一次元非線型波動の伝播

矢　島　信　男（基　研）

此処では連続媒質を伝わる一次元波動の正確解を考える。良く知られるように，散逸も分散もおこらない系では，波動伝播は双曲型波動方程式で記述される。一次元非線型波動の一番簡単な例として，全く力をうけずに動いている流体を考えよう。その速度をuとすると，運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

となる。(1)を初期値

$$u(x, t=0) = u_0(x) \tag{2}$$

をみたすように解く。此の方程式は implicit に解けて，

$$u(x,t) = u_0(x') \quad , \quad x = x' + u_0(x')t \tag{3}$$

の形であらわされる。解(3)の幾何学的意味は，Fig.1 で示されるように $t=0$ で x' を通り，勾配が

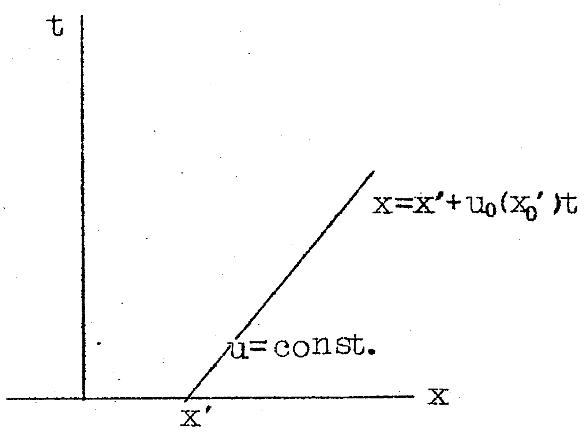

Fig. 1.

$$\frac{dx}{dt} = u_0(x') \tag{4}$$

であるような直線をひくとこの直線にそってuが一定に保たれることである。このようにして方程式(1)の初期値問題に対する解は原理的に求まる。(4)は特性曲線と名附けられ，(3)は特性曲線にそって不変量があることを示し，これを Riemann 不変量と名づけている。一般に(1)よりもっと複雑な方程式もそれが qusi-linear である限

り方程式は(1)に似た形

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} + B(U) = 0 \tag{5}$$

と書ける。ここでU，B(U)は一般にはn成分の column vector で A(σ)は n×n matrix。A(σ) が一般にn個の real 且 distinct の eigenvalue をもつ場合には方程式(5)は totally hyperbolic と呼ばれ解の存在，一意性，解法についての一般的議論は容易である[1]。

もし，初期値として与えられた函数 $u_0(x')$ が，$\frac{du_0(x')}{dx'} < 0$ の条件をみたせば，

$$t_B = \min.\left[\left(-\frac{du_0(x')}{dx'}\right)^{-1}\right] \tag{6}$$

の時刻で特性曲線は交わり，それ以後では解は多価となり方程式(1)の解としての物理的意味を失ってしまう。すべての時間について意味のある解を求めるために，方程式(1)を拡張しておこう[*]。方程式(1)は速度uをもった流体を記述しているが，特性曲線が交わるところ，言い換えると流体の後の部分が前の部分に追いつくところでは当然考慮されるべき衝突の項を無視しているので物理的によろしくない。そこで(1)に粘性項をつけ加えて

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + u_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} \tag{7}$$

を考えよう。ここでは解は parameter νを含んでいることを示すためにuに添字νをつけておいた。(7)は Burgers 方程式と呼ばれ一次元 Navier-Stokes 方程式の低圧力の極限として Burgers によって考えられた。一つの立場として，方程式(1)は方程式(7)でν→0とした極限であると考えることができる。そのときには，(7)の解 u_ν について

---

*) 数学的な意味での拡張は，(1)の weak solution を求めるという事でなされる。（文献1)を見よ）

$$\lim_{\nu\to 0} u_\nu = v \tag{8}$$

が存在するならば，(1)の解 u を v で定義することができる。幸いなことに方程式(7)は解析的に解くことができるので，この手続きは比較的容易に示すことができる[2)]。今 u_ν の代りに函数 φ を

$$u_\nu = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}(\log\varphi) \tag{9}$$

によって導入すると，φ は拡散方程式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{10}$$

をみたすことが判る。任意の初期値問題について（10）は解けるのでそれを用いて(7)の解は求まる。explicit に書けば，

$$u_\nu(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x-x'}{t}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}}e^{-\frac{1}{2\nu}\int^{x'}u_0(x'')dx''}\right]dx' \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}}e^{-\frac{1}{2\nu}\int^{x'}u_0(x'')dx''}\right]dx' \tag{11}$$

となる。（11）に於て $\nu\to 0$ としたものは存在し，その極限は数学的に定義された(1)の weak solution と一致することが示される。しかも，一般には数学的に定義された weak solutionの一意性については保証はないが，（11）の $\nu\to 0$ の極限では一意性は保証されておりその意味で weak solutionのうちからそれが意味のある解かを決める事ができる[*)]。

方程式(7)の解の定性的な説明は次の通りである。初期値として滑らかな函数が与えられたとしよう。充分滑らかであってその2階微分に ν をかけたもの（(7)の右辺）が充分小さければ，方程式は殆ど(1)と同じであり，したがって非線

---

*) weak solutionは一般に一意性が保証されていないので，普通は，附加条件としてエントロピー増大の条件，あるいは此と等価ではないが evolutionary condition[3)]，を考えて物理的に意味のあるものを拾い出す。此処では粘性項を考慮したので，実はエントロピー条件は自動的にとり入れられている。

型効果のために波形はだんだんとその勾配が急となり，いわゆる衝撃波が形成されてゆく。しかしある程度勾配が急になり波形の曲率が大きくなると(7)の右辺の寄与は無視できなくなり，散逸効果が利いてくる。その結果，波形を Fourier 展開した場合波長の短い成分はどんどん減衰してゆき，衝撃波の波面の幅はある長さ以上（それは ν に比例する）短かくならない。このようにして方程式(7)は衝撃波形成とその構造を与える一つのモデル方程式と考えることができるだろう。

しかし一方では，散逸効果は非常に小さくてその代りに分散効果が非常によく利くような問題にでくわすことがある。たