

Title	量子力学(統計力学の諸問題シンポジウム,基研短期研究会報告)
Author(s)	碓井, 恒丸
Citation	物性研究 (1967), 8(2): B69-B72
Issue Date	1967-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/86033
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

量 子 力 学

碓 井 恒 丸(名大理)

1. 量子統計が典型的にあらわれている液体は量子液体とよばれ, normal liquid と superfluid に分類される。後者は現象論的には特殊の流体力学に従い, 統計力学的には量子統計的凝縮が起っている。したがってその主要な問題は第1に相転移であり, 比熱の対数的異常等の静的なもの, 輸送係数の異常等の動的なものとをしらべ, かつこの2種のものとの内在的關係を明らかにすることである。第2は転移点以下における種々の動的性質の究明であって, ここには inhomogeneity (時間的, 空間的) の種々の段階が存在する。

2. 量子統計的凝縮 (Q.S.C.)

液体ヘリウムに関連して, 理想ボース気体のアインシュタイン凝集が F. London によって着目され, 運動量空間における凝縮という形で一般化が示唆された。これは Penrose と Onsager によって, inhomogeneous, interacting system へ拡張された。

$$\int \langle \psi^+(x') \psi(x) \rangle \Psi(x') dx' = N_0 \Psi(x), \quad N_0 \text{ 巨視的数}$$

によって定義される凝縮体場 Ψ が, 漸近形

$$\langle \psi^+(x') \psi(x) \rangle \xrightarrow{|x-x'| \rightarrow \infty} \Psi'^*(x') \Psi'(x)$$

によって定義される場 Ψ' と一致するかどうか, 証明を要する。

上の意味ではフェルミ粒子系に Q.S.C. は存在しないが, 2フェルミオン原子の集合を考へても判明するように, $\langle \psi^+(x_1) \phi^+(x_2) \phi(x_2) \psi(x_1) \rangle$ は巨視的固有値をもち, 上記の Q.S.C. が起りうる。B.C.S. 基底状態で $\langle \psi_{\uparrow}^+(x_1) \psi_{\downarrow}(x_2) \psi_{\downarrow}(x_2) \psi_{\uparrow}(x_1) \rangle$ を計算してみると, (x_1, x_2) と (x_1', x_2') の距離を $\rightarrow \infty$ としたとき, $F(x_1-x_2) F(x_1'-x_2')$ に漸近する。ただし u, v を ボゴリ

フェーボフの変換係数として、

$$F(r) \equiv \frac{1}{Q} \sum_p u_p v_p e^{ip \cdot r}$$

また $N \rightarrow \infty$ とともに $F(x_1 - x_2)$ が固有函数となり、その際 $\sum_p u_p^2 v_p^2$ が巨視的固有値となる。これを更に拡張し、 n 体の換元密度行列によって Q.S.C. を定義することは Yang が行なった。

以上と異った観点はボゴリェーボフの、統計平衡状態の縮退という概念である。ここでは保存則を破る無限小の(強さの定数 ν) 外場, あるいは source 項をハミルトニアンに加えることにより、対応する対称性が破れる縮退が問題になる。その際

$$\langle A \rangle = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_p(A e^{-\beta \mathcal{H}_\nu})}{S_p e^{-\beta \mathcal{H}_\nu}}$$

で定義される quasi-average の概念が有用である。例えば B.C.S. 系の場合、粒子数保存則を破る $-\nu \sum_w f (a_f^+ a_{-f}^+ + a_{-f} a_f)$ を source 項とすれば縮退が解け、B.C.S. 状態が得られる。ボース粒子系の場合には、 $-\nu \sqrt{V} (a_0 + a_0^+)$ を source 項にとる。摂動展開をする際にはまずこの縮退を解いておかななくてはならない。こうしていわゆる anomalous line が問題になる。

3. 動的性質

Ψ を N_0 に規格化すると、その運動は

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} - U(x, t) \right) \Psi(x, t) =$$

$$\frac{1}{N_0} \iint v(x - \bar{x}) \langle \psi^+(x', t) \psi^+(\bar{x}, t) \psi(\bar{x}, t) \psi(x, t) \rangle \Psi(x', t) dx' d\bar{x}$$

に従う。あるいは source 項と化学ポテンシャル項をハミルトニアンに附加すれば

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} - U(x,t)\right) \langle \psi(x,t) \rangle =$$

$$\int v(x-\bar{x}) \langle \psi^+(\bar{x},t) \psi(\bar{x},t) \psi(x,t) \rangle d\bar{x} - \mu \langle \psi(x,t) \rangle + v(x,t)$$

が凝縮の場の方程式になる。フェルミ粒子の Q.S.C. の場合も平行に議論できるので以下省く。

3.-1. 現象論 (一様温度, 定常)

自由エネルギー

$$\bar{F} = \int \left[F_0(n, T, |\Psi|^2) + n(x) U(x) + \frac{1}{2m^*} |\nabla \Psi|^2 \right] dx$$

を $\bar{N} = \int n(x) dx$ 一定のもとに極小にする条件から

$$\begin{cases} \frac{\partial F_0}{\partial n} + U(x) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{m^*} \right) \cdot |\nabla \Psi|^2 / 2 = \mu = \text{const.} \\ -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2m^*} \nabla \Psi \right) + \frac{\partial F_0}{\partial |\Psi|^2} \Psi = 0 \end{cases}$$

が得られる。 $\Psi = \alpha e^{im\phi}$ とおき, $\nabla \phi = v_s$ と同定すれば, この速度場で流れる物質密度 $\rho_s = m n_s$ は $m^2 \alpha^2 / m^*$ となる。実際これは $U(x) = 0$ のとき $(\partial F / \partial u)_{n, T}$ に等しく ($u \equiv \frac{1}{2} v_s^2$), ランダウの定義に一致する。この点ソビエトでは明確に認識されていない。

3.-2. 二流体論の導出 (ボゴリューポフ)

$\zeta(x,t) \equiv v(x,t) e^{-im\phi}$ とおき, (n, T, v_s, v_n) で指定される局所平衡を考える。 v_n は全運動量に対するラグランジ乗数, inhomogeneity のパラメータ μ について展開し, 最低次をとったものが理想流体近似である。ただし μ について 1 次だとして扱う。この結果 $\partial \rho_s / \partial t + \nabla \cdot \rho_s v_n = 0$ を導入しているが (ただし証明は一般論ではない), 連続の式は単に全質量に関するものである。これは $\langle \psi \rangle$ に対する上記方程式の分析が不充分だからである。

3.-3. 弱い相互作用

この場合には

$$\Psi(x,t) = \sqrt{n_0} e^{-i\mu_0 t} \left\{ 1 + \frac{g}{n_0} e^{-i\omega t + ik \cdot x} + \frac{g_1^*}{n_0} e^{i\omega^* t - ikx} \right\}$$

とおき、線型近似、Hartree-フック-ゴルコフ型近似をすることによってもっと立入った分析ができる。特にボゴリューボフ・フォノンに対するブラソフ型方程式、 n_S に対する連続の方程式が導かれる。また v_S の加速は化学ポテンシャルのハラトニコフ表式の負勾配による。 n_S の表式はランダウ表式の拡張である。

3.-4. 局所平衡の成立 (Kane-Kadanoff)

$$h(1,1') = -i \langle \psi(1) \rangle \langle \psi^\dagger(1') \rangle, \quad g^>(1,1') = -i \langle \psi(1) \psi^\dagger(1') \rangle$$

とおき、 $g^>-h$ を Kadanoff-Baym の方式にのせる。任意に最も簡単な衝突項を取入れて Boltzmann 型方程式を導き、それに局所平衡解があることを示した。

3.-5. Time-dependent G.L. 方程式 (Abrahams-恒藤)

ゴルコフ方程式の因果型

$$\Delta(1) = i g \int d^3 r_2 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 [G_0^<(2,1) G^<(2,1) - G_0^>(2,1) G^>(2,1)] \Delta(2)$$

を基礎にして $K\xi_0 \ll 1$, $\hbar\omega \ll kT_C$ の条件のもとに変形する。ただし密度を一定とし、熱励起は静止していて、 Δ の局所値と外場とに平衡にあるとした。こうして G.L. 型方程式 1 本に換元されている。

種々の緩和時間の大小をしらべ、各現象の段階を明解に分析することが、未解決の重要問題であると思われる。