

1体グリーン関数の解析的性質について

金 沢 秀 夫 (東大教養)

(11月21日受理)

§1 まえがき

フェルミ粒子系の1体グリーン関数

$$G_k(t) = -i \langle 0 | T \{ a_k(t) a_k^+(0) | 0 \rangle \quad (1)$$

・フーリエ変換

$$G_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{\varphi_k^{(-)}(x)}{\omega - x - i\delta} dx + \int_{\mu}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(+)}(x)}{\omega - x + i\delta} dx \quad (2)$$

$$= p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\omega - x} dx + \begin{cases} -i\pi \varphi_k^{(+)}(\omega) & \omega > \mu \\ i\pi \varphi_k^{(-)}(\omega) & \omega < \mu \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k^{(+)}(x) & x > \mu \\ \varphi_k^{(-)}(x) & x < \mu \end{cases} \quad (4)$$

の解析的性質は Galitskii-Migdal¹⁾ によつて最初に考察され、その後の論文、或は多体問題の単行本は殆んど G-M そのままである。

$\omega > \mu$ の $G_k(\omega)$ を下半面に、 $\omega < \mu$ の $G_k(\omega)$ を上半面に解析連続すれば極 (pole) があらわれると述べていることは正しいのであるが、彼等は解析接続を実行していない、というよりも G-M は解析接続した関数は $G_k^{-1}(z) = z - \epsilon_k - \Sigma_1(k, z) - i\Sigma_2(k, z)$ ($G_k^{-1}(\omega) = \omega - \epsilon_k - \Sigma_1(k, \omega) - i\Sigma_2(k, \omega)$) であるとしている。(G-M の (24') 式を参照)

同じことは、例えば Nozieres の Interacting Fermi Systems (1964) の 88 頁に書いてある。Nozieres は同書の Appendix c で $G_k(\omega)$ は $\omega = \mu$ に

金沢秀夫

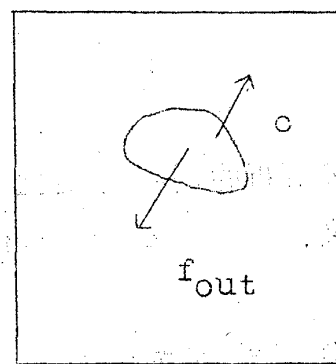
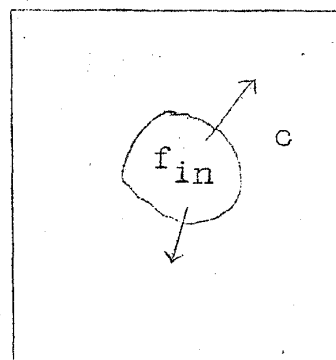
対数的分枝点をもつと 仮定して無限葉のリーマン面を考えている。G-M もはつきり述べているようにリーマン面の第1葉上には極は存在しないのである。上のように $G_K^{-1}(z) = 0$ を満たす z が存在するとするのは第1葉上に極の存在を仮定することになる。

我々の問題は次の問題と本質的に同じ問題である。

閉曲線 \circ 上で定義された連続関数を $\varphi(\zeta)$ としたとき

$$f(z) = \int_{\circ} \frac{\varphi(\zeta)}{z - \zeta} \alpha \zeta \quad (5)$$

は \circ 内及び \circ 外で別々の解析関数を表わす。 \circ 内で解析的な関数 $f_{in}(z)$ を \circ 外に、 \circ 外で解析的な関数 $f_{out}(z)$ を \circ 内に解析接続する（第1図のように2枚のガウス平面を考える。）このとき、 \circ 上に分枝点がないければ $f_{in}(z)$ を \circ 外に解析接続した関数は必ず極をもつ、何故なら、極がないければ全平面で解析的となり定数になるからである。 \circ 上に分枝点があるときには、極があるかも知れないし、ないかも知れない。ない場合にはリーマン面を考えて第2葉、第3葉へ解析連続を続ける。分枝点の性質によつてリーマン面が何葉から成るかが決まるがあらゆる葉上で極がない場合もある（こういう例は具体的にいくらでも作れる）、グリーン関数では \circ 上に分枝点がなく、必ず極が存在するとしてよいと思う（§2参照）。そうすれば第1図のような2枚のガウス平面だけで十分である。この2枚を \circ に out を作つてつないで、2葉のリーマン面と考えてもよい。念のためにつけ加えると我々の問題は次の問題（素粒子論における散乱振巾の解析性）とはちがうのである。



