保証されるとしている。しかし剛体球がFord の Resonant Condition を満足する特別の場合になっている可能性もあり，安易にFord の反論と解釈すべきではない。N. Saito[4]の計算（電子計算機）はnormal mode の存在を示唆している傾向を示し，M. Toda[5]の理論もSoliton(Solitary Wave)の安定性を論じている。また相転移の問題を計算機で解くとき，unit cell にある粒子数によって，転移が起ったり，起らなかったりするという興味あるコメントがあり，非線型力によって以上の問題を数値計算をするとき粒子数が意外に大きい役割を演じる可能性もあり，計算機に独特な制限があることも注意する必要がある。エントロピー関数と揺ぎを数値計算をしてH定理の証明を暗示できるか否かを確かめてみるのも未だ着手されていない問題である。

文　献

1) E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam. Los Alamos Scientific Laboratory Rept. L.A-1940. '55.

2) J. Ford, J. math. Phys. 2, 387. '61. 4 1293 '63.

3) E.A. Jackson, J. math. Phys 4 551 '63. 4 686 '63.

4) R.SS. Northcote, R.B. Potts. J. math. Phys. 5 383 '64.

5) 斉藤　信彦 「振動子系の力学過程と統計研究会」1964年7月，1965年11月，「非線型研究会」1967年1月．

6) M. Toda. J. Phys. Soc. Japan (to be published). 「非線型研究会」1967年1月．

一次元非線型振動子系のergodicityの計算機による研究

斉藤信彦，広岡　一（早大理工）

§1. はじめに

調和振動子系はノーマルモードに分けられるから独立な系の集りであって，

ergodicityをもたないことは明らかである。実際の系では僅かな非線型性があって，それがergodicity を保証しているのであろうと一般に考えられている。この予想が正しいかどうかを計算機をつかってしらべてみようというのが目的である。その前に，調和振動子については，計算が解析的に実行出来るのでその結果を§2にのべる。力学的平衡にあって静止している調和振動子の一つの粒子に一定の力を加えると，粒子は振動しはじめ，その運動エネルギーの長時間平均をとると，それはどの粒子も同じ値をとることがわかる。次に2つの粒子の速度に関する相関を求めると，一つ以上はなれた粒子の間の相関はないが，隣り合った粒子の間には相関が消えないことが示される。これはつまり熱平衡になっていないことで，ergodicity をもたないことを示している。そこで§3ではanharmonicityを入れたときの計算を示す。電子計算機の結果は上述の予想に反し，非線型の相互作用を入れても，隣り合った粒子の速度の相関は消えるようには見えず，本質的には調和振動子のときと変らない挙動をすることがわかる。

§2. 調和振動子系

質量mのN＋2個の粒子がその最隣接粒子と弾性定数Kのバネで結ばれた両端固定の一次元格子を考える。粒子に0，1，2，…，N+1の番号をつけ，n番目の粒子の平衡位置からのずれをx_nとする。1番目の粒子にはt＝0から一定の力Gをかける。運動方程式は

$$\ddot{x}_n = \frac{K}{m}(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \delta_{n,1}\frac{G}{m}, \qquad x_0 = x_{N+1} = 0 \tag{1}$$

である。これを t=0 で，$x_n = 0$ (n=0，1，…，N+1) の条件でとけば

$$x_k = \frac{4G}{m(N+1)} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i^2} \sin\frac{i\pi}{N+1} \sin\frac{ik\pi}{N+1} \sin^2\frac{\omega_i t}{2}, \tag{2}$$

$$\omega_i^2 = 4\frac{K}{m} \sin^2\frac{i\pi}{2(N+1)}, \tag{3}$$

である。速度の2r次のモーメントの長時間平均

$$\overline{\dot{x}_k^{2r}} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \dot{x}_k^{2r}\, dt \tag{4}$$

