Fourier 変換の漸近形について

広池和夫
福井芳彦 (東北大工)

(7月14日受理)

§1 まえがき

距離 r だけの函数 v(r) の Fourier 変換をつぎの式で定義しよう。

$$V(\vec{k}) = \int v(r)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d\vec{r} \text{ 。} \tag{1}$$

通常われわれは、$r\to\infty$（または $r\to 0$）における v(r) の様子が、$k\to 0$（または $k\to\infty$）のときの V(k) の様子に反映されるであろうというイメージを持っている。実際、このイメージを定量的に公式化して、物理の問題に応用している例が最近見受けられる。所が筆者等が見た範囲ではそれらの公式はいづれも証明や reference なしに提出されている。筆者等はそれらの公式を使う必要があったので、手許にある数学の本を調べてみたが、なかなか見つからず、僅かに Titchmarsh[2)] の本にそれらしきものを発見した。しかし、その本にある定理のままでは、筆者等が応用しようと思っている対象には不十分なので、定理の拡張を試みた。その結果、筆者等なりの公式を作ることができたので、このノートに公式を発表する次第である。全くの数学で、"物性研究"と銘うつた雑誌のページを浪費するのは気が引けるが、将来同じような公式を使いたい人が現われたばあい、その人の時間の無駄を救うことになれば幸いである。書き落したが、前述のイメージが破れる簡単な例は、積分 $\int v(r)\,d\vec{r}$ が収束するばあいで、このときは V(0) が存在するから、$r\to\infty$ での v(r) の様子がどうであつても $k\to 0$ で V(0) となる。

物理的に興味があるのは、1次元，2次元、3次元であるから、そのときの(1)を具体的に書くとつぎのようになる。

$$V(k)=2\int_0^\infty v(r)\cos kr\ dr \quad (1次元) \tag{2-1}$$

$$V(k)=2\pi\int_0^\infty rv(r)\,J_0(kr)\ dr \quad (2次元) \tag{2-2}$$

$$V(K)=\frac{4\pi}{k}\int_0^\infty rv(r)\sin kr\ dr \quad (3次元) \tag{2-3}$$

ここで、$J_0(kr)$はBessel函数である。$J_{\pm\frac{1}{2}}(kr)$がessentialには$\sin kr$, $\cos kr$と同じものだということから、つぎの式で定義されるHankel変換を考えることにする。

$$F_\nu(k)=\int_0^\infty f(x)J_\nu(kx)\sqrt{kx}\ dx\ , \qquad \nu\geqq-\frac{1}{2} \tag{3}$$

$J_\nu(kx)$はν次のBessel函数である。次節で$F_\nu(k)$の漸近形を調べる。その結果で$\nu=-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$とおけば$V(k)$の漸近形が分るわけで、それを§3に書くことにする。

§2 数 学

Bessel函数の性質のうち、必要なものを証明なしで書いておく。

$z\sim 0$のとき $J_\nu(z)\sim\frac{1}{\Gamma(v+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$

$|z|\to\infty$のとき $J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(az)\right]=az^\nu J_{\nu-1}(az)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}J_\nu(az)\right]=-az^{-\nu}J_{v+1}(az)$$

$$\int_0^\infty z^{s-1}J_\nu(dz)=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{a^s\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+1\right)}\ ;\ a>0,\ V>-s>-\frac{3}{2}$$

$f(x)$としては(3)の右辺の積分が$k>0$で常に収束するものだけを考える。特に$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$とする。

四
内

<u>Lemma</u>　：$0<\alpha<\nu+\frac{3}{2}$で、かつ$x^{\alpha+1}f'(x)$ がすべての$x\geqq 0$ に対して有界であるとする。そのとき、$x\to 0$ $(x\to\infty)$で　$f(x)\sim x^{-\alpha}$ならば、$k\to\infty$ $(k\to 0)$で

$$F_\nu(k)\sim\frac{2^{-\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu-\alpha+\frac{3}{2}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}{2}\right)}k^{\alpha-1}+o(k^{\alpha-1}) \tag{4}$$

となる。

〔証明〕まず$x\to 0$，　$k\to\infty$ のときを証明する。(3)の積分を３つに分けてI_1，I_2，I_3 とする。

$$F_\nu(k)=\int_0^{\Delta/k}+\int_{\Delta/k}^{L/k}+\int_{\Delta/k}^{L/k}+\int_{L/k}^{\infty}\equiv I_1+I_2+I_3$$