第1図

1 体グリーン関数の解析的性質について

$$f(z) = \int_{\mu}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{z-x} ax \tag{6}$$

は実軸上 μ から ∞ までを除いた全平面で解析的である $\varphi(x) = c\sqrt{x-\mu}$ cx の近傍、 $x \geq \mu$) であるならば、 $z = \mu$ は分枝点となり ($f(z)$ は $z = \mu$ の近傍で $\sqrt{z-\mu}$ 的に振舞う)、リーマン面は2葉である。

§2 第1葉上の解析的性質

$$G_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{z-x} ax \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) ax = 1 \\ \varphi_k^{(+)}(\mu) = \varphi_k^{(-)}(\mu) = \varphi_k(\mu) = 0 \quad (|k| \neq k_F) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

の解析的性質が本稿の主題である。(8)は $\varphi_k^{(+)}$, $\varphi_k^{(-)}$ の定義より得られる。以下では $\varphi_k(x) = \delta(x - E_k)$ の場合は除外する。このときは $G_k(z)$ は実軸上に極をもつのみで trivial だからである。(7)は次の基本的性質をもつ。

(i) $G_k(\bar{z}) = \overline{G_k(z)}$ ($-$ は共役複素数) (9)

(ii) 実軸を除いた全平面で解析的、即ち上半面で解析的な $G_k^{(+)}(z)$ と下半面で解析的な $G_k^{(-)}(z)$ とを表わす。(ガウス平面の代わりにリーマン球を考えれば(7)が(5)と同等であることが分るであろう)

(iii)

$$\left. \begin{aligned} G_k(\omega + i\delta) &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\omega - x} dx - i\pi \varphi(x) \\ G_k(\omega - i\delta) &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\omega - x} dx + i\pi \varphi(x) \\ \omega &\equiv R_0 z \quad (\delta \rightarrow +0) \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

(10) は関数論では Plemelj の定理とよばれているが、 $z = \omega \pm i\delta$ とおけば直ちに得られる関係である。

金沢秀夫

(3)と(10)から

$$G_k(\omega) = \begin{cases} G_k(\omega + i\delta) & \omega > \mu \\ G_k(\omega - i\delta) & \omega < \mu \end{cases} \quad (11)$$

即ち $G_k^{(+)}(z)$ は $\omega > \mu$ の $G_k(\omega)$ を上半面に、 $G_k^{(-)}(z)$ は $\omega < \mu$ の $G_k(\omega)$ を下半面に解析接続した関数である。

自己エネルギーを

$$\Sigma_k(\omega) = \Sigma_1(\omega) + i\Sigma_2(\omega) \quad (12)$$

とすれば ($\Sigma_1, \Sigma_2(\omega)$ は実数) (11) は

$$G_k(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega + i\delta) - i\Sigma_2(\omega + i\delta)} & \omega > \mu \\ \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega - i\delta) - i\Sigma_2(\omega - i\delta)} & \omega < \mu \end{cases} \quad (11)'$$

と書かれる。 $\omega > \mu$ の $\Sigma_k(\omega)$ を上半面に解析接続したものを $\Sigma_k^{(+)}(z)$ 、 $\omega < \mu$ の $\Sigma_k(\omega)$ を下半面に解析接続したものを $\Sigma_k^{(-)}(z)$ とし

$$\Sigma_k(z) = \begin{cases} \Sigma_k^{(+)}(z) & \text{Im } z > 0 \\ \Sigma_k^{(-)}(z) & \text{Im } z < 0 \end{cases}$$