を計算すると，N→∞に対し

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\dot{x}_k^{2}} &= \frac{1}{2mK}\ \frac{G^2}{N+1} \\
\overline{\dot{x}_k^{2}} &= \frac{3\,G^4}{4(N+1)^2(mK)^2} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\overline{\dot{x}^{2r}} &= \frac{(2r)!\,G^{2r}}{2^{2r}r!\,(N+1)^r(mK)^r}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

この結果は $\dot{x}_k$ は Maxwell 分布をしていることを示す。しかし $\dot{x}_k(t)$ と $\dot{x}_\ell(t)$ の相関をしらべると

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}_k(t)\,\dot{x}_\ell(t)\,dt = \left.\begin{cases} \dfrac{G^2}{2(N+1)mK} & k=\ell \\ \dfrac{G^2}{4(N+1)mK} & K=\ell\pm1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\right\} \tag{6}$$

という結果がえられる。このことは一粒子に対しては他の粒子は熱浴とみなされ，Maxwell 分布を与えるが，隣り合った2粒子に対してはMaxwell分布にならないことを意味し，ergodicity をもっていないことを示している。

§3. 非線型振動子系

非線型項として3次のポテンシャルを考える。運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_m &= K(x_{n+1}-2x_n+x_{n-1})+\lambda(x_{n+1}-x_n)^2 \\ &\quad -\lambda(x_n-x_{n-1})^2+\delta_{n,1}\,G, \\ &\qquad n=1,2,\cdots,N, \end{aligned} \tag{7}$$

$$x_D = x_{N+1} = 0 .$$

この解を

$$x_k(t) = \left(\frac{2}{N+1}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^{N} \{ a_k(t) \cos \omega_i t + b_i(t) \sin \omega_i t \} \times \sin \frac{k i}{N+1} \pi \tag{8}$$

の形にかく。ここで ω_i は(3) で与えたものである。調和振動子系であれば $a_i(t)$, $b_i(t)$ は t によらない定数であるが，非線型のために t に依存すると考える。この $a_i(t)$, $b_i(t)$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N} \{ \dot{a}_i(t) \cos \omega_i t + \dot{b}_i(t) \sin \omega_i t \} \sin \frac{i\pi}{N+1} k = 0 , \tag{9}$$

$$k = 1, 2, \cdots, N$$

の条件をつけ，x_k に対する微分方程式を a_i，b_i に対するものにかきかえると，

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}_i(t) &= -\frac{1}{\omega_i m} [\lambda F_f(i) + G_f(i)] \sin \omega_i t \\ \dot{b}_i(t) &= \frac{1}{\omega_i m} [\lambda F_f(i) + G_f(i)] \cos \omega_i t \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

となる。ここで

$$F_f(i) = \left(\frac{2}{N+1}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{N} F_n \sin \frac{i\pi}{N+1} n , \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F_n = -\frac{2m}{K} \left(\frac{2}{N+1}\right) \sum_k \omega_k^2 \{ & a_k(t) \cos \omega_k t \\ & + b_k(t) \sin \omega_k t \} \sin \frac{k\pi}{N+1} n \\ & \times \sum_{k'} \{ a_{k'}(t) \cos \omega_{k'} t + b_{k'}(t) \sin \omega_{k'}(t) \} \\ & \times \cos \frac{k'\pi}{N+1} n \ \sin \frac{k'\pi}{N+1} , \end{aligned} \tag{12}$$

$$G_f(i) = \left(\frac{2}{N+1}\right)^{1/2} G \sin \frac{i\pi}{N+1} , \tag{13}$$

(10) は iteration の方法で数値積分により解を求めることが出来る。この方法は非線型項の大きさ λ がどんな大きさのときにも使うことが出来るという利点をもっている。もちろんこの方法では誤差は累積するから，その点の配慮は必要である。東大 HITAC 5020 により，Lunge-Kutta-Gill の方法で計算したものの例が図 1.，2. である。

図 1. は $N=4$，$m=4$，$K=1$，$\lambda=1$，$G=0.25$，図 2. は $N=8$，$m=4$，$K=1$，$\lambda=0.1$，$G=6$ の場合である。いずれも $\overline{\dot{x}_k^2}$，$\overline{\dot{x}_k \dot{x}_{k+1}}$，$\overline{\dot{x}_k \dot{x}_{k+2}}$ について t の変化をとったもので，$\overline{\dot{x}_k^2}$ は $k=1$ を除いて，どの場合でも，一定の値に収束する。$k=1$ の粒子は外力を加えているので，例外が生じているらしい。また $\overline{\dot{x}_k \dot{x}_{k+1}}$ は 0 でない一定値に収束するが，$\overline{\dot{x}_k \dot{x}_{k+2}}$ は，0 の値のまわりに集っていて，correlation の消えることを意味している。

これらの図から明らかと思われることは，粒子の運動エネルギーは，力を加えている第一の粒子を除いて，どの粒子も一定の値に収束すること，隣り合う粒子の速度の相関は，調和振動子のときと同じように消えないこと，しかし，調和振動子のときとちがって速度の 2 乗の平均値の半分ではなく，非調和項の大きさにより異り，負となることもあることである。また，ひとつ以上はなれた粒子の速度の相関は，調和振動子のときと同様，消えて行く傾向をもっている。このような明らかな差は誤差の累積によるものとは思われない。第一の粒子の運動エネルギーの平均は他の粒子のそれと異っているのは調和振動子のときにはみられなかった現象である。

§4. 考　　察

以上の計算機による実験は，一次元非線形振動子系は ergodicity をもたないということを示唆しているもののようである。最近，このような結論は他の研究者の仕事からもうかがうことが出来る。たとえば Toda は，ある種の非線型ポテンシャルの下で，基準振動と似た振動様式のあることを示した。また