I_1は部分積分を行なつてつぎのようになる。

$$I_1\equiv\int_0^{\Delta/k}f(x)J_\nu(kx)\sqrt{kx}\,dx=\int_0^{\Delta/k}f(x)\frac{x^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k}}\frac{d}{dx}[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(kx)]\,dx$$

$$=\frac{1}{k}f(x)\sqrt{kx}\,J_{\nu+1}(kx)\Big|_{x=0}^{x=\Delta/k}-\frac{1}{k}\int_0^{\Delta/k}[f'(x)-(\nu+\frac{1}{2})\frac{f(x)}{x}]J_{\nu+1}(kx)\sqrt{kx}\,dx$$

$$=\frac{1}{k}f\left(\frac{\Delta}{k}\right)\sqrt{\Delta}\,J_{\nu+1}(\Delta)-\frac{1}{k}O\left[\int_0^{\Delta/k}x^{-\alpha-1}J_{\nu+1}(kx)\sqrt{kx}\,dx\right]$$

$$=O(k^{\alpha-1}\Delta^{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}).$$

I_3　も同様にして

$$I_3=O(k^{\alpha-1}L^{-\alpha})$$

となる。I_2　を調べるために、つぎの式でI_2'　を定義する。

$$I_2'\equiv\int_{\Delta/k}^{L/k}[x^\alpha f(x)-1]\,x^{-\alpha}J_\nu(kx)\sqrt{kx}\,dx.$$

さらに函数$m(\xi)$を

$$m(\xi)\equiv\max_{0\leqq x\leqq\xi}|x^\alpha f(x)-1|$$

で定義すると、$\lim_{\xi\to 0} m(\xi) = 0$ である。I'_2 の大きさは

$$|I'_2| \leqq m\left(\frac{L}{k}\right) \int_{\Delta/k}^{L/k} x^{-\alpha} |J_\nu(kx)\sqrt{kx}|\, dx$$

$$= k^{\alpha-1} m\left(\frac{L}{k}\right)\ c(\Delta, L)$$

となる。ただし、$c(\Delta, L)$はΔ, L には関係するがkには無関係な定数である。一方、I_2はつぎのように書ける。

$$I_2 = \int_{\Delta/k}^{L/k} x^{-\alpha} J_\nu(kx)\sqrt{kx}\, dx + I'_2$$

$$= \int_0^\infty - \int_0^{\Delta/k} - \int_{L/k}^\infty + I'_2$$

$$= k^{\alpha-1} \frac{2^{-\alpha+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}{2}\right)} + O(k^{\alpha-1}\Delta^{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}) + O(k^{\alpha-1}L^{-\alpha}) + I'_2 .$$

したがつて、$F_\nu(k)/k^{\alpha-1}$を考えると、$I_1/k^{\alpha-1}$, $I_3/k^{\alpha-1}$ およびI_2 の中の第二項、第三項はΔを十分小さく、Lは十分大きくとることによつて、任意に小さくできる。そのように選ばれたΔ, L の値に対して、$k\to\infty$ とすれば $I'_2/k^{\alpha-1}$ は$m\left(\frac{L}{k}\right)$ のため0となる。これで、$x\to 0$, $k\to\infty$ のときの Lemma が証明できた。$x\to\infty$, $k\to 0$ のときの証明も全く同様で、ただI'_2 が小さくなることを証明するときに、上の$m(\xi)$ の代りに

$$M(\xi) \equiv \max_{\xi \leqq x} |x^\alpha f(x) - 1|$$

を定義して、$\lim_{\xi\to\infty} M(\xi) = 0$を利用すればよい。

証明終

上のLemma は$f(x)$ の微分可能を仮定してあるが、この制限はいわゆる区分的に滑らかというところまでゆるめることができる。すなわち、$f(x)$ が$x=a$で有限の不連続を持ち、$0<x<a$, $a<x<\infty$ では微分可能であるとすると、不連続点からの contribution として、$k\to\infty$ のときにはI_3に$O(1/k)$、$k\to 0$ のときにはI_1に$O(k^{\nu+\frac{1}{2}})$ の項が現われるが、これらの項はいずれも $k^{\alpha-1}$ くらべて省略できる。

Lemma ではαの値が$0<\alpha<\nu+\frac{3}{2}$という範囲に限られているが、この制限をゆるめることを考えよう。まず、$x\to\infty$，$k\to 0$ のばあいから始める。このときは、$x\to\infty$ での $f(x)$ の性質に着目しているのであるから、$x\to\infty$ 以外での $f(x)$ の性質は十分素直であると仮定しておく。(3)の積分が収束しなければいけないことから、αの値は負にはなれないことは明らかである。したがつて、αの値の範囲を拡張できるのは$\alpha>\nu+\frac{3}{2}$の方向である。$\alpha>\nu+\frac{3}{2}$として、

$$f_1(x) \equiv \int_x^\infty f(y)\, y^{\nu+\frac{1}{2}}\, dy$$

を定義すると、$f_1(x)$は確かに存在して、

$$f_1(x) \sim \frac{1}{\alpha-\nu-\frac{3}{2}}\ x^{-(\alpha-\nu-\frac{3}{2})} \qquad (x\to\infty)$$