とすれば

$$G_k(z) = \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) - i\Sigma_2(z)} \quad (12)$$

と書くことができる。(9)と(12)から

$$\overline{\Sigma_1(z)} = \Sigma_1(\bar{z}) \quad (13a)$$

$$\overline{\Sigma_2(z)} = -\Sigma_2(\bar{z}) \quad (13b)$$

を得る。この関係は重要である。

さて、(3)と(11)から

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(+)}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_Z(\omega + i\delta) \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{\Sigma_2(\omega + i\delta)}{\{\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega)\}^2 + \{\Sigma_2(\omega + i\delta)\}^2}, \quad \omega > \mu \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\varphi_k^{(-)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Sigma_2(\omega - i\delta)}{\{\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega)\}^2 + \{\Sigma_2(\omega - i\delta)\}^2}, \quad \omega < \mu \quad (14b)$$

を得る ($\Sigma_1(\omega - i\delta) = \Sigma_1(\omega + i\delta) = \Sigma_1(\omega)$)。 $\varphi_k^{(+)} \geq 0$, $\varphi_k^{(-)} \geq 0$ であるから $\Sigma_2(\omega + i\delta) (\omega > \mu) \leq 0$, $\Sigma_2(\omega - i\delta) (\omega < \mu) \geq 0$ である。さらに(13b)の関係より

$$\Sigma_2(\omega - i\delta) = -\Sigma_2(\omega + i\delta) \quad (15)$$

であるから

$$\Sigma_2(\omega + i\delta) \leq 0 \quad -\infty \leq \omega \leq \infty \quad (16)$$

$$\Sigma_2(\omega - i\delta) \geq 0$$

が導かれる。また(14b)を(15)によつて書きかえれば、結局

$$\varphi_k(\omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{\Sigma_2(\omega + i\delta)}{\{\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega)\}^2 + \{\Sigma_2(\omega + i\delta)\}^2} \quad (17)$$

と書くことができる。

Luttinger²⁾ は外場のないフェルミ粒子系で、摂動論が収束するならば $\omega = \mu$ の近傍で

$$\Sigma_2(\omega + i\delta) = -c_k (\omega - \mu)^2 \quad (18)$$

であることを示した。 $|k| \neq k_F$ なら $\mu - \epsilon_k - \Sigma_1(\mu) \neq 0$ であるから、 $x = \mu$ の近傍で

$$\varphi_k(x) \propto (x - \mu)^2 \tag{19}$$

となる ($|k| = k_F$ では φ_k は δ 関数となる)。このときは $z = \mu$ は $G_k(z)$ の分枝点とはならない。(Nojieres は対数的分枝点と仮定したが)。松原グリーン関数で、虚軸上の点列の集積点である ∞ 点が分枝点 ($|z| \rightarrow \infty$ $G(z) = \frac{1}{z} + \dots + c \frac{1}{z^n} + \dots + c \frac{1}{z^n} \log z \dots$ となるような場合) になるとき解析接続が可能かどうか問題になると思うが、この問題についてはここでは論じないでおく。

第1葉上に極がないことは(7)の基本的性質 (ii) から明らかであるが、次のように考えれば理解し易いであろう。例えば $G_k^{(-)}(z)$ を考える。(16) から実軸の近傍で $\Sigma_2(\omega - i\Gamma) (\Gamma > 0)$ は正であるから

$$(\mathbb{E}_k - i\Gamma_k) - \epsilon_k - \Sigma_1(\mathbb{E}_k - i\Gamma_k) - i\Sigma_2(\mathbb{E}_k - i\Gamma_k) \tag{20}$$

$$\approx \{ \mathbb{E}_k - \epsilon_k - \Sigma_1(\mathbb{E}_k) \} - i \{ \Gamma_k + \Sigma_2(\mathbb{E}_k - i\delta) \} \neq 0$$

