

# 長距離力を持つ Time-Dependent Ising Model

川崎 恭治 (九大理)

(3月18日受理)

## I. Introduction

相転移を記述するのに今迄大変成功を収めて来た近似法の一つに分子場近似と云う考えがあり、近年この考えをもつと精密にする努力が種々なされている。<sup>(1)-(5)</sup> 即ち今  $\mathbf{R}$  だけはなれた二点にある粒子 (スピン) 間に働く力  $v(\mathbf{R})$  を二つの部分

$$v(\mathbf{R}) = q(\mathbf{R}) + w(\mathbf{R}) \quad (1.1)$$

に分けたとき  $q(\mathbf{R})$  は short range の斥力、 $w(\mathbf{R})$  は次の型をもつ long range の引力とする；

$$w(\mathbf{R}) = -\lambda r^\nu \varphi(rR) \quad (1.2)$$

ここで  $\lambda$  は 1 の大きさの正の数、 $r$  は引力の range の逆数、 $\nu$  は dimension である。スピン  $1/2$  のときには斥力の効果は一つのスピンの  $1/2$  より大きくならないことの中に入っていると考えられる。<sup>(4)</sup> このとき  $r$  を 0 に近づけると分子場近似の結果 (liquid-gas では van der Waals の状態方程式) が厳密に得られることが示されている。<sup>(5)</sup> この論文の目的の一つはこの考え方を非平衡の問題に拡張することである。この問題に興味があるであろうことについては例えば Uhlenbeck が Washington の Critical Phenomena Conference において指摘している。

この研究のもう一つの動機は実験から得られた。即ち最近の強誘電体<sup>(6)(7)</sup> や臨界溶液<sup>(8)</sup> の誘電分散の実験によれば、臨界点からはなれた所では複素誘電率  $\epsilon(\omega)$  は単一の緩和時間をもつ Debye 型理論 (mono-dispersive theory) で表わせたが多くの場合、臨界点に近づくとつれて緩和時間に分布を持たせな

川崎恭治

ければならない、(poly-dispersive)ことが知られている。これに対して既にいくつかの理論的試み<sup>(9)(10)(11)(12)</sup>もあるが、未だ本質的に未解決の問題である。ここでは上記の考えによりこの問題に対する一つの well-defined model が与えられる。

出発点として出来れば上記の相互作用を持つたハミルトニアンを取りたいのだが、それは今の所大変難しそうなので Glauber<sup>(13)</sup>の Time-dependent Ising model を現在の場合に拡張したものから出発し、systematic に  $r^\nu$ での展開を試みる。最低次では複素誘電率  $\epsilon(\omega)$  は Debye 型になりその緩和時間  $\tau_0$  は臨界点  $T_c$  近傍で  $(T-T_c)^{-1}$  に比例して増大する。 $r^\nu$ の order では Debye 型の部分は減少しその減つた部分が poly-dispersive となつて現われる。緩和時間の分布は  $(1/3)\tau_0$  から小さい方に連続になり且つ  $T_c$  近くでは Hill-Ichiki のそれのように  $(T-T_c)^{-1}$  に比例してひろがっている。最後にこれと同じ結果を与える現象論的モデルについて述べる。

## II. Time-Dependent Ising Model

Ising Model のハミルトニアンを

$$H = -h \sum_i \sigma_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (2.1)$$

としよう。ここで  $\sigma_i$  は +1 か又は -1 をとる。h は外部磁場で、 $J_{ij}$  は交換相互作用で Ferro のときを考慮して正とする。このままでは時間はいらないので Glauber,<sup>(13)</sup> Suzuki<sup>(11)</sup> に従つて一つのスピン  $\sigma_i$  が反転する遷移確率は、時間の単位を適当にとつて

$$W_i(\{\sigma_i\}) = \frac{1}{2} \{1 - \sigma_i \tanh h \beta (h + \sum_j J_{ij} \sigma_j)\} \quad (2.2)$$

と選ぶ。 $\{\sigma_i\}$  は  $\sigma_i$  及びこれと相互作用をしているすべてのスピンの状態をあらわす。系の時間変化は全体系 ( $N$  spins) の状態  $\sigma^N \equiv \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  の分布函数  $P(\sigma^N, t)$  に対する次の Master Eq. であらわされる：

$$\frac{d}{dt}P(\sigma^N, t) = -\sum_m \sum_{\sigma'_m} \sigma_m \sigma'_m w_m(\{\sigma'_m\}) P(\sigma_1, \dots, \sigma'_m, \dots, \sigma_N, t) \quad (2.3)^{(*)}$$

所が実際に必要なのは  $P(\sigma^N, t)$  それ自身ではなくその reduced distribution function 或は time-correlation function である。  $A(\sigma^N)$   $B(\sigma^N)$  を任意のスピン函数としたときその time-correlation function は次のように定義される：

$$\langle A(t)B(0) \rangle \equiv \sum_{\sigma^N} \sum_{\sigma'^N} A(\sigma'^N) B(\sigma^N) P(\sigma'^N, t | \sigma^N) P_e(\sigma^N) \quad (2.4)$$

ここで  $P(\sigma'^N, t | \sigma^N)$  は  $t=0$  で  $\sigma^N$  の状態にあつたとき時間  $t$  で  $\sigma'^N$  の状態に移る条件付確率をあらわし方程式 (2.3) を満足する。又  $P_e(\sigma^N)$  はハミルトニアン (2.1) から作られたカノニカルな平衡分布函数である。そうすると (2.4) の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \langle A(t)B(0) \rangle = -\frac{1}{2} \sum_j \langle B(0) \{1 - \sigma_j(t) \tanh \beta [h + \sum_l J_{jl} \sigma_l(t)]\} \{A(t) - A_j(t)\} \rangle \quad (2.5)$$

ここで  $\sigma_j(t)$  は (2.4) の  $\sigma_j$  の意味で  $A_j(t)$  は  $A(t)$  において  $\sigma_j(t)$  の符号を変えたものである。右辺は又 operator を使つて

$$\frac{d}{dt} \langle A(t)B(0) \rangle = -\langle B(0) L A(t) \rangle \quad (2.6)$$

ここで  $L$  は時間をずらす operator で

$$L \equiv \frac{1}{2} \sum_j \{1 - \sigma_j \tanh \beta [h + \sum_l J_{jl} \sigma_l]\} (1 - \rho_j) \quad (2.7)$$

但し  $\rho_j$  は  $\sigma_j$  の符号を変える operator。明らかに  $L$  は時間によらない筈だから  $L$  の  $\sigma_j$  を  $\sigma_j(t)$  に変えてもよい (事実 (2.6) では  $L$  は  $\sigma_j(t)$  に作用する)。

### III 長距離力を持つ Ising Model

(\*) 以下時間  $t$  は常に正とする。

川崎恭治

今粒子（スピン）間の力のポテンシャルが (1.1) 及び (1.2) で与えられる場合を考えてみると既にのべたように今の場合には斥力  $q(\mathbf{R})$  は考える必要はない。格子気体のときとの対応を考えると

$$J_{ij} = \frac{1}{4} \lambda r^{\nu} \varphi(r R_{ij}) \quad (3.1)$$

例としてスピンの time-correlation function を考える。

$$\sigma_{\mathbf{q}} \equiv \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i}, \quad (\sigma_0 = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i) \quad (3.2)$$

として

$$N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{ij} \langle \sigma_i \sigma_j(t) \rangle_0 = \sum_j \langle \sigma_i \sigma_j(t) \rangle \quad (3.3)$$

この時間変化は (2.5) により

$$\frac{d}{dt} N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle = -N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle + \frac{1}{N} \sum_{ij} \langle \sigma_i(0) \tanh \beta [h + \sum_l J_{jl} \sigma_l(t)] \rangle \quad (3.4)$$

以下簡単のために  $h = 0$  で且つ  $T_c$  より高温側のみ考える。(3.4) を  $\beta J$  で形式的に展開して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle = & -[1 - \beta J(0)] N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle \\ & - \frac{\beta^3}{3N} \sum_{ijlmn} J_{jl} J_{jm} J_{jn} \langle \sigma_i(0) \sigma_l(t) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \rangle \\ & + \frac{2}{15} \frac{\beta^5}{N} \sum_{ijlmnp} J_{jl} J_{jm} J_{jn} J_{jp} J_{jr} \langle \sigma_i(0) \sigma_l(t) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \sigma_p(t) \sigma_r(t) \rangle - \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