である。(3)の右辺で部分積分を行なつてつぎの式が得られる。

$$F_\nu(k) = \frac{k^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty f(x)\, x^{\nu+\frac{1}{2}}\, dx$$
$$-k\int_0^\infty f_1(x) x^{-\nu-\frac{1}{2}}\, J_{\nu+1}(kx)\sqrt{kx}\ dx\,.$$

$\nu+\frac{7}{2}>\alpha>\nu+\frac{3}{2}$ とすると、上式の右辺の第２項に対してはLemma が使えて（上述のように、Lemma の通用できる条件のうち、αの制限以外は満足されていると仮定して）、$k\to 0$ のとき、

$$F_\nu(k) = \frac{k^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty f(x)\, x^{\nu+\frac{1}{2}}\, dx + k^{\alpha-1}\, \frac{2^{-\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}{2}\right)} + O(k^{\alpha-1}), \tag{5}$$

となる。右辺の第２項はLemma (4) と形式的に同じものであるが、いま考えているαの範囲に対しては第１項にくらべて省略できる。

第１項は $f(x)\sim x^{-\alpha}$という $f(x)$ の漸近形だけではきまらないから、$k\to 0$での $F_\nu(k)$の形は$x\to\infty$ での $f(x)$ の漸近形だけではきまらない。§1 であげた例は、このことの特殊なばあいになつている。

つぎに、$x\to 0$，$k\to\infty$ のときにαの範囲を拡げることを試みる。このばあい

には、α の範囲を $\alpha > \nu + \frac{3}{2}$ の方向へ拡げることは、(3)の積分の原点における収束性から不可能である。したがつて、$\alpha \leqq 0$ のばあいを考える。$x \to 0$ での $f(x)$ の性質に着目しているから、$x \to 0$ 以外での $f(x)$ の性質は十分素直で、下に現われる種々の積分の $x \to \infty$ での収束性は問題がないと仮定しておく。種々の函数の Hankel 変換が現われるので、便宜上、(3)をつぎのように書くことにする。

$$F_\nu(k;f) \equiv \int_0^\infty f(x) J_\nu(kx) \sqrt{kx}\, dx \tag{3'}$$

$f(x)$ は繰返し微分可能であると仮定して、右辺に部分積分を行なうと、

$$F_\nu(k;f) = -\frac{1}{k}\left[F_{\nu+1}(k;f') - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)F_{\nu+1}\left(k;\frac{f}{x}\right)\right] \tag{6}$$

という関係が得られる。この関係を繰返し使うと、n を正数としてつぎの関係が得られる。

$$F_\nu(k;f) = \left(-\frac{1}{k}\right)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r a_r^{(n)} F_{\nu+n}\left(k;\frac{f^{(n-r)}}{x^r}\right). \tag{7}$$

ここで $a_r^{(n)}$ は k に無関係な定数である。$a_r^{(n)}$ に対する漸化式は容易に得られるが書くのは省略する。ただ、その漸化式での初期条件にあたるものは、(6)から分かるように

$$a_0^{(1)} = 1, \qquad a_1^{(1)} = \nu + \frac{1}{2}$$

である。なお、(7)で $f^{(n-r)}$ は $f(x)$ の $(n-r)$ 次導函数である。$x \to 0$ で $f(x) \sim x^{-\alpha}$ と仮定しているわけだが、さらに

$$\frac{f^{(n-r)}}{x^r} \sim (-1)^{n+r}\alpha(\alpha+1)\cdots\{\alpha+(n-r-1)\}x^{-\alpha-n},\quad r=0,1,2\cdots,n \tag{8}$$

を仮定し、かつ $-n < \alpha < \nu + \frac{3}{2}$ で(7)の右辺の各項に Lemma が使えると仮定すると、$k \to \infty$ で

$$F_\nu(k;f) \sim \frac{2^{-\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+\frac{3}{2}-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}{2}\right)} k^{\alpha-1} + 0\,(k^{\alpha-1}), \qquad (9)$$

$$-n<\alpha<\nu+\frac{3}{2}$$

となることが証明できる。証明は省略するが、$a_r^{(n)}$ に対する漸化式を使えばよい。(9)は形式的にはLemma の(4)と全く同じであり、nは任意の正整数でよいのだから。$x\to 0$, $k\to\infty$ のときには、$\alpha<\nu+\frac{3}{2}$ のすべてのαの値に対して(4)が成りたちそうであるが、制限が2つある。その1つは、(4)の第1項の分母にあるΓ函数が∞になるばあいである。よく知られたΓ函数の性質から、αの値が

$$-\alpha = 2m+\nu+\frac{1}{2}, \quad m=0,1,2,\cdots \qquad (10)$$

のときそのようなことが起り、(4)の第1項は0となり、$k\to\infty$ での$F_\nu(k)$の漸近形は、$x\to 0$ における $f(x) - x^{-\alpha}$の漸近形から定まることになる。もう1つの制限は、f(x) の導函数に不連続があるばあいで、(7)のように部分積分を繰返していると、δ－函数が現われ、それからの contribution が(9)の才1項より大さくなつてしまう。従つて(9)が成立つのは $f(x), f'(x), \cdots f^{(n-1)}(x)$が存在して連続であり、$f^{(n)}(x)$に初めて有限の不連続が現れる場合である。勿論 (8)の仮定および(7)の各項にLemma が使えるための $f^{(n-r)}/x^r$に対する条件も満足されていなければならない。

以上のことをまとめるとつぎのようになる。$x\to\infty$, $k\to 0$ に対するLemma はαの範囲を$0<\alpha<\nu+\frac{3}{2}$以外には拡張できない。$x\to 0$, $k\to\infty$ に対するLemma は、f(x) が繰返し微分可能で、かつ(4)の第1項が0にならなければ（もつと数学的な条件はさらに必要であるが）、$\alpha<\nu+\frac{3}{2}$ の範囲で成りたつ。f(x) の導函数のうち、はじめて $f^{(n)}(x)$に有限の不連続が現われるとき、$-n\leqq\alpha<\nu+\frac{3}{2}$ でLemma の結果が成りたつ。

§3 む す び

前節の結果を§1 の（2－1～3）で定義されたFourier 変換にほんやくすることは簡単である。まず、Lemma をそのままほんやくするとつぎのようになる。1次元、2次元、3次元をまとめてd－次元と書く。

$\frac{d-1}{2} < \beta < d$ の β の値に対して、$r^{\beta+1}v(r)$ がすべての $r \geqq 0$ において有界であるとする。そのとき、$r \to 0$ ($r \to \infty$)で $v(r) \sim r^{-\beta}$ ならば、$k \to \infty$ ($k \to 0$)で

$$V(k) \sim C_d\, k^{\beta-d} \sin\frac{\beta\pi}{2} + o(k^{\beta-d}) \tag{11}$$

である。ただし、

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 2\Gamma(1-\beta) \\ C_2 &= 2^{2-\beta}\{\Gamma(\tfrac{2-\beta}{2})\}^2 \\ C_3 &= 4\pi\Gamma(2-\beta) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$r \to \infty$, $k \to 0$ のときには、β の値の範囲は上記の範囲以上に拡張できない。Fisher[1] は d=2のばあい、$0 < \beta < 2$で (11) が成立するという公式をあげているが、これは$\frac{1}{2} < \beta < 2$ としなければならない。$\beta < \frac{1}{2}$ ではFourier 変換そのものが存在しなくなる。ただし、(11) そのものは β が ½より小さくなつても異常なことは起らないから、ある意味での解析接続的なことは考えられるかも知れないが、ここではFourier 変換が存在しないことを論ずることは無意味であるという立場を取つておく。3次元に対しては (11) はFisher の公式と同じである。

$r \to 0$, $k \to \infty$ に対しては、β の範囲を $\beta < \frac{d-1}{2}$ にも拡張することができる。その際に考えねばならない制限は、$v(r)$ の導函数に不連続があるばあいと、(11) の第1項が0になるばあいでである(数学的にはもつと制限があるが)。特に後者のばあいを考えてみる。(11)から分るように、

$$\beta = -2m, \quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{13}$$

のときに、第1項は0になる。したがつて、$v(r)$ を $r=0$ のまわりでTaylor 級数に展開したとき、偶数べきしか現われず、しかもその収束半径が

∞ならば、V(k) は $k\to\infty$ のとき k^{-1} の如何なる多項式よりも速く 0 になる。その簡単な例は、$v(r)=e^{-r^2}$ に対する 3 次元の Fourier 変換で、このとき

$$V(k)=\pi^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{k^2}{4}}$$

である。

References

1)例えば M. E. Fisher, J. Math. Phys. 5, 944 (1964)

R. Abe, Progr. Theoret. Phys. 33, 600 (1965)

2) E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford University Press, 1937), pp. 172~4.