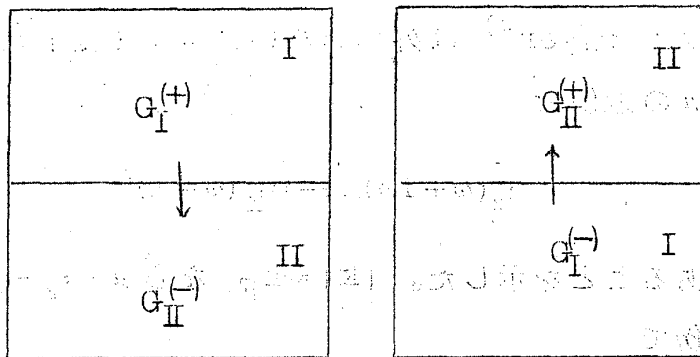
なのである。

§2 第2葉への解析接続

第1葉上の $G(z)$ を (k を省略する。) $G_I(z)$ と書くことにする。先づ $G_I^{(+)}$ を第2葉の下半面に解析接続しよう。 $G_I^{(+)}(z)$ は上半面の任意の領域で $G_I^{(+)}(\omega + i\delta)$ は連続であるから Painlevé の定理により

$$G_{II}^{(-)}(\omega - i\delta) = G_I^{(+)}(\omega + i\delta) = G_I(\omega + i\delta) \tag{21}$$

とおき、下半面全体に接続すればよい。それには (21) の右辺 = $f(\omega - i\delta)$ の



第2図

1 体グリーン関数の解析的性質について

$$\begin{aligned}
 G_I(\omega+i\delta) &= \overline{G_I(\omega+i\delta)} \\
 &= G_I(\omega+i\delta) - G_I(\omega-i\delta) \quad ((19) \text{ より}) \\
 &= 2i I_m(\omega+i\delta) \quad (22) \\
 &= \frac{-2i \Sigma_2(\omega-i\delta)}{[\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega+i\delta) - i \Sigma_2(\omega+i\delta)] [\omega - \epsilon_k - \Sigma_1(\omega-i\delta) - i \Sigma_2(\omega-i\delta)]} \\
 &= -2i \Sigma_2(\omega-i\delta) G_I(\omega+i\delta) G_I(\omega-i\delta) \quad ((13) \text{ より}) \quad (23)
 \end{aligned}$$

を得る。(Σ は Σ_1 と書くべきであるが意味が明らかであるから単に Σ と書く)。

(22) と (23) から

$$\begin{aligned}
 G_I(\omega+i\delta) &= \frac{G_I(\omega-i\delta)}{1 + 2i \Sigma_2(\omega-i\delta) G_I(\omega-i\delta)} \\
 &= G_{II}^{(-)}(\omega-i\delta) \quad (24)
 \end{aligned}$$

となる。故に

$$\begin{aligned}
 G_{II}(z) &= \frac{G_I(z)}{1 + 2i \Sigma_2(z) G_I(z)} \quad I_m z < 0 \\
 &= \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) + i \Sigma_2(z)} \quad I_m z < 0 \quad (25)
 \end{aligned}$$

が $G_I(z) (I_m z > 0)$ の下半面への解析接続である。即ち

$$(25) \left\{ \begin{aligned}
 G_I(z) &= \frac{1}{z + \epsilon_k - \Sigma_1(z) - i \Sigma_2(z)} \quad I_m z \geq 0 \\
 G_{II}(z) &= \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) + i \Sigma_2(z)} \quad I_m z \leq 0
 \end{aligned} \right. \quad (26)$$

