

流体における diffusion mode と熱流との coupling について

山田 知 司 (京大理)

(8月17日受理)

1 Introduction

Greenspan 等は 流体において通常の音波の他に、diffusion mode と熱流が couple してその周波数が有限な real part を持つてくるということを理論的に見出した。⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾すなわち diffusion mode が1本のスペクトルではなくなつて2つに分かれ doublet になつてくる。しかしこれらはいずれもモーメント展開の方法でしかも展開を途中で打切るという近似を行つている。

ここではモーメント展開は使わずに Uhlenbeck-Ford⁽⁴⁾ において用いられた方法を使う。そして簡単なモデルについて正確に解くことを試みる。

結果として次の点が判つた。

- (1) 熱流の relaxation time がじゆうぶんに長ければ、ある critical な波数以上で doublet が存在する。
- (2) このような現象がおこるためには熱流の relaxation time がある値より大きくなくてはならない。

2 model と Formulation

model としてボルツマン方程式の成立するような「一次元」quasi-Maxwell-molecules をとる。ここで「一次元」というのは、横と縦方向の coupling を無視したということで完全な一次元ではない。

速度を $\sqrt{2kT/m}$ (k , ボルツマン定数, m ; 分子の質量) を単位としてはかり、さらにボルツマン方程式を線形化することにより次の式を得る。(以下の詳細は参考文献 4 を参照のこと。)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial r} = n\sigma J(h) \quad (1)$$

- h ; 分布函数の平衡からのはずれ
- t, r ; 時間および空間座標
- J ; collision operator
- nσ ; J の固有値が最小 -1 になるように定められた定数
- c ; 無次元化された速度

collision operatorは、その固有函数 ϕ_i ($i=0, 1, 2, \dots$) と固有値 λ_i を用いて次のように書ける。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \phi_i(c) \phi_i(c_1) e^{-c_1^2} \quad (2)$$

ここで最初の数個の固有函数を書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_0(c) &= \pi^{-\frac{1}{4}}, & \phi_1(c) &= \sqrt{2} \pi^{-\frac{1}{4}} c \\ \phi_2(c) &= \sqrt{2} \pi^{-\frac{1}{4}} (c^2 - \frac{1}{2}), & \phi_3(c) &= \sqrt{\frac{4}{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} c (c^2 - \frac{3}{2}) \end{aligned} \quad (3)$$

物理的には、 ϕ_0 は粒子数、 ϕ_1 は運動量、 ϕ_2 はエネルギーに対応し、これらは衝突保存量であつて、 $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ である。

普通の近似に対応したことをやるには(2)式の右辺の和を3までで切ればよい。するとモーメントを熱流までで切つたことになる。ここでは、 K_{ac} による次のような近似を行なう。すなわち、 $i \geq 4$ になる λ_i は、すべて -1 に等しいとする。また、 $\lambda_3 = -r$ ($0 < r < 1$) とする。これは、 K_{ac} の第1近似といわれるものである。この近似は大変思い切つた近似であるが、高い次数の固有函数の効果がとり入れられているという点で、moment 展開を途中で打切るという近似よりすぐれていると考えられる。

すると方程式(2)は、この近似において

$$J = -n\sigma + \frac{n\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 e^{-c_1^2} (1 + 2cc_1$$

$$+2\left(c^2 - \frac{1}{2}\right)\left(c_1^2 - \frac{1}{2}\right) + \beta c\left(c^2 - \frac{3}{2}\right)c_1\left(c_1^2 - \frac{3}{2}\right) \quad (4)$$

$$\beta = \frac{4}{3}(1-r) \quad (5)$$

さらに(1)式をフリエ変換する。

$$h(c) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-i\omega\tau + ikr} h_{k\omega}(c) \quad (6)$$