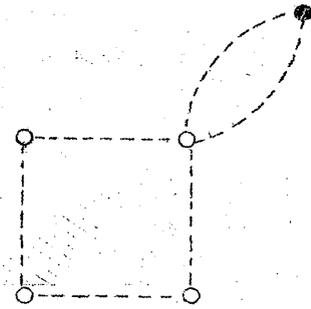
ここで

$$J(\mathbf{q}) \equiv \sum_l J_{jl} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{jl}} \quad (3.6)$$

## Time-Dependent Ising Model

この各項の  $r^\nu$  についての大きさの order を見てゆくわけであるが、その前に同時刻でのいくつかのスピンの相関関数 (或は平衡での reduced distribution function) の  $r^\nu$  での展開について述べる。詳しくは Refs. (3), (4) を見て戴くことにして  $\langle \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \rangle$  を  $\beta J$  について展開したときの各項は  $1, 2, \dots, n$  を表わす白丸及びいくつかの黒丸を、 $\beta J_{ij}$  をあらわす点線でつないだ図であらわすことが出来る (才1図)。<sup>(\*)</sup>

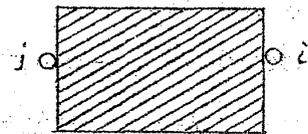
各点線は夫々  $r^\nu$  の因子を寄与し、各黒丸は夫々  $r^{-\nu}$  の寄与をすること<sup>(2)(3)(4)</sup> を使って与えられたグラフの  $r^\nu$  についての order を見ることが出来る。例えば才1図のグラフは  $r^{5\nu}$  の order。次に time-correlation function  $\langle \sigma_i(0) \sigma_j(t) \rangle$  について考える。これは容易に示される関係



才 1 図

$$\langle \text{ALB} \rangle = \langle \text{BLA} \rangle \quad (3.7)$$

により  $\langle \sigma_j(0) \sigma_i(t) \rangle = \langle \sigma_j e^{-tL} \sigma_i \rangle$  に等しい。今  $e^{-tL} \sigma_i$  を  $t$  及び  $L$  の中の  $\beta J$  で展開したときに出てくる項を考える。この中の各  $\beta J_{lm}$  を点  $l, m$  を結びつける実線に対応させると夫々の項は点  $i$  をあらわす白丸と実線で直接又は間接につながっているいくつかの黒丸であらわされる。又  $h=0, T > T_c$  だから  $\langle \sigma_i \rangle = 0$  なることを考慮すると  $\langle \sigma_j e^{-tL} \sigma_i \rangle$  のグラフは  $i, j$  の二つの白丸と実線又は点線でつながっているいくつかの黒丸であらわされることがわかる。これを schematic に才2図のようにあらわそう。 $\langle \sigma_i(0) \sigma_l(t) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \rangle = \langle \sigma_i(t) \sigma_l(0) \sigma_m(0) \sigma_n(0) \rangle$  etc. も同様に考えてグラフであらわすことができる。



才 2 図

(3.5) はあらはに  $\beta J$  について 0 次、1 次、3 次、5 次、 $\dots$  で含む項から成つて居り、今こ

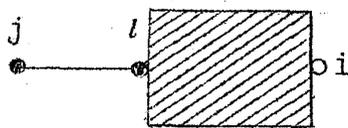
(\*) ここで古典液体論の慣例に従い固定点を白丸、和をとつてしまふ点を黒丸であらわした。又ここで  $1, 2, \dots, n$  はすべて異なる点とした。

川崎恭治

れらを  $[0], [1], [3], [5], \dots$  としてこれらの  $r^l$  についての order を  
 当ててみよう。  $[0]$  は才 1 図で  $j$  を黒丸にしたもの。  $[1]$  は元々

$$\beta \sum_{j,l} J_{jl} \langle \sigma_j(t) \sigma_l(0) \rangle$$

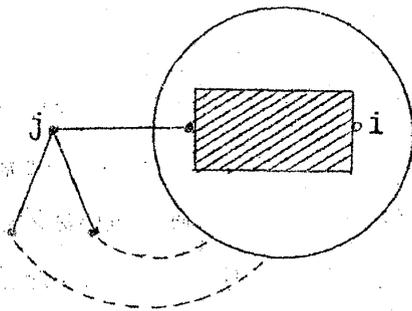
と書けるので才 3 図であらわせる。<sup>(\*)</sup>これは  $[0]$  に比べて  $\beta J$  が一つ増した代り  
 に黒丸が加わつたので  $[0]$  と同じ order, 即ち  $[1] = 0(r^0) \times [0]$ 。次に進む前に  
 ここで点線の意味を拡張して才 4 図であらわされる  $\beta J$  のくりかえしを含んだ



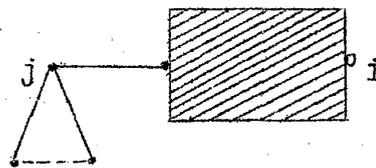
才 3 図



才 4 図



才 5 図



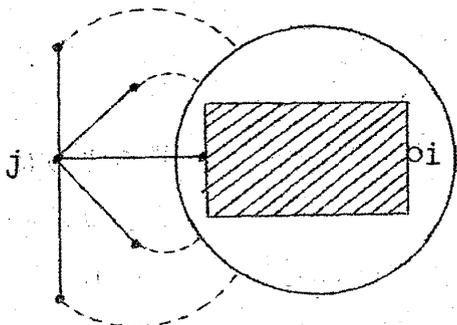
才 6 図

ものも一本の  $\dots$  であらわすことにする (これは Ref. (4) に出てくる  $C$ -  
 bond)。  $C$ -bond に含まれる各項は明らかに  $r^l$  について同じ order。我  
 々は点線の意味を更に拡張して点線で結ばれた二つのスピンの一致する場合も  
 含める。一般に結ばれたスピンの少くとも一方が黒丸であるときこの拡張によ  
 つて  $r^l$  についての order は変らない。そうすると  $[3]$  は schematic に才 5 図

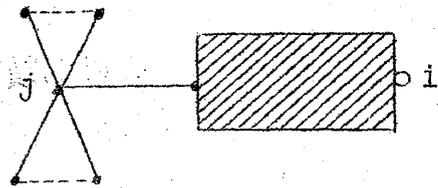
(\*) (3.5) にあらわれている  $\beta J_{lm}$  は元々  $L$  に含まれていたから実線であらわす。

Time-Dependent Ising Model

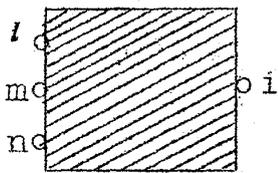
であらわされる。<sup>(\*)</sup>ここで2本の点線が円にはいつているのは、これらの点線が円内で任意に結びつき得ることを示す。この中で  $r^2$  につき最低次のものは才6図であらわされる。この図から直ちに  $[3] = 0(r^2) \times [0]$ 。同様に[5]は才7図のようになり、最低次のものは才8図で、これから  $[5] = 0(r^2) \times [0]$  が得られる。これでわかつたことは (3.5)の展開の先の方は  $r^2$  についてより高次の寄



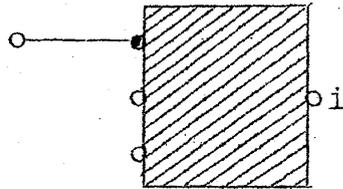
才 7 図



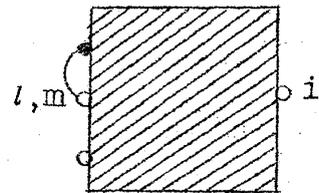
才 8 図



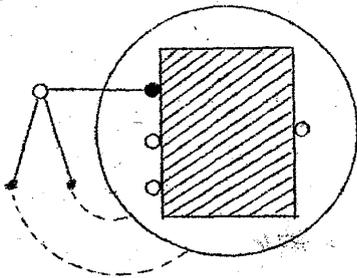
才 9 図



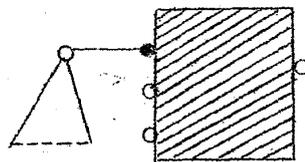
才10図



才11図



才 1 2 図



才 1 3 図

(\*)  $j$  が  内のどれかと一致する場合は  $r^2$  につきより高次になるので省いた。以下同様。

川崎 恭治

与しか与えない。以下では話を  $O(r^\nu)$  迄に限り(5)以上を無視しよう。方程式を閉ぢさせる為に必要な  $\langle \sigma_i(0) \sigma_l(t) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \rangle$  の時間変化は、 $\beta J$  で展開した型に書くと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(0) \sigma_l(t) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \rangle &= -3 \langle \sigma_i(0) \sigma_l(t) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \rangle + \beta \sum_f J_{if} \langle \sigma_i(0) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \\ &\sigma_f(t) \rangle - \frac{\beta^3}{3} \sum_{fgh} J_{if} J_{lg} J_{lh} \langle \sigma_i(0) \sigma_m(t) \sigma_n(t) \sigma_f(t) \sigma_g(t) \sigma_h(t) \rangle + \dots \\ &+ (\text{才2項以下で } \ell, m, n \text{ を cyclic に変えたもの}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3.5) のときと同様に右辺の項を [0], [1], [3], ... とかき [0] を才9図のようにあらわす。[1] は才10図のようになる。又  $\ell$  が  内のどれか、例えば  $m$  と一致するときは [1] には才11図があらわれる。これらは共に高々  $O(r^0) \times [0]$ 。同様に [3] は才12図になり、最低次のものは才13図となつて、これらは  $O(r^\nu) \times [0]$ 。そこで (3.8) の最低次までとることにして [3] 以上を無視する。こうして  $r^\nu$  までの order で (3.5), (3.8) を truncate 出来て  $\langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle$  に対する閉ぢた方程式が得られる。これらを (3.2), (3.6) を使つて書くと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle &= - [1 - \beta J(0)] N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle \\ &- \frac{\beta^3}{3N^2} \sum_{qq'} J(q) J(q') J(-q-q') N^3 \langle \sigma_0(0) \sigma_q(t) \sigma_{q'}(t) \sigma_{-q-q'}(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_0(0) \sigma_q(t) \sigma_{q'}(t) \sigma_{-q-q'}(t) \rangle &= - \{ 3 - \beta [J(q) + J(q') + J(-q - q')] \} \times \\ &\times \langle \sigma_0(0) \sigma_q(t) \sigma_{q'}(t) \sigma_{-q-q'}(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

これらを  $t$  につき one-sided Fourier 交換をすると結局

$$\phi(\omega) \equiv \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} N \langle \sigma_0(0) \sigma_0(t) \rangle \quad (3.11)$$

に対して

$$[i\omega + 1 - \beta J(0)]\phi(\omega) = N \langle \sigma_0^2 \rangle - \frac{\beta^3}{3N^2} \sum_{qq'} J(q)J(q')J(-q-q')$$

$$\frac{N^3 \langle \sigma_0 \sigma_q \sigma_{q'} \sigma_{-q-q'} \rangle}{i\omega + 3 - \beta[J(q) + J(q') + J(-q-q')]} \quad (3.12)$$

今

$$\langle \sigma_0 \sigma_q \sigma_{q'} \sigma_{-q-q'} \rangle = \langle \sigma_0^2 \rangle \{ \delta_{q,0} \langle |\sigma_q|^2 \rangle + (\delta_{q,0} + \delta_{q,-q'}) \langle |\sigma_q|^2 \rangle \} + \langle \dots \rangle_c, \quad (3.13)$$

ここで最後の項は cumulant average, とすると  $T_c$  近くで  $\langle \dots \rangle_c$  からの寄与は  $O(r^{2\nu})$  となつて無視できる。<sup>(\*)</sup> 又 (Ref.4)

$$N \langle |\sigma_q|^2 \rangle = \frac{1}{1 - \beta J(q)} + O(r^\nu). \quad (3.14)$$

これらを使つて (3.12) は次のようにまとめられる。

$$\frac{\phi(\omega)}{N \langle \sigma_0^2 \rangle} = f_m(\omega) + f_p(\omega), \quad (3.15)$$

$$f_m(\omega) \equiv \frac{A}{i\omega + \tau_0^{-1}}, \quad A \equiv 1 - \frac{1}{N} \sum_q W(q) \quad (3.16)$$

$$f_p(\omega) \equiv \frac{1}{N} \sum_q W(q) \frac{1}{i\omega + \tau_q^{-1}} \quad (3.17)$$

$$W(q) \equiv \frac{\beta^3 J(0)}{2} \frac{|J(q)|^2}{[1 - \beta J(q)]^2} \quad (3.18)$$

$$\tau_0^{-1} \equiv 1 - \beta J(0), \quad \tau_q^{-1} \equiv 3[1 - \beta J(0)] + 2\beta J(0, q) \quad (3.19)$$

(\*)  $T \simeq T_c$  で  $\langle \dots \rangle_c$  は負だから<sup>(4)</sup> これからの (3.12) への寄与は  $\beta^3 \sum_{qq'} J(q)J(q')J(-q-q')N \langle \dots \rangle_c / [1 - \beta J(0)] = \beta^3 \sum_{jlmn} J_{jl} J_{jm} J_{jn} \langle \sigma_j \sigma_l \sigma_m \sigma_n \rangle_c / [1 - \beta J(0)] \sim O(r^{2\nu}) / [1 - \beta J(0)]$

川崎恭治

$$J(q, q') \equiv J(q) - J(q') \quad (3.20)$$

#### IV 臨界点近傍での複素誘電率

複素誘電率  $\epsilon(\omega)$  は

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(0) - i\omega\phi(\omega), \quad (\epsilon(0) = N\langle\sigma_0^2\rangle), \quad (4.4)$$

となるから前節の結果を用いて

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(0) \left\{ \frac{A}{1+i\omega\tau_0} + \frac{1}{N} \sum_q \frac{W(q)}{1+i\omega\tau_q} \right\} \quad (4.2)$$

分子場近似 ( $r^0$  の order) では  $T_c$  は  $1 - \beta J(0) = 0$  で与えられるから  $T_c$  近傍では  $q$  の小さな値からの寄与が dominant になる。そのとき  $J(0, q) = \alpha q^2 + \dots$  と展開し、

$$1 - \beta J(0) = \frac{T - T_c}{T} \equiv \Delta\theta = \beta\alpha\kappa^2 \quad (4.3)$$

によつて spin correlation の range の逆数をあらわすパラメター  $\kappa$  を導入し、又  $q$  が小さいときに使える近似をして (4.2) の和を積分に直すと (但し unit cell の体積を 1 とした)、(4.2) は  $T_c$  近傍で近似的に

$$\epsilon(\omega) = \int_0^\infty \frac{y(\tau)}{1+i\omega\tau} d\tau, \quad (4.4)$$

ここで緩和時間の分布函数は

$$y(\tau) \equiv A\delta\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi\beta\alpha)^2} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{(\tau/\tau_0)^{1/2}} \frac{(1-3\tau/\tau_0)^{1/2}}{(1-\tau/\tau_0)^2} \theta(1-3\tau/\tau_0) \quad (4.5)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

又

$$A = 1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\beta\alpha)^2\kappa} \int_3^\infty dz \frac{\sqrt{(z-3)/2}}{(z-1)^2}. \quad (4.6)$$

## Time-Dependent Ising Model

(4.5) のオ1項は mono-dispersive part をあらわし、その緩和時間  $\tau_0$  は (3.19), (4.3) より

$$\tau_0 = \frac{T}{T - T_c} \quad (4.7)$$

となり  $T_c$  で  $\infty$ 。  $r^0$  の order では  $A=1$  となり、この mono-dispersive part のみ残る。<sup>[(3.17)参照]</sup> 即ち(1)高温 ( $\beta J \rightarrow 0$ ), 或は(4)  $r \rightarrow 0$  (長距離力の極限) では mono-dispersive になる。これは物理的には、この2つの場合には各スピンはまわりのスピンの平均化された影響の下に各々独立に動いていると考えてよいことを意味しこれは丁度分子場近似の成立つ条件でもある。次に  $r^0$  の order の項までとると (4.5) のように  $A$  が1より減少しオ2項であらわされる polydispersive part があらわれる。これは各スピンに作用するまわりのスピンの影響に種々の波数  $q$  をもつたゆらぎが効いてくるためと解釈できるし又  $q$  の波数をもつたゆらぎに対応する緩和時間が (3.19) の  $\tau_q$  である [(3.17)を参照]。 (4.5) は  $\tau/\tau_0$  の函数だから  $T_c$  近くでは分布が  $(T - T_c)^{-1}$  に比例してひろがり、この点は Hill-Ichiki と同じだが連続的な  $\tau$  の分布が  $\tau_0/3$  で切れており、mono と poly が共存し、又  $1/\kappa$  の因子を通じて、  $T_c$  に近づくとつれて poly の部分が増加すること等の点で Hill-Ichiki と異なる。

今迄は相互作用の range が長いときに話を限つて来たが、分子場近似が nearest neighbor interaction に対しても或る程度成功したのと同じ意味でここに理論を、short range interaction の場合にも使うことが許されるだろう。但しそれには或る限界があつて、例えば  $T=T_c$  では  $\kappa=0$  で  $A=-\infty$  となつて意味がない。この限界は分子場近似の成立つ限界

$$\beta \alpha \kappa^2 = \Delta \theta \gtrsim r^3 \quad (4.8)^{(*)}$$

と考えてよい。又  $T_c$  近傍ということは  $\kappa \ll \tau_0$  又容易にわかるように  $\alpha \sim r^{-2} J(0)$  なので  $T_c$  近くでこの理論の成立つ範囲は

(\*)  $r^3$  は nearest neighbor spin の数の逆数の大きさをもつ。

$$1 \gg (\epsilon/r)^2 \gtrsim r^3 \quad (4.9)$$

でこの範囲で A が負になることはない。

## V 現象論的モデル

前節の結果は次のような現象論からも出せる。今  $s_i$  を  $\mathbf{R}_i$  近くでの order parameter の値とする。これは  $i$ -th cell の  $s_i$  の、時刻  $t$  における平均値と考えるもよいし、 $\mathbf{R}_i$  に中心をもつとつと大きな semi-macro な cell を考え、そこでの total spin の平均とみてもよい。 $s_i$  に対し次のような現象論的式を仮定する。

$$\frac{d}{dt} s_i = - \sum_j B_{ij} s_j - \sum_{jlm} C_{ijlm} s_j s_l s_m + \dots \quad (5.1)$$

類似な式は Nishikawa により、スピンの同時刻相関を求めるのに用いられた<sup>(10)</sup>。  $B_{ij}$ ,  $C_{ijlm}$  で suffix のちがつたものは cell 間の相互作用をあらわす。今この非線項の影響が小さいとして…を無視し右辺の  $s_j s_l s_m$  に対しては (5.1) の才 1 項だけを考慮して得られる

$$\frac{d}{dt} s_j s_l s_m = - \sum_f (B_{jlf} s_f s_l s_m + B_{lff} s_j s_f s_m + B_{mff} s_j s_l s_f) \quad (5.2)$$

を用いる。(5.1) と (5.2) から  $\langle s_i(t) s_a(0) \rangle$ ,  $\langle s_j(t) s_l(t) s_m(t) s_a(0) \rangle$  をつくるとこれらの充たす Eq. は Fourier 成分でかくと (3.9), (3.10) と本質的に同じものになる。同時刻の相関  $\langle s_j s_l s_m s_a \rangle$  に対しては Random-phase 近似によつて pair に分けると、次の結果を得る；

$$\begin{aligned} \phi_q(\omega) &\equiv \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle s_q(t) s_{-q}(0) \rangle \\ &= \langle |s_q|^2 \rangle \left\{ \left[ 1 - \sum_{\mathbf{k}} \frac{3C(\mathbf{q}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}) \langle |s_{\mathbf{k}}|^2 \rangle}{2B(\mathbf{k})} \right] \frac{1}{i\omega + B(\mathbf{q})} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} \frac{3C(\mathbf{q}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}) \langle |s_{\mathbf{k}}|^2 \rangle}{2B(\mathbf{k})} \frac{1}{i\omega + B(\mathbf{q}) + 2B(\mathbf{k})} \right\} \quad (5.3) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} B(\mathbf{k}) &\equiv \sum_j B_{ij} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{ij}}, \\ C(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') &\equiv \sum_{jlm} C_{ijlm} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{ij} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}_{jl} - i(\mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_{lm}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

$T = T_c$  で  $B(0) = 0$ , このとき  $T_c$  近傍で  $B(\mathbf{k}) = b(\kappa^2 + k^2)$  とすると  $\langle |s_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = N^{-1} d \cdot (\kappa^2 + k^2)^{-1}$  と書いて複素誘電率  $\epsilon(\omega) = \epsilon(0) - i\omega \theta_0(\omega)$  は再び (4.4) のように書ける。ここで

$$y(\tau) = Abd \cdot \delta\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) + \frac{3\alpha cbv}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi b)^2} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{\tau/\tau_0}} \frac{\sqrt{1 - 3\tau/\tau_0}}{(1 - \tau/\tau_0)^2} \theta(1 - 3\tau/\tau_0) \quad (5.5)$$

$$A \equiv 1 - \frac{3dcv}{(2\pi)^2 b \kappa} \int_3^\infty dz \frac{\sqrt{(z-3)/2}}{(z-1)^2} \quad (5.6)$$

$$\tau_0 \equiv 1/b\kappa^2, \quad c \equiv C(0, 0, 0), \quad v \equiv V/N$$

これは数係数を除いて (4.5), (4.6) と一致。前節迄の議論によりこう云う半現象論が  $r^p$  展開の初めの項をとると云う意味で正当づけられたことになる。

## VI Discussion

運動方程式の非線型性を考慮に入れて poly-dispersive な  $\epsilon(\omega)$  を出すことは Nishikawa によつて試みられた。<sup>(10)</sup> そこで得られた緩和時間のスペクトルは  $\tau_0, 1/3\tau_0, 1/5\tau_0, \dots$  となつている。この  $1/3\tau_0$  は我々の場合の  $\tau_q$  の最大値が  $1/3\tau_0$  であることと原因は同じで Eq. (5.1) の  $s_j(t) s_l(t) s_m(t)$  に起因する。Nishikawa のこれ迄の議論では  $\mathbf{q} = 0$  のゆらぎのみ考慮したためにスペクトルがとびとびの値しかとつていない。又まともに計算すると非線型効果が異状に小さくなつたと云うのも  $\mathbf{q} = 0$  しかとつてないことのためと思われる。

ここで得られた  $y(\tau)$  の性質、実験との比較、又  $T_c$  以下での振舞等については別の機会にゆづりたい。又この論文の方法乃至考え方は誘電分散のみならず他の問題、例えば拡散係数等にも使える等である。<sup>(14)</sup>

川崎恭治

最後に有益な討論をして下さった森教授と当研究室のメンバー及び誘電分散について教えて戴いた入江、山藤両氏に感謝したい。

文 献

- (1) Kac, Uhlenbeck, Hemmer, J. Math. Phys. 4, 216, 229 ('63)  
ibid. 5, 60 ('64)
- (2) P. C. Hemmer, ibid. 5, 75 ('64)
- (3) Lebowitz, Stell, Baer, J. Math. Phys. 6, 1282 ('65)
- (4) Stell, Lebowitz, Baer and Theumann, preprint (1965).  
Ref. (3)を Ising Model に応用。
- (5) Lebowitz and Penrose, J. Math. Phys. preprint (1965)
- (6) "強誘電的相転移における臨界現象" 物性研研究会 (1967) 予稿
- (7) 中村英二、三井利夫、物性 8-15 (1966)
- (8) R. G. Quinn and C. P. Smyth, J. Chem. Phys. 39, 3285 ('63)
- (9) 松原武生 Ref. (6)
- (10) 西川恭治 Ref. (6)
- (11) 鈴木増雄 Ref. (6)
- (12) N. Matsudaira, preprint (1966)
- (13) R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4, 294 ('63)
- (14) K. Kawasaki, Phys. Rev. 145, 224, 148, 375, 150, 285 ('66)