は第 2 図のガウス平面上で一つの関数をつくるのである。

金沢秀夫

同様に $G_I^{(-)}(z) (= G_I(z) \quad \text{Im } z < 0)$ を第2葉の上半面に解析接続すれば

$$G_I(z) = \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) - i\Sigma_2(z)} \quad \text{Im } z \leq 0$$

$$G_{II}(z) = \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) + i\Sigma_2(z)} \quad \text{Im } z \geq 0$$
(27)

が全平面で一つの関数をつくることになる。

まとめれば第1葉上で

$$G_I(z) = \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) - i\Sigma_2(z)}$$

なら第2葉上では

$$G_{II}(z) = \frac{1}{z - \epsilon_k - \Sigma_1(z) + i\Sigma_2(z)}$$

となる。§2の終りに述べたことを参照すれば $G_{II}(z)$ が極をもつわけが分るであろう。

$G(\omega)$ と $G_{II}(z)$ との関係は (11) と反対に

$$G(\omega) = \begin{cases} G_{II}(\omega + i\delta) & \omega < \mu \\ G_{II}(\omega - i\delta) & \omega > \mu \end{cases} \quad (28)$$

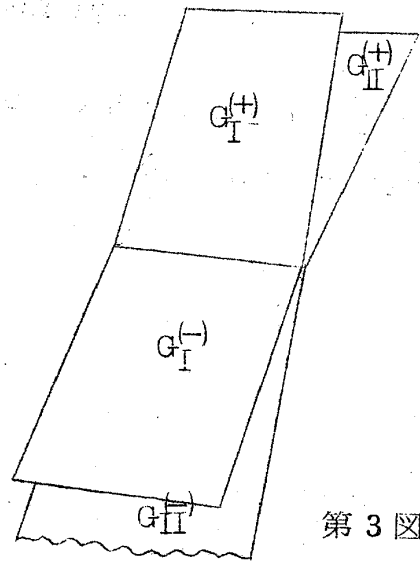
で与えられる。

quasiparticle のエネルギーと減衰は $G_{II}^{(-)}(z)$ より

$$(E_k - i\Gamma_k) - \epsilon_k - \Sigma_1(E_k - i\Gamma_k) + i\Sigma_2(E_k - i\Gamma_k) = 0 \quad (29)$$

より得られるが、近似的には

$$E_k - \epsilon_k - \Sigma_1(E_k) = 0$$



第3図

$$\Gamma_k = \frac{\Sigma_2(E_k - i\delta)}{1 - \frac{2\Sigma_1}{2E_k}} \quad (30)$$

より得られる ($\Sigma_2(E_k - i\delta) > 0$)。注意すべきことは (30) より近似をあげるとき (13b) のために $\Sigma_2(z)$ は実軸上の一点の近傍で Taylor 展開ができないことである。(30) を用いると減衰はフェルミ面からの距離の 2 乗に比例することになる。このため、しばしば quasiparticle の概念はフェルミ面近傍にしか成立しないと云われているが、これは疑問である。 k が大きくなったとき、減衰が $(k - k_F)^2$ でいつまでも増大する筈はないのである。電子回析では $10^4 \sim 10^6$ eV の電子線を結晶に入射させる。この高速電子のグリーン関数は $G_R(t) = -i \langle 0 | a_k(t) a_k^\dagger(0) | 0 \rangle \approx G(t)$ ($\because a_k | 0 \rangle \approx 0$) である。この電子に対して quasiparticle 概念があてはまらなければ電子回析の理論 (従来、減衰は無視されたが、近年減衰を考慮した理論がつくられている。) は崩壊することになるが、実際は極めてよく実験事実を説明するのである。まだ書くべきことがあるが今回はここで筆をおく。

有益な討論をして頂いた加藤正昭氏、伊豆山健夫氏に感謝する。

文 献

- 1) V.M.Galitskii and A.B.Migdal, J.Exptl. Theort. Phys. (U.S.S.R) 34, 139 (1958)
- 2) J.M.Luttinger, P.R. 121, 942 (1961).