その結果、(4)式とあわせて(1)式は

$$\begin{aligned} (-i\omega + ikc + n\sigma) h_{k\omega}(c) &= \frac{n\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 e^{-c_1^2} \\ &\times \left\{ 1 + 2cc_1 + 2\left(c^2 - \frac{1}{2}\right)\left(c_1^2 - \frac{1}{2}\right) \right. \\ &\left. + \beta c\left(c^2 - \frac{3}{2}\right)c_1\left(c_1^2 - \frac{3}{2}\right) \right\} h_{k\omega}(c_1) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで次のような量を導入する。

$$M_i = \int_{-\infty}^{\infty} dc e^{-c^2} c^i h_{k\omega}(c) \quad (8)$$

すると次のような保存則が成立する。

$$\omega M_i = k M_{i+1} \quad (9)$$

$$(i=0, 1, 2)$$

(8)式を使って(7)式の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{n\sigma}{\sqrt{\pi}} \left\{ M_0 + 2cM_1 + 2\left(c^2 - \frac{1}{2}\right)\left(M_2 - \frac{1}{2}M_0\right) \right. \\ \left. + \beta c\left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\left(M_3 - \frac{3}{2}M_1\right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式より(9)式を用いて、 M_1 , M_2 , M_3 を消去し、これを(7)式にもどす。さらに(7)式の両辺を $(-i\omega + ikc + n\sigma)$ でわり、 $\exp(-c^2)$ をかけて積分することによって、 $|\text{Im}\omega| < n\sigma$ に対して次のような dispersion relation を

山田知司

得る。

$$I = \frac{ig}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} dc \frac{1+2cv+2(c^2-\frac{1}{2})(v^2-\frac{1}{2})+\beta c(c^2-\frac{3}{2})v(v^2-\frac{3}{2})}{v-c+ig}$$

(11)

ここで $v=\omega/k$, $g=n\sigma/k$

さらに (11) 式は変形されて

$$\begin{aligned} & 1+ig \left\{ 2v+2(v^2-\frac{1}{2})K+\beta v(v^2-\frac{3}{2})(K^2-1) \right\} \\ &= -\frac{ig}{\sqrt{\pi}} I \left\{ 1+2Kv+2(v^2-\frac{1}{2})(K^2-\frac{1}{2}) \right. \\ & \left. +\beta v(v^2-\frac{3}{2})K(K^2-\frac{3}{2}) \right\} \end{aligned}$$

(12)

ここで

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c^2}}{c-K} dc$$

(13)

$$K = v + ig$$

(14)

(12) 式を解くことによつて、 ω と k との関係を求めることができる。また (12) 式の解として、 v という解があればならず $-v^*$ という解もあることに注意しておく。

3 diffusion mode と熱流

この節において diffusion mode を問題にする。そのために、 $v=-iu$ (u :real) として解く。もし (14) 式が、 u real な解を持たなくなれば、diffusion の周波数が、有限の real part を持つ、すなわち doublet があらわれるといえる。

$$v = -iu$$

(15)

とおくと

$$K = i(g-u) = is, \quad s = g-u > 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c^2}}{c-is} dc = is \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c^2}}{c^2+s^2} dc \\ &= 2i\sqrt{\pi} e^{s^2} \operatorname{Erfc}(s) \end{aligned} \quad (17)$$

$\operatorname{Erfc}(s)$ は、誤差函数で

$$\operatorname{Erfc}(s) = \int_s^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (18)$$

これらを用いると、(12) 式は、 S をパラメーターとする 4 次方程式になる。

$$\beta u^4 + A(S) u^3 + \left(2 + \frac{3}{2}\beta\right) u^2 + \frac{3}{2}A(S) u + 1 = 0 \quad (19)$$

ただし

$$A(S) = \beta s + \left\{ 2 \left(s^2 + \frac{1}{2} \right) f(s) - 2s \right\} / \left\{ s \left(s^2 + \frac{3}{2} \right) f(s) - (s^2 + 1) \right\}$$

$$f(s) = 2 e^{s^2} \operatorname{Erfc}(s) \quad (20)$$

$s \rightarrow \infty$, すなわち、 $k \rightarrow 0$ における漸近形は

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{4s^5} + \dots \quad (21)$$

$$A(s) = -\left(\frac{4}{3} - \beta\right)s - \frac{8}{3s} + \dots \quad (22)$$

ここで、 $A(S)$ として、(22) 式の第一項のみとれば、moment 展開を熱流まで切った近似になっている。

また、一般的に、 $A(s) < 0$ ($S > 0$) が証明できる。

(19) 式を解いた結果を示す前にその式の解の $k \rightarrow 0$ の漸近形を求めておく。

ここで、それを 2 つの場合に分ける。

(i) $\beta = \frac{1}{2}$ すなわち $\lambda_3 \equiv -r = 0$

この場合は、 $A(s) \rightarrow 0$ となり、方程式 (19) は、偶巾のみからなる 4 次式となり、実根をもたない。すなわち、purely damping な diffusion mode は存在しない。

山田知司

(ii) $\beta \neq \frac{1}{2}$ すなわち $\lambda_3 \equiv -r \neq 0$

この場合は、2つの実根が存在する。

$\omega = -i\Gamma$ とおけば

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2r n\sigma} k^2 \quad (23)$$

$$\Gamma_2 = n\sigma r - \frac{3}{2n\sigma r} k^2$$

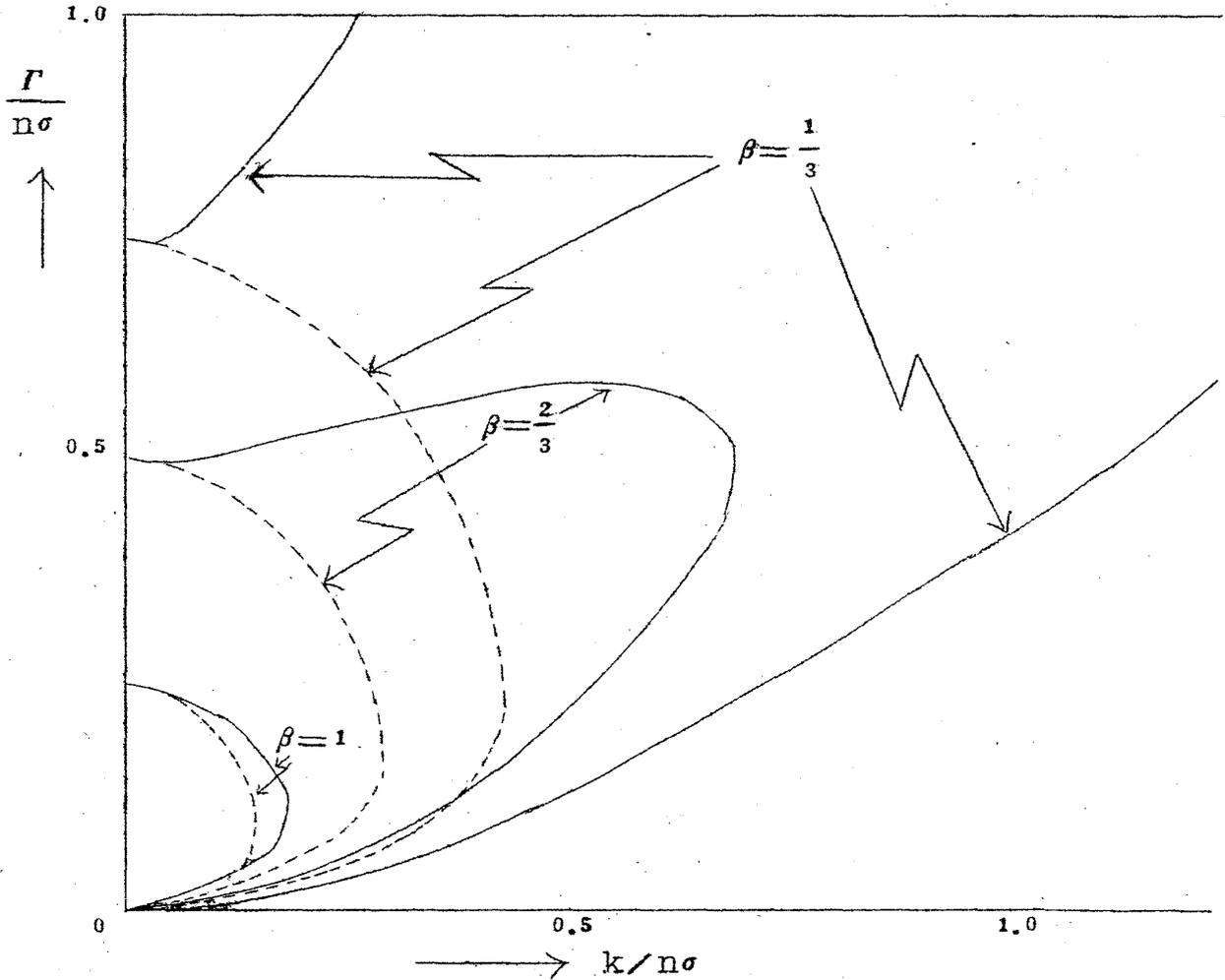
Γ_1 は、diffusion mode に対応し、よく知られた、 k^2 -dep. を持っている。
 Γ_2 は熱流である。

これ以降においては、(19) 式を、解くことに戻る。この方程式の解を一般的に求めることは困難であるので、数値的に解いた。結果は、Fig. 1 に示してある。ここで、縦軸は、 $n\sigma$ を単位としてとつた周波数 ω の虚数部分、横軸は、 $n\sigma$ を単位としてとつた波数をとつてある。Fig. 1 には、方程式 (19) の解、すなわち純虚数の ω のみが plot してある。

実線が、(19) 式の正確な解、点線が、モーメント展開を熱流までで切つた近似における解である。

$\beta = \frac{1}{2}$ ($r=0.5$) の場合をみると $k \sim 0.67n\sigma$ までは、 u が real すなわち周波数が純虚数な2つの根がある。そして、それらは、それぞれ diffusion mode と熱流に対応している。しかし、 $k > 0.67n\sigma$ になると u が real な解は存在しない。この時には、この2つの mode に対応する解は、一組の複素根である。これは、周波数が、有限な実数部をもつてくる、すなわち doublet が生じたということになる。

continuum の影響を考えに入れるとこれと couple する熱流の damping は k とともに大きくなっていきそのため β を減少させていくと $\beta \sim 0.58$ を境にして Fig. 1 の $\beta = \frac{1}{2}$ の場合のようになる。この時は、 k を増していつても熱流と diffusion mode が、ある k のところで一致するということがなく、 ω が純虚数のまま、別々に $\text{Im}\omega = -n\sigma$ になつてしまう。すなわち、continuum の中にうずもれて見えなくなつてしまう。だから、 $\beta \lesssim 0.58$ の場合には、 k

Fig. 1 方程式 (19) の解、 $\Gamma \equiv i\omega$

をいくらましても、doublet は得られず、その前に、個別運動と区別できなくなる。ところが、展開を途中で切る近似においては、 β の値によらず、常にある波数以上で doublet がでてくる。Fig. 2 に doublet の存在範囲を斜線で示してある。実線部分が (19) 式から求めたもの、点線部分が、展開を途中で切った近似から求めたものである。このように、後者の近似は熱流の relaxation time によらず常に doublet を得るが、前者においては、 r の値によつては、doublet が現われない。すなわち衝突演算子の固有値スペクトルの分布によつて（だから流体をつくる分子によつて）doublet はでてこない。

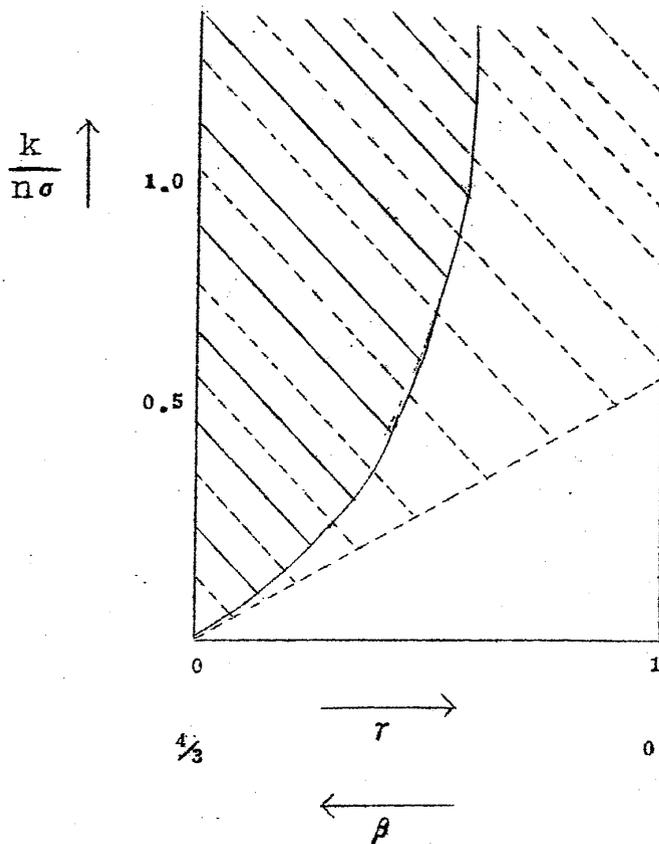


Fig. 2. doubletの存在
範囲を斜線で示してある。

4 議論

doublet は熱流の relaxation time がある値より大きければ、ある k の値のところであらわれることが判つた。

何らかの原因によつてエネルギーの場所的な違い、すなわち温度差ができると熱が流れ温度差をなくそうとする。熱は、粒子によつて運ばれていく。もし温度の凹凸が、粒子の平均自由行程より短いと熱の流れがその凹凸に追従できなくなる。すなわち、熱流は、もし温度勾配がなくなつても前の記憶によつて流れつづけ温度勾配の逆転がおこりうる。そして、doublet があらわれる。

熱流と diffusion mode の damping の和はほぼ一定と考えられるので、展開を熱流までで切る近似においては、diffusion mode の damping が増すと共に熱流の damping は減少した。しかしながら continuum の影響を入れるとこれと couple する熱流の damping が前の場合より増すので、熱流

diffusion mode と熱流と couple する diffusion mode の damping は前の場合より減少する。このように continuum の影響は、2つの mode をひきはなす方向に働らくために、ある critical な r 以上では、doublet は出現しなくなる。

ここにおいては、簡単な Kac の第一近似をとつたが、実際の流体においては、衝突演算子の固有値に広がりがあるはずで、それは doublet の存在範囲をせばめる方向にはたらくはずである。また、今まで取扱つてきた doublet は波ではない。波になるかどうかをみるためには周波数の実部と虚部を doublet のできているところで比べる必要があり、それには、(12) 式を解かなくてはならない。それは将来の問題としておく。

このような doublet は、 k の大きいところで、中性子散乱におけるスペクトルを調べればわかるはずで、その時には、両側にこぶを持つようなスペクトルが得られるであろう。

これに類似な現象はスピン系における sloppy spin wave として知られている。⁽⁵⁾これは、転移点以上において、ある k の値より大きいところで doublet が得られる。

終りに、いろいろ助言していただいた西川先生に感謝します。

文 献

- (1) M. Greenspan, Proceeding of the international school of physics 27, Academic press
- (2) H. Grad, Comm. on Pure and Appl. Math. 2 (1949) 331
- (3) I. Moiseev-Ol' khovskii, Soviet Physics Doklady 3 (1959) 106
- (4) G. E. Uhlenbeck and G. W. Ford, Lectures in Statistical Physics, American Mathematical Society
- (5) K. C. Turberfield et al, Proc. Phys. Soc. 85 (1965) 1