \frac{1}{2}$  では Fourier 変換そのものが存在しなくなる。ただし、(11) そのものは  $\beta$  が  $\frac{1}{2}$  より小さくなっても異常なことは起らないから、ある意味での解析接続的なことは考えられるかも知れないが、ここでは Fourier 変換が存在しないことを論ずることは無意味であるという立場を取っておく。3次元に対しては (11) は Fisher の公式と同じである。

$r \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  に対しては、 $\beta$  の範囲を  $\beta < \frac{d-1}{2}$  にも拡張することができる。その際に考えねばならない制限は、 $v(r)$  の導函数に不連続があるばあいと、(11) の第1項が0になるばあいである (数学的にはもつと制限があるが) 特に後者のばあいを考えてみる。(11)から分るように、

$$\beta = -2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

のときに、第1項は0になる。したがって、 $v(r)$  を  $r=0$  のまわりで Taylor 級数に展開したとき、偶数べきしか現われず、しかもその収束半径が



$\infty$ ならば、 $V(k)$ は $k \rightarrow \infty$ のとき $k^{-1}$ の如何なる多項式よりも速く0になる。その簡単な例は、 $v(r) = e^{-r^2}$ に対する3次元のFourier変換で、このとき

$$V(k) = \pi^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

である。

## References

- 1) 例えば M. E. Fisher, J. Math. Phys. 5, 944 (1964)  
R. Abe, Progr. Theoret. Phys. 33, 600 (1965)
- 2) E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford University Press, 1937), pp. 172~4.