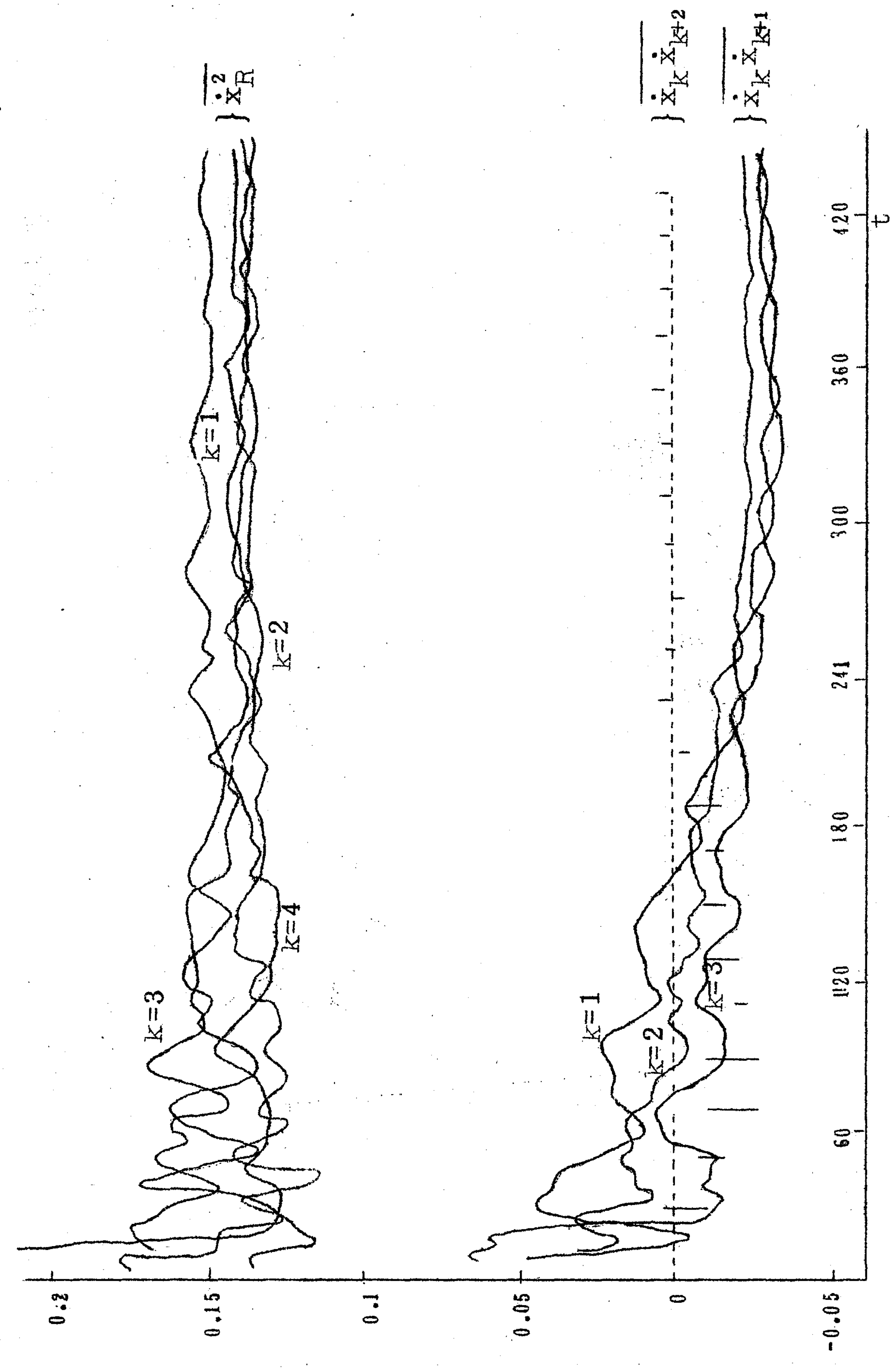

Fig. 1. N = 4 , m = 4 , K = 1 , λ = 1 , G = 0.25 のときの速度の相関

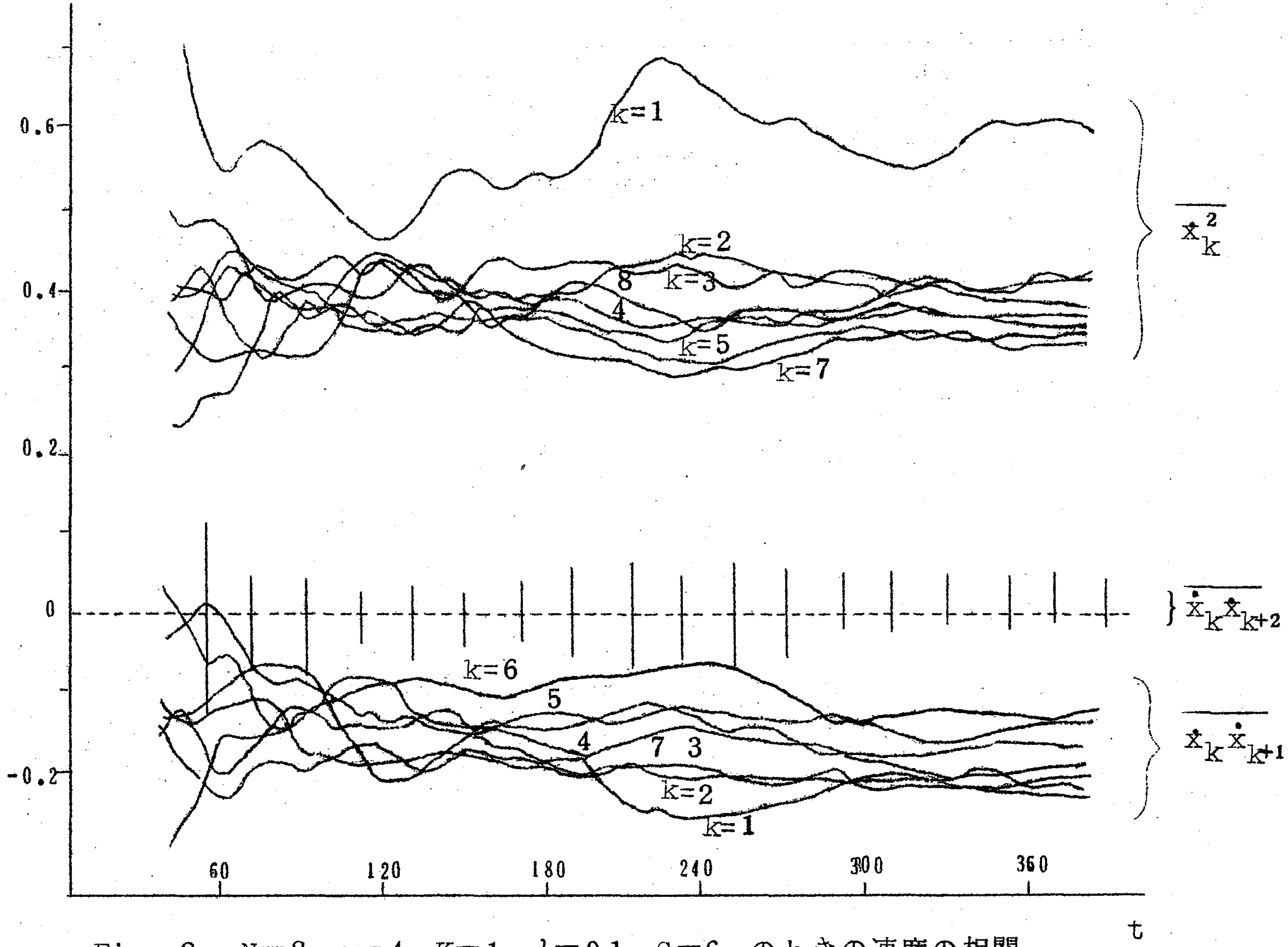

Fig. 2. N＝8，m＝4，K＝1，λ＝0.1，G＝6 のときの速度の相関

Fermi, Pasta, Ulam は，計算機によって基準振動の間のエネルギー分配が起らない例を示し，Ford らは摂動論からエネルギー分配の起りうる条件，すなわち共鳴条件を明らかにした。また Northcote, Potts は剛体球ポテンシャルをもつ振動子系について，エネルギー分配の起ることを計算機で証明した。剛体球ポテンシャルをもつときは解は解析性を失うので，このときは特別な事情が起る可能性がある。また，基準振動の間にエネルギー分配が起ることは ergodicity の必要条件であるが，十分条件ではない。

このような例を見ると，一次元非線型振動子系に ergodicity のないことは一般的にいってよいことのように思われる。この数学的な証明は残された問題であるが，計算機の研究にも，ここで考えたような条件でなく，もっと一般的な初期条件の下での解をしらべたり，2次元格子系での研究など，しなければならないことが多くある。

VLASOV 流体のエントロピーについて

中　山　寿　夫

（名古屋大学プラズマ研究所）

1. はじめに

H - 定理の概念は，Nケの粒子から成る系の非平衡統計力学を考える時，系の時間的発展の方向を指定すると云うことで，非常に大切な役割を演じて来た。ボルツマン以来，もし与えられた系に対応して一体分布函数が考えられ，その分布函数を支配する方程式が，系を記述するにふさわしいものであるならば，この一体分布函数で定義されたH - 函数は，時間と共に非増加であると信じられて来た。一方微視的にこの系を眺めてみる時，系を支配する運動方程式は，時間に関して可逆であるから，非可逆性と云うことは考えられない。即ち非可逆性と云う概念は，系の記述上我々が課する所の細分の粗さに密接に関係したものである。云い換えるならば，考へている系の知識を制限して，より完全な知識を制限して，より不完全な知識で満足するならば，そしてその知識の制限