

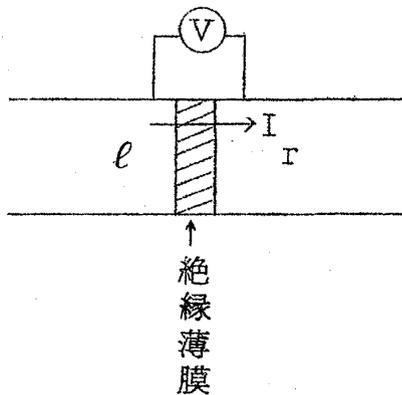
# Electron Tunneling について

和田 靖 (東大理)

超伝導体に関係した electron tunneling の現象での最近の話題をまとめて紹介するよりにとのことであつたが、どうも話題をまとめるところまで行かず、目についた問題を二三取り上げてみる程度に終つた。従つて、この外にも興味のある問題が多くあることを、あらかじめお断りしておきたい。

## 1 Tunneling current の式

Electron tunneling の実験というものは、二つの金属を、その酸化膜のような絶縁薄膜をはさんで密着させて junction を作り、そこに電流  $I$  を流



したとき、絶縁膜の両側にどれだけのポテンシャル差  $V$  が出来るかを測る。絶縁体を通して電流が流れるのは、電子のトンネル効果による。

tunneling current の式を導く方法に二種類ある。一つは B.D. Josephson によるもので、<sup>1)</sup> 絶縁体の部分は電子の運動に対して、何かある非常に高い potential barrier を与えるように解釈すれば、体系全体に互つて電子の波動場を定義することが出来、それによつてハミルトニアンはじめ色々な量を与え、更に電子の一体のグリーン関数を定義出来る。電子のグリーン関数が与えられれば、電流密度の期待値は、そのグリーン関数から求まる。グリーン関数は、それに対する方程式に Gorkov 近似を用いて iteration で解いた結果を用いると、電流密度が order parameter についての巾展開の形に求まる。容易に推測されるように、絶縁膜の性質はこの結果の中には explicit には入つて来ない。それは、order parameter についての展開の中で用いた normal state での電子のグリーン関数を通じて利いて

来るだけである。この点は長所でもあるが、又一面不便な点でもあるように思う。例えば junction に直流電圧がかかっている場合を考えると、normal state の Green 関数を stationary state での方法で求めることは出来ない。どうしても current が流れている状態で求めなくてはならず、そのためには junction の性質を explicit に考慮に入れなければならない。実際 Josephson の論文では  $V = 0$  の場合だけが議論されている。

才二の方法は "tunneling Hamiltonian"  $H_T$  を導入するやり方である。<sup>2)</sup> 全体系の Hamiltonian  $H$  を

$$H = H_0 + H_T, \quad (1)$$

$$H_0 = H_L + H_R - eVN_R, \quad (e > 0)$$

$$H_T = \sum_{pp'\sigma} \{ T_{pp'} C_{p'\sigma}^{R*} C_{p\sigma}^L + \text{Hermitian conjugate} \}. \quad (2)$$

ととる。 $H_L$  は junction の左側の金属だけがあつたときのハミルトニアン、 $H_R$  は右側の金属に対するもの、 $V$  は junction にかけられた電位差、 $-e$  を電子の電荷とし  $N_R$  は右側の金属中の電子総数、 $C^R, C^L$  はそれぞれに右及び左側の金属中での電子の annihilation operator である。 $T_{pp'}$  は運動量  $p$  の電子を左から右へ移して運動量  $p'$  にする行列要素であり junction の性質によつて決まる。最も簡単な例として、絶縁膜が  $z$  軸に垂直で、 $z = 0$  の位置にあり、そこで  $\delta$  関数的な高い potential barrier で表わされるとしてみると

$$T_{pp'} \sim \frac{T}{\varrho^{1/3}} \delta_{p_{11}, p'_{11}} \quad (3)$$

となる。 $\varrho$  は金属の体積、 $T$  は barrier の高さを与える量、 $p_{11}$  は junction に平行な  $p$  の成分である。ここで barrier は junction の面内で一様であるとした。<sup>3)</sup>

上のハミルトニアンを用いて tunneling current を求めるには次のように考える。まず左右の金属を離して用意し、それに電位差  $V$  をかける。ある時

## 研究会報告

刻  $t_0$  にその二つを絶縁膜をはさんで接触させる。つまり tunneling Hamiltonian  $H_T$  を switch on する。するとそれまでの熱平衡状態が崩れ始め junction に電流を流して新しい平衡状態へ移ろうとする。そのときの電流が求める tunneling current だと考える訳である。ここで注意を二つしておく。オ一に新しい平衡状態へ移つて行くときに外界との間に熱の出入があると話は面倒になり、dynamical な議論だけではすまなくなる。従つて current が流れる際に熱の出入による entropy の変化が intrinsic entropy の増加に比べて小さいことが必要である。大きな Joule 熱が出るようなときはよくないだろう。オ二の点は以上のような取扱い方では、新しい平衡状態が成立つと current は止つてしまふが、実際は電圧を保ちながら実験するので current は止らない。しかしこの差は tunneling current がそれ程大きくない限り問題にはならないと思われる。通常、理論的取扱いの方でも  $H_T$  を小さいとして一電子か二電子の tunneling しか考えない。

以上のような考えに基けば、 $t > t_0$  での density matrix  $\rho(t)$  は

$$\rho(t) = \exp(-iH(t-t_0)) \rho(t_0) \exp(iH(t-t_0))$$

で、 $\rho(t_0)$  は体系が熱平衡にあつたことから

$$\rho(t_0) = \exp\{\beta(\mathcal{Q}_0 - H_L - H_R + \mu N)\}$$

で与えられる。 $\mathcal{Q}_0$  は normalization の条件から決まる熱力学ポテンシャル  $N \equiv N_L + N_R$  は全電子数である。 $\rho(t_0)$  の中に電位差  $V$  は入らない。 $\rho(t_0)$  は左右それぞれの金属内での電子分布を与える量で、それは二つの金属間の電位差にはよらない。

時刻  $t$  での tunneling current  $I(t)$  は左側の金属中の電子総数の時間変化  $\dot{N}_L$  の平均によつて与えられる。

$$I(t) = -e T_R \rho(t) \dot{N}_L = -e T_R \rho(t_0) \underline{\dot{N}_L}(t)$$

$\underline{\dot{N}_L}(t)$  は Heisenberg 表示の量で

$$\dot{N}_l(t) \equiv \exp(iH(t-t_0)) \dot{N}_l \exp(-iH(t-t_0)).$$

この表式を  $H_T$  について展開してその二次まで求めたのが Ambegaokar-Baratoff である。<sup>4)</sup> 彼等は  $t_0$  を無限の過去にとつた。

Heisenberg 表示の代りに相互作用表示を

$$\dot{N}_l(t) \equiv \exp(iH_0(t-t_0)) \dot{N}_l \exp(-iH_0(t-t_0)) \quad (4)$$

で導入すると、 $H_T$  について最低次の近似で

$$\dot{N}_l(t) \cong \dot{N}_l(t) - i \int_{t_0 \rightarrow -\infty}^t [\dot{N}_l(t), H_T(t_1)] dt_1$$

と表わせるから tunneling current は

$$I(t) \cong e i \int_{-\infty}^t T_r \rho(t_0) [\dot{N}_l(t), H_T(t_1)] dt_1$$

となる。又

$$i\dot{N}_l = [N_l, H_T] = \sum \{ T_{pq}^* c_{p\sigma}^{*l} c_{q\sigma}^r - T_{pq} c_{q\sigma}^{r*} c_{p\sigma}^l \}$$

より  $\dot{N}_l(t)$  が与えられる。それを  $I(t)$  の式に代入すると

$$I(t) \cong ze \operatorname{Re} \int_{-\infty}^t T_r \rho(t_0) [\sum T_{pq}^* c_{p\sigma}^{*l}(t) c_{q\sigma}^r(t), H_T(t_1)] dt_1 \quad (5)$$

となる。

右辺の  $H_T(t_1)$  の中に  $H_T$  の式(2)を相互作用表示にしたものを代入すると  $c^{*l} c^r c^{r*} c^l$  の型と、 $c^{l*} c^r c^{l*} c_r$  の型の二つの項が出来る。前者が普通の tunneling current  $I_1$  に対応し、後者が Josephson の tunneling current  $I_2$  を与える。

まず話の簡単な普通の tunneling current  $I_1$  に対応する項を考えよう。よくやるように Hamiltonian  $H_l, H_r$  の固有値、固有状態を

$$H_l |n_l\rangle = E_{n_l} |n_l\rangle, \quad H_r |n_r\rangle = E_{n_r} |n_r\rangle$$

研究会報告

とし、それらを用いて相互作用表示の量(4)の時間変化を explicit に表わして current の式(5)の時間積分を行う。そのようにして得られた結果を、我々が既に知っている量で書かなくてはならない。我々が知っている量といえ、それは thermal Green 関数で、Nambu 式に行列を使つて<sup>5)</sup>

$$\psi_p = \begin{pmatrix} c_{p\uparrow} \\ c_{-p\downarrow}^* \end{pmatrix}, \quad \psi_p^* = (c_{p\uparrow}^*, c_{-p\downarrow})$$

と書くと

$$G(p, t_1, t_2) = -T_R e^{\beta(\mathcal{Q}_0 - H - \mu N)} U T(\psi_p(t_1) \psi_p^*(t_2)) \quad (6)$$

で定義される。ここでの  $\mathcal{Q}_0, H, N$  は junction を含む体系に対するもの、(1), ではなくて左側の金属だけ、又は右側の金属だけに関係するもので、本来なら  $H_L, N_L$  などと書くべきものである。 $\psi_p(t)$  の時間変化は

$$\psi_p(t) = e^{(H - \mu N)t} \psi_p e^{-(H - \mu N)t}$$

で定義される。 $\psi_p^*(t)$  も同様である。operator  $U$  は

$$U = 1 + R + R^*$$

で  $R, R^*$  はそれぞれ Cooper pair を一ヶ消したり作つたりする operator である。我々が直接知っているのは、グリーン関数(6)そのものよりも、その Fourier 変換

$$G(p, iE_n) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^\beta dt_1 dt_2 e^{iE_n(t_1 - t_2)} G(p, t_1, t_2)$$

$$E_n = (2n + 1)\pi / \beta \quad ; \quad n \text{ 整数}$$

で、変数  $iE_n$  について解析接続し  $iE_n \rightarrow \omega + i\eta$  と実軸の上から近づけて得られる  $G(p, \omega)$  という量である。tunneling current の式を  $H_L, H_R$  の固有値固有状態で書き直したのと同じことを  $G(p, \omega)$  に対して行う。すると  $G$  の 1-1 成分に対して

$$\text{Im } G_{11}(p\omega) = -\pi (1 + e^{-\beta\omega}) \sum_{nn'} e^{\beta(\omega - E_n + \mu N)} \delta(E_n - E_{n'} + \omega + \mu) |\langle n | c_{p\sigma} | n \rangle|^2$$

のように  $\text{Im } G_{11}$  が  $c_{p\sigma}$  の matrix element で表わされるが、これを用いて current の式の中の  $c_{p\sigma}$  の matrix element を消去して  $\text{Im } G$  で表わせればよい。その結果、結局

$$I_1 = \frac{e}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum |T_{pq}|^2 \{ f(\omega) - f(\omega + eV) \} \text{Im } t_{p\sigma}^L(p\omega) \text{Im } t_{p\sigma}^R(q, \omega + eV) \quad (7)$$

という関係を得る。但し  $f(\omega) = 1/(1 + e^{\beta\omega})$ 。  $t_r$  は二行二列の行列の対角和である。

tunneling の matrix element に対する近似的な式(3)を代入して、この積分を空間表示に戻してみよう。空間表示でのグリーン関数を

$$G(x, \omega) \equiv \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G(\mathbf{k}, \omega) \quad (8)$$

とおくと

$$\sum_{pq} |T_{pq}|^2 t_{p\sigma}^L(p\omega) t_{p\sigma}^R(q, \omega + eV) \sim \Omega^{2/3} T^2 \int dx dy t_{p\sigma}^L(xy_0, \omega) t_{p\sigma}^R(-x-y_0, \omega).$$

ここで  $x, y$  軸は junction の面内にとつた。あとでみるように

$$t_{p\sigma}^L(\vec{x}, \omega) \propto \frac{1}{|\mathbf{x}|} \sin k_F |\mathbf{x}|$$

であるので、上の積分では integrand を  $x=y=0$  の値でおきかえ、それに effective な積分領域のひろさをかければ十分であろう。その近似で十分よいときは、結局トンネル効果を起す点でのグリーン関数の値が重要であることが判る。そして current は junction の面積  $\Omega^{2/3}$  に比例する。比例常数  $\bar{T}_0^2$  を適当に定義すれば、current の式(7)は

$$I_1 = \bar{T}_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \{ f(\omega) - f(\omega + eV) \} \text{Im } t_{p\sigma}^L(0, \omega) \text{Im } t_{p\sigma}^R(0, \omega + eV) \quad (9)$$

研究会報告

と書ける。

表式(7)を書直すもう一つのやり方は、グリーン関数  $G$  の行列要素を explicit に表わした式を用いる。  $G$  に対する Dyson 方程式は、相互作用のない系でのグリーン関数  $G_0$  と self energy part  $\Sigma$  によつて

$$\frac{1}{G(p, \omega)} = \frac{1}{G_0(p, \omega)} - \Sigma(p, \omega),$$

$$\frac{1}{G_0} = \omega - \epsilon_p \tau_3$$

$$\Sigma = \zeta_p \omega + \chi_p \tau_3 + \phi_p \tau_1 \quad (10)$$

と書ける。  $\tau_i$  は Pauli の spin matrix,  $\epsilon_p$  は電子の band energy,  $\zeta, \chi, \phi$  は  $\Sigma$  に対する方程式から self-consistent に決まる量で、その中  $\zeta, \phi$  は  $p$  dependence が少く、  $\omega$  だけの関数と見做してもよいことが判り、  $\chi$  は主として chemical potential への shift と電子の有効質量への Coulomb 相互作用による補正を与えることが判る。 Dyson 方程式より

$$G(p, \omega) = \frac{\omega Z + \bar{\epsilon}_p \tau_3 + \phi \tau_1}{\omega^2 Z^2 - \bar{\epsilon}_p^2 - \phi^2} \quad (11)$$

を得ることで

$$Z = 1 - \zeta, \quad \bar{\epsilon}_p = \epsilon_p + \chi$$

とおいた。(11)式を  $I_1$  の式(7)の中へ代入して、  $|T_{pq}|^2$  の  $pq$  dependence を無視して、その平均値  $|T|^2$  でおきかえて  $p, q$  についての和をとると

$$I_1 = 4\pi e |T|^2 \rho_l \rho_r \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \{ f(\omega) - f(\omega + eV) \} \operatorname{Re} \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 - d_l^2}} \operatorname{Re} \frac{|\omega + eV|}{\sqrt{(\omega + eV)^2 - d_r^2}} \quad (12)$$

が導かれる。ここで  $\rho_l, \rho_r$  は左右金属の電子状態の Fermi 面での 1 スピンあたりの状態密度、  $d_l, d_r$  はそれぞれの金属で

$$d = \phi / Z$$

で定義された量で、BCS の energy gap を dynamical に拡張した量にあたり gap parameter と呼ばれる。 $\Delta$  や  $\Delta_r$  は理論からも計算できる量であるが、(12)からも判るように tunneling current  $I_1$  は  $\Delta$  に対して直接 information を提供する。<sup>6)</sup> 例えば右側の金属が normal metal で  $\Delta_r = 0$  であり又  $T = 0$  の場合に  $dI_1/dV$  を計算してみると、 $\Delta$  と簡単な関係にあることが判る。

ここで一つ注意しておきたいのは gap parameter  $\Delta$  が complex な量だということである。これは電子-phonon 相互作用のために quasiparticle が有限の寿命をもつためであるが、このことから  $\Delta$  を完全に決めようとしたら二つの独立な知識が要る。上の  $I_1$  はその一つとして、他にどのようなものが考えられようか。例えば Josephson current  $I_2$  というのは、どの程度の情報を与える可能性があるか調べてみよう。 $I_2$  に対する表式も  $I_1$  に対するのと同じ手順でみちびかれる。ここでは特に注意すべき点だけを抜き書きしておこう。

オーにグリーン関数の定義の式(6)には Cooper pair の生成消滅演算子  $R^*$ ,  $R$  が入っているが、current の式(5)にはそれが入っていない。Ambegaokar-Baratoff は Ferrell-Prange の考え方<sup>7)</sup> を用いて、 $V=0$  のときは  $H_T$  のために左右の電子総数  $N_L, N_R$  は一定ではなく  $N_L - N_R$  の色々な値に対応する状態が phase coherent に重なり合つて、任意の固有状態  $\phi$  は

$$R_L R_R^* \phi = e^{-i\alpha} \phi$$

の性質をみたすとしている。従つて  $e^{i\alpha}$  という factor を入れておけば、あとはグリーン関数で書けるということになる。しかしこの考えは少し妙なところがある。前にみたように我々は current の表式を  $H_T$  の巾展開の形に求めた。 $\rho(t_0)$  は  $H_T$  を含まない。そのような状態での平均値を求めるのに  $H_T$  の効果を考えに入れるのは納得し難い。更に  $N_L - N_R$  の異なる状態を重ね合わせるには  $V=0$  の条件が必要で、Ambegaokar-Baratoff も  $V \neq 0$  のときの重ね合わせの安定性は疑わしいと述べている。我々は次のように考える。左右の金属はそ

研究会報告

それぞれ外界の電流源と結合しているために  $H_T=0$  であつても  $N_L, N_R$  は一定ではない。Cooper pair の数だけが異なるような状態も  $H-\mu N$  の固有値は縮退しているから、左右それぞれの金属の中で、上に考えたような coherent な重ね合せが成立つている筈である。

$$R_R^* \phi_R = e^{-i\alpha_R} \phi_R, \quad R_L \phi_L = e^{i\alpha_L} \phi_L \quad \text{etc.}$$

このように考えれば、current の式をグリーン関数で書くことは  $I_1$  と同じように出来る。

もう一つの注意すべき点は gap parameter  $\Delta$  が一般に complex だということである。Josephson current は order parameter の phase に関係することはよく知られているが、このことと  $\Delta$  が complex なこととは、どのように関連しているだろうか。この問題を一応保留して  $I_2$  をグリーン関数で書いてみると

$$I_2(t) = \frac{4e}{\pi^2} \text{Im} \sum_{kq} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \{ f(\omega) - f(\omega') \} T_{kq} T_{-k-q} e^{i(\alpha_R - \alpha_L + 2eV)t} \frac{1}{\omega - \omega' + eV - i\eta} \cdot J_M G_{21}^L(k\omega) J_M G_{12}^R(q\omega') \quad (13)$$

となる。ここで  $J_M$  の記号は

$$J_M G(p\omega) \equiv \frac{1}{2} [G(p\omega + i\eta) - G(p\omega - i\eta)] \quad (14)$$

で定義した。  $I_2(t)$  が振動数  $2eV/\hbar$  の交流になるのは、  $I(t)$  に対する最初の式(5)の integrand が右から左へ二ケの電子を移すものであるため、時間について  $t-t_1$  だけの関数にならなかつたことによる。普通 tunneling current  $I_1$  の式(7)との対応も見やすい。  $I_1$  の場合は余分な phase factor がなく、  $J_M$  は普通の imaginary part と同じになるために  $\omega'$  積分をとることが出来たのである。

次に  $J_M G$  を書き直そう。 Josephson current のときに大切な点は Nambu Green 関数に対する self-energy part  $\Sigma$  を(10)の表式に代つて

$$\Sigma = \zeta_p \omega + \lambda_p \tau_3 + \phi'_p \tau_1 + \phi''_p \tau_2 \quad (15)$$

とおく所にある。もともと  $\Sigma$  は二行二列の行列であるから (15) の形に一般的に表わせた筈であるが、今迄の議論では  $\phi''_p = 0$  において一般性を失わなかつたが、Josephson current のときは  $\phi''_p$  が大切になる。selfenergy part が (15) に変つたためにグリーン関数は

$$G = (\omega Z + \bar{\epsilon}_p \tau_3 + \phi'_p \tau_1 + \phi''_p \tau_2) / (\omega^2 Z^2 - \bar{\epsilon}_p^2 - \phi'^2 - \phi''^2) \quad (16)$$

となる。 $\Sigma$  を Migdal 近似で求めて  $Z, \phi', \phi''$  に対する selfconsistent な方程式 — energy gap equations — を出してみると、<sup>8)</sup>  $\phi'$  と  $\phi''$  は同じ方程式をみたすことが判る。 $\phi'' = 0$  のときの  $\phi$  に対する方程式との違いは、(16) の分母が前に  $\phi^2$  たつたところが  $\phi'^2 + \phi''^2$  になつた点だけである。これからして次のことが推測されよう。もし  $\phi$  に対する方程式が unique な解しかもたなかつたとすると、 $\phi', \phi''$  に対する方程式は次の形の解しかもたない。

$$\phi' = \phi \cos \alpha, \quad \phi'' = \phi \sin \alpha \quad (17)$$

ここで  $\alpha$  は任意の実数である。

一方  $G_{12}, G_{21}$  を電子の演算子  $c, c^*$  の行列要素を用いて書き表わした式と見較べると

$$G_{12}(p, \omega \pm i\eta) = G_{21}(p, \omega \mp i\eta)^* \quad (18)$$

の関係があることが判る。グリーン関数の定義 (6) からして  $G_{12}$  は  $cc$  の型の量の平均であり、 $G_{21}$  は  $c^*c^*$  の型の量の平均であるから、上記のような関係があることは推測出来る。 $G$  に対する (16), (17) の結果を  $J_M G$  の定義式 (14) に代入して (18) の性質を用いると

$$J_M G_{12}(p, \omega) = i e^{-i\alpha} \operatorname{Im} \frac{\phi}{\omega^2 Z^2 - \bar{\epsilon}_p^2 - \phi^2},$$

$$J_M G_{21}(p, \omega) = i e^{i\alpha} \operatorname{Im} \frac{\phi}{\omega^2 Z^2 - \bar{\epsilon}_p^2 - \phi^2},$$

## 研究会報告

が導かれる。Josephson current が order parameter の phase に関係すると普通言われるが、その phase とは上の結果の  $\alpha$  のことに外ならない。

tunneling matrix element の積を

$$T_{kq} T_{-k-q} \simeq |T \cdot T| e^{i\alpha'}$$

と平均値でおきかえると、Josephson current (13) は

$$I_2(t) = -4e |T \cdot T| \rho_l \rho_r \operatorname{Im} e^{i(\alpha + \alpha_r - \alpha_l + \alpha' + 2eV)t}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{f(\omega) - f(\omega')}{\omega - \omega' + eV - i\eta} \operatorname{Re} \frac{\Delta_l(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - \Delta_l^2}} \cdot \operatorname{Re} \frac{\Delta_r(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta_r^2}}.$$

となる。 $dI_1/dV$  から  $\operatorname{Re}(\omega/\sqrt{\omega^2 - \Delta^2})$  が判つたように、 $I_2$  から  $\operatorname{Re}(\Delta/\sqrt{\omega^2 - \Delta^2})$  が判るかという、これは仲々難しそうである。色々な原因から出て来る phase factor  $\alpha + \alpha_r - \alpha_l + \alpha'$  の影響を処理するやり方がオーに見当つかない。

古い話を長々とやつたが、tunneling current の式を一応ひちびいたので、それを用いて昨年中の話題を二三とり上げてみよう。

## 2 Tomasch の実験

Tomasch は  $Al-Al_2O_3-Pb$  (又は  $In$ ) の junction で、 $Pb$  の厚さが  $2.9 \sim 9.7 \mu$  程度にかなり厚いときに  $Al, Pb$  を両方共超伝導状態にして tunneling の特性を測り、 $d^2V/dI^2 - V$  の graph を描いて、 $eV > \Delta_{Al} + \Delta_{Pb}$  のところに structure を見出した。<sup>9)</sup> それによると  $dI/dV$  の local maxima が

$$eV = \Delta_{In} + \Delta_{Pb} + n\hbar v, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$v \sim v_F/d$$

のポテンシャル差のところに存在するという。ここで  $v_F$  は  $Pb$  の Fermi velocity,  $d$  はその厚さである。更に  $Pb$  の、junction とは反対側の面に  $Ag$  を coating するとこの現象はますます強められるという。

この現象の理論的説明は McMillan-Anderson によつて与えられた。<sup>10)</sup> そ

の考え方は次の通りである。電子のグリーン関数に対する selfenergy part  $\Sigma$  は一般に場所の関数であつて、Pb の膜の表面ではかなり変化しているであろう。 $\Sigma$  に対する式 (10) で言えば、そこでは  $\delta\phi \cdot \tau_1$  の型の "energy gap の perturbation" があるであろう。一方 energy  $\omega$  で junction から入つて来た電子は運動量  $k_1, k_2$  の quasiparticle の状態の重ね合せとして書ける。ここで  $k_1, k_2$  は

$$\omega^2 = \bar{\epsilon}_k^2 + J^2$$

より決まり

$$k_{1,2} = k_F \pm (\omega^2 - J^2)^{1/2} / v_F \pi$$

である。そこで  $k_1$  という運動量をもつた quasiparticle は Pb 膜中を propagate してもう一つの表面に達して  $\delta\phi \cdot \tau_1$  型の perturbation で  $k_2$  状態へ散乱され、それが junction の方へ帰つて来て、はじめの  $k_2$  の部分と干渉する。それが強まるのは

$$|k_1 - k_2| d = \frac{2d\sqrt{\omega^2 - J^2}}{\pi v_F} = 2n\pi \quad n=1, 2, \dots \quad (19)$$

で、 $\omega = eV$  とおくと、これから Tomasch の structure が出て来る。

Green 関数を用いた議論も McMillan-Anderson によつて与えられている。まず selfenergy part を bulk の Pb のもの  $\Sigma_1$  と表面での perturbation の項  $\Sigma_2$  にわけると

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad (20)$$

bulk sample 中の Green 関数を同じく  $G_1$  と書くと、上の関係に対応して

$$\frac{1}{G} \cong \frac{1}{G_1} - \Sigma_2' (G_1)$$

ここで  $\Sigma_2'$  と  $\Sigma_2$  は一般には異なる。(20) 中の  $\Sigma_1$  が  $G$  の functional であつたのを、 $G_1$  のそれに書き直したときの補正を加えてある。これから

研究会報告

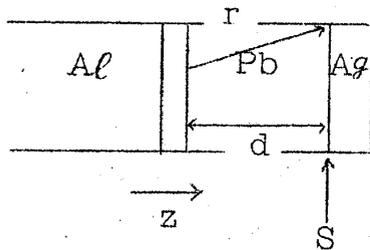
$$G = G_1 + G_1 \Sigma_2' G_1 = G_1 + \Delta G$$

として  $\text{Im } t_{\text{r}} G$  の junction 表面での値を求めればよい。  $G_1(r, \omega)$  は  $G(p, \omega)$  の式 (11) を (8) に従つて Fourier 逆変換すれば

$$G_1(r, \omega) = -\frac{m}{2\pi r} \exp\left\{i \frac{m\sqrt{\omega_L^2 - \phi^2} r}{k_{\text{F}}}\right\} \cdot \left[ i \frac{\omega Z + \phi \tau_1}{\sqrt{\omega^2 Z^2 - \phi^2}} \sin k_{\text{F}} r + \tau_3 \cos k_{\text{F}} r \right] \quad (21)$$

を得、  $\Sigma_2' = -\delta\phi \cdot \tau_1 \delta(z-d)$  とおいて

$$\text{Im } t_{\text{r}} \Delta G = -\delta\phi \text{Im } t_{\text{r}} \int G_1(r, \omega) \tau_1 G_1(r, \omega) dS$$



と面 S 上での積分形に書ける。  $e^{ik_{\text{F}}r}$  で振動する項を無視してしまえば

$$\text{Im } t_{\text{r}} \Delta G \propto -\delta\phi \frac{\omega d}{\omega^2 - d^2} \text{Si}\left(\frac{2Z\sqrt{\omega^2 - d^2} d}{v_{\text{F}}}\right), \quad \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy, \quad (22)$$

となる。一方 tunneling current に対する補正は、簡単のため  $T=0$  で、  $\text{Al}$  を normal とすれば (9) より

$$\Delta I_1 = -2\pi \rho_{\text{r}} \bar{T}_2^2 \int_{-eV}^0 d\omega \text{Im } t_{\text{r}} \Delta G^l(0, \omega)$$

$$\therefore \frac{d\Delta I_1}{dV} = -2\pi e \rho_{\text{r}} \bar{T}_0^2 \text{Im } t_{\text{r}} \Delta G^l(0, -eV)$$

でこれの maximum は (22) より

$$eV = \sqrt{d^2 + \left(\frac{n\pi v_{\text{F}}}{Zd}\right)^2} \quad n=1, 2, \dots \quad (23)$$

与えられる。 (19) の式とくらべて異なるところは  $v_{\text{F}}$  の代わりに  $v_{\text{F}}/Z$  が入る点だけである。この結果を利用して Tomasch の structure から  $v_{\text{F}}/Z$  を

求めてみると、In に対しては anomalous skin effect から求めた値とよい一致を示すが、Pb に対しては、ほぼ2倍の値を与える。

この structure が厚い膜に対してだけ観測されることも (23) の結果から判る。 $\Delta \approx \frac{\pi v_F}{Zd}$  の条件は Pb に対して  $d \approx 10 \mu$  を与える。もう一つ指摘したのは "energy gap の perturbation" というのが、果して本質的かどうかという点である。 $G_1$  に対する式 (21) から判るように  $\Sigma'_2$  として

$$\Sigma'_2 = -\delta z \delta(z-d)$$

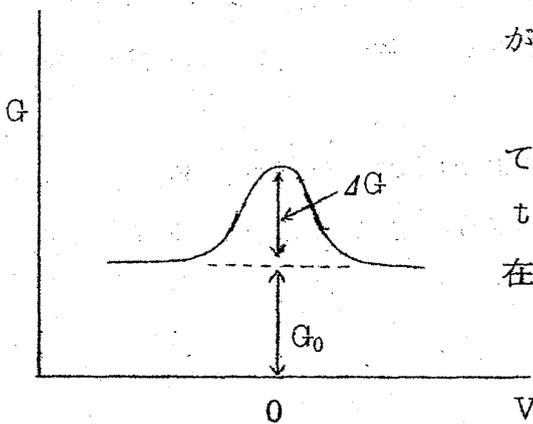
の形のものがあつても、tunneling current は同じ structure を示すだろう。

### 3 Wyatt の anomaly

Wyatt の anomaly については、昨年中に理論的な説明が試みられた。実験のデータも少しずつ増えて来ているが、理論との間には少しい違いが残っているようである。

Wyatt の実験<sup>11)</sup> は Ta-絶縁体-Al, Nb-絶縁体-Al の junction で、Ta, Nb, Al がすべて normal のときに junction の conductance  $G = dI/dV$  を  $V$  の関数として測つた。すると  $V=0$  のところに maximum を見出したのである。 $V$  にあまりよらない background  $G_0$  から高さ  $\Delta G = G - G_0$  は

$\Delta G/G_0 \approx 0.1$  程度であつた。この比は温度や  $V$  が大きくなると対数的に減少する。



この現象の理論的説明は Appelbaum によつて試みられた。<sup>12)</sup> Wyatt anomaly が junction のところに magnetic impurity が存在するために起つているという Anderson の idea<sup>13)</sup> に従つて、彼は tunneling Hamiltonian を (2) の形でなく localized states による形

## 研究会報告

$$H_T = \sum_{pp'} \{ T c_{p'}^{\uparrow} \vec{S} \cdot \vec{\sigma} c_p^{\downarrow} + \text{H. c.} + J c_{p'}^{\uparrow} \vec{S} \cdot \vec{\sigma} c_p^{\uparrow} + J c_{p'}^{\downarrow} \vec{S} \cdot \vec{\sigma} c_p^{\downarrow} \}$$

におきかえた。そして Kondo effect の出てくる order, つまり  $T^2 J$  の order まで tunneling current  $I_1(t)$  を求めた。我々の I の式(5)では不十分で、もう一つ高次の項まで考慮する必要がある。Appelbaum は junction に磁場がかかっている場合に式を導いているが、そこで  $H=0$  とおいてみると conductance  $G$  の  $V, T$  dependence は  $\log\{|eV| + kT\}$  という組み合わせで入り  $V=0$  のところでは

$$\frac{\Delta G}{G_0} = -4J(\rho_l + \rho_r) \log \frac{kT}{E_0}$$

となる。  $E_0$  は  $s-d$  相互作用のモデルでよく使う Fermi energy の上下での cut-off energy である。これから  $E_0 = 10.6 \text{ meV}$  と仮定して  $T_A - Al$  のデータに合わせて

$$J(\rho_l + \rho_r) = 0.012$$

を出している。

この仕事に前後して Rowell と Shen<sup>14)</sup> は  $Cr - Cr$  の酸化膜 - Ag の junction で resistance  $R$  に大きな anomaly を見出した。  $\Delta R/R_0$  は 100 よりも大きいし、  $V, T$  dependence は Appelbaum のように  $\log\{|eV| + kT\}$  ではなく、むしろ  $\log\{|eV| + nkT\}$  で  $n \approx 2.4$  である。この二つからみて Appelbaum の理論では  $Cr - Ag$  junction は説明出来まいというのがその結論である。

更に Shen-Rowell は  $Sn - Sn, Ta - Al$  の junction を調べた結果、これらも  $n=1.6$  ととつた方がよいことを報告している。<sup>15)</sup> これらの点を理解するには、もう少し詳しい分析が必要なようである。

## 4 Rochlin と Douglass の実験

最後に Rochlin-Douglass の実験<sup>16)</sup> をあげておこう。これは  $Sn - Sn,$

Pb-Pb などの super state での junction で  $V \approx 2\Delta/n$ , ( $n=2, 3, \dots$ ) のところに  $dV/dI$  に structure が見出されたという報告である。この structure は温度にも  $100 \text{ Oe}$  程度までの磁場にもよらないという。multiparticle tunneling と考えるには色々と無理があるようで、その後の新しい実験の報告もなく問題として残されている。

以上でこの報告を終りにする。Josephson current に関係した仕事については触れなかつたが、全体としての感想は、junction の細い性質を考慮に入れてない tunneling Hamiltonian  $H_T$  を用いていることを考えると、理論の適用範囲が思つたより広いということである。

## 文 献

- 1) B.D. Josephson, *Advanc. Phys.* 14 (1965) 419.  
P.G. de Gennes, *Phys. Letters* 5 (1963) 22.
- 2) M.H. Cohen, L.M. Falicov and J.C. Phillips, *Phys. Rev. Letters* 8 (1962) 316.
- 3)  $T_{pp}$  については  
W.A. Harrison, *Phys. Rev.* 123 (1961) 85.
- 4) V. Ambegaokar and A. Baratoff, *Phys. Rev. Letters*, 10 (1963) 486.  
A. Baratoff, Thesis.
- 5) Y. Nambu, *Phys. Rev.* 117 (1960) 648.
- 6) W.L. McMillan and J.M. Rowell, *Phys. Rev. Letters* 14 (1965) 108.
- 7) R.A. Ferrell and R.E. Prange, *Phys. Rev. Letters* 10 (1963) 479.
- 8) J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, W.A. Benjamin 1964, Chapter 7.
- 9) W.J. Tomasdh, *Phys. Rev. Letters* 16 (1966) 16.

研究会報告

- 10) W.L.McMillan and P.W.Anderson, Phys. Rev. Letters 16  
(1966) 85.

関連した論文としては

J.M.Rowell and W.L.McMillan, Phys. Rev. Letters 16 (1966)  
453.

energy gap の perturbation を exact に取扱つたものとして

T.Wolfram and M.B.Einhorn, Phys. Rev. Letters 14 (1966)  
966.

- 11) A.G.F.Wyatt, Phys. Rev. Letters, 13 (1964) 401.

R.A.Logan and J.M.Rowell, Phys. Rev. Letters 13 (1964)  
404.

J.Shewchun R.Williams, Phys. Rev. Letters 15 (1965) 160.

- 12) J.Appelbaum, Phys. Rev. Letters 17 (1966) 91.

- 13) P.W.Anderson, Phys. Rev. Letters 17 (1966) 95.

- 14) J.M.Rowell and L.Y.L. Shen, Phys. Rev. Letters 17 (1966)

15. この論文に色々な実験結果が表にまとめられている。

- 15) L.Y.L.Shen and J.M.Rowell, Bulletin Am. Phys. Soc. 12  
(1967) 22.

- 16) G.I.Rochlin and D.H.Douglass, Tr. Phys. Rev. Letters  
16 (1966) 359.