He_3 — He_4 系の Phase-Separation

沢　田　克　郎（東教大理）

（ 2月1日受理 ）

He_3-He_4 の混合は極低温でも～7％の He_3 迄は一様に溶けることが実験的に示されている。この様な Bose-Fermiの混合形の phase-separation の条件を mixed state の density fluctuation の不安定性という形でぎろんしてみよう。

Bose 系のハミルトニアンを H_B, Fermi 系を H_F として、相互作用としては普通の形

$$H_{FB} = \Sigma_q v_q \rho_q^B \rho_{-q}^F \tag{1}$$

をとる。但し、v_qは He_3-He_4 系の様に hard-core のある時には effective なポテンシアルと考えておこう。全然モデルとして v_qが特異でない様なものを考えた方がはつきりするが、頭の中には He_3-He_4 系を入れておく事にする。

H_B だけを解くと周知のフオノンがあらわれ、又、H_F だけを解くと、zero-sound や one-pairの励起が主なものとしてあらわれる。之等は何れも密度のゆらぎ ρ_q よりきているので、之等のもの（及び他にあればそれも含めて）を含めて、ハミルトニアンを次の形に書いてモデル化する。注）

$$H_F = \Sigma_{\mu,q} \omega_\mu^q a_\mu^{*q} a_\mu^q \tag{2}$$

$$H_B = \Sigma_{\lambda,q} W_\lambda^q b_\lambda^{*q} b_\lambda^q \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_q^B &= \Sigma_\lambda (B_\lambda^{*q} b_\lambda^{*q} + B_\lambda^q b_\lambda^{-q}) \\ \rho_q^F &= \Sigma_\mu (A_\mu^{*q} a_\mu^{*q} + A_\mu^{-q} a_\mu^{-q}) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$H_{FB}=\Sigma_q v_q \Sigma_\lambda(B^{*q}_\lambda b^{*q}_\lambda + B^{-q}_\lambda b^{-q}_\lambda)\cdot\sum_\mu(A^{*-q}_\mu a^{*-q}_\mu + A^q_\mu a^q_\mu)$$

但し、q は運動量、μ,λはフォノン、zero-sound…の異なる形の excitation を示し、B, Aはρの展開係数である。$\rho_q=\rho^*_{-q}$を考慮に入れてある。
中性の Fermi及び Bose 系が夫々一様で isotropic な流体とすると、次の sum rule が成立つ。

$$\left.\Sigma_n\frac{|(\rho^*_q)_{no}|^2}{(E_n-E_o)}\right|_{q\to 0}=\frac{N}{2ms^2} \qquad (5)$$

但し　　s：音速

之は compressibility sum rule と呼ばれるものである。後でこれを使うので、Bose, Fermi 系について、夫々ρに(4)を代入して

$$\left.\Sigma_\lambda\frac{|B^q_\lambda|^2}{W^q_\lambda}\right|_{q\to 0}=\frac{N^B}{2m_B S_B^2}\ ;\ s_B^2 \doteqdot \frac{\alpha N^B}{m_B} \qquad (6)$$

（αは pseudo-potential 又は t-matrix）

$$\left.\Sigma_\mu\frac{|A^q_\mu|^2}{\omega^q_\mu}\right|_{q\to 0}=\frac{N^F}{2m_F S_F^2}\ ;\ s_F^2 \doteqdot \left(\frac{p_F}{m_F}\right)^2\times\frac{1}{3} \qquad (7)$$

（p_F：フエルミ運動量、このs_F^2は(1st sound)^{2}で weak-couping の形）
但し等方性より $W^q_\lambda=W^{-q}_\lambda$, $B^q_\lambda=B^{-q}_\lambda$, $\omega^q_\mu=\omega^{-q}_\mu$, $A^q_\mu=A^{-q}_\mu$ を使つた。
具体は之位にして、Equation of motion を書いて、Bose-Fermi 系の結合で密度のゆらぎがフォノン・zero-sound・one-pair 等からどの様に変るかをしらべて安定性をみてみよう。

$$-i\frac{d}{dt}a^{*q}_\mu=\omega^q_\mu a^{*q}_\mu + v_q\sum_\lambda(B^{*q}_\lambda b^{+q}_\lambda + B^{-q}_\lambda b^{-q}_\lambda)\cdot A^q_\mu$$

$$-i\frac{d}{dt}a^{-q}_\mu=-\omega^{-q}_\mu a^{-q}_\mu - v_q\Sigma_\lambda(B^{*q}_\lambda b^{*q}_\lambda + B^{-q}_\lambda b^{-q}_\lambda)\cdot A^{*-q}_\mu$$

故に、$\omega^q_\mu=\omega^{-q}_\mu$ と $|A^q_\mu|^2=|A^{-q}_\mu|^2$を使つて

$$
\left.\begin{aligned}
-i\frac{d}{dt}(A_\mu^{q*}a_\mu^{q*}+A_\mu^{-q}a_\mu^{-q}) &= \omega_\mu^q(A_\mu^{q*}a_\mu^{q*}-A_\mu^{-q}a_\mu^{-q}) \\
-i\frac{d}{dt}(A_\mu^{q*}a_\mu^{q*}-A_\mu^{-q}a_\mu^{-q}) &= \omega_\mu^q(A_\mu^{q*}a_\mu^{q*}+A_\mu^{-q}a_\mu^{-q})
\end{aligned}\right\} \quad (8)
$$

$$
+2v_q\,\Sigma_\lambda(B_\lambda^{q*}b_\mu^{q*}+B_\mu^{-q}b_\mu^{-q})\cdot|A_\mu^q|^2
$$

従つて
$$
\left.\begin{aligned}
A_\mu^{q*}a_\mu^{q*}+A_\mu^{-q}a_\mu^{-q} &= \rho_\mu^{q;F} \\
B_\lambda^{q*}b_\lambda^{q*}+B_\lambda^{-q}b_\lambda^{-q} &= \rho_\lambda^{q;B}
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

とすると

$$
-\frac{d^2}{dt^2}\rho_\mu^{q;F}-(\omega_\mu^q)^2\rho_\mu^{q;F}=2\omega_\mu^q v_q\,\Sigma_\lambda\rho_\lambda^{q;B}|A_\mu^q|^2 \quad (10)
$$

同様にして

$$
-\frac{d^2}{dt^2}\rho_\lambda^{q;B}-(W_\lambda^q)^2\rho_\lambda^{q;B}=2W_\lambda^q v_q\,\Sigma_\mu\rho_\mu^{q;F}|B_\lambda^q|^2 \quad (11)
$$

ここで $\rho\propto e^{i\omega t}$ とおいて

$$
\left.\begin{aligned}
(\omega^2-(\omega_\mu^q)^2)\rho_\mu^{q;F} &= 2\omega_\mu^q|A_\mu^q|^2\quad v_q\,\Sigma_\lambda\rho_\lambda^{q;B} \\
(\omega^2-(W_\lambda^q)^2)\rho_\lambda^{q;B} &= 2W_\lambda^q|B_\lambda^q|^2\quad v_q\,\Sigma_\mu\rho_\mu^{q;F}
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

之から ω^2 を決める式を作ると：

$$
g(\omega^2)=1-v_q\,\Sigma_\mu\frac{2\omega_\mu^q|A_\mu^q|^2}{\omega^2-(\omega_\mu^q)^2}\cdot v_q\,\Sigma_\lambda\frac{2W_\lambda^q|B_\lambda^q|^2}{\omega^2-(W_\lambda^q)^2}=0 \quad (13)
$$

となる。之が $\omega^2<0$ の根をもてば不安定になるから、安定な所は $q\to0$ のみに注目して

$$1 > g(\omega^2)\Big|_{\omega^2<0} > g(0)$$

を考えに入れると $g(0)>0$ ならば $\omega^2<0$ の所には $g(\omega^2)=0$ になる根はない故

$$1 > v_q \Sigma_\mu \frac{2|A_\mu^q|^2}{\omega_\mu^q} v_q \Sigma_\lambda \frac{2|B_\lambda^q|^2}{W_\lambda q} \qquad \text{（安定領域）} \qquad (14)$$

ここに(6)(7)を入れると

$$1 > \frac{v_q N^F}{m_F s_F^2} \frac{v_q N^B}{m_B s_B^2} \qquad \text{（安定領域）} \qquad (15)$$

s_F^2，s_B^2 を入れると

$$(N^F/\Omega)^{1/3} < \frac{m_F m_B \left\{ \frac{s_F^2}{(N_F/\Omega)^{2/3}} \cdot \frac{s_B^2}{(N_B/\Omega)} \right\}}{(v_q \Omega)^2} \qquad (16)$$

ならばCoupled density fluctuation は安定である。ここで｛ ｝の中の量は密度に殆ど関係しないと考えられるから、右辺は密度についてconstantに近い。

（16）から言える事は、之を導くのにcompressibility sum rule を使つたので、中性のBose 系とFermi系が同一体積を一様に占めている時には、Fermi系の密度は（16）式を満さねばならない。若し、Fermi系の密度が（16）より上であると、密度のゆらぎが不安定になつて一様に同一体積を占められなくなる。

以上の考えを直接にHe_3-He_4系にあてはめるのは危険かもしれないが、先づ、He_3 の少量がHe_4 に一様に溶けたとして、* (2)(3)(4)のモデルの形にdensity oscillationがかけると仮定する。（この場合、H_F, H_B の各々スペクトルには相手方の影響が中間状態にはいつてくる。） その上で、He_3 の量をましてゆくと、（16）式を満さない密度になるとphase-separation の様な事が起りそうだと言えよう。実験値を使えば$(v_q\Omega)$が（16）からきめられよう。

（註）

Fermi 系の方のモデルハミルトニアンには、Wentzel(P.R. 108 1593 ('57))の論文の形で、（正準変換をした後の）collective-oscillation (zero sound) とone-pair excitation も入つている。

---

*)（前頁の脚注） He_3 の液滴をHe_4 に入れるとNormal なHe_3 の密度では（16）が破れて、密度のゆらぎの成長によりHe_3 の密度が下つていつて（16）を満す所迄下り、これ以下にもなつて一様になるとする。これ以下になる時のMechanism はも早、密度のゆらぎは（16）より安定だから、density fluctuation の不安定性によるものではない。(Thermal agitation? 実験は 0°Kではなされていない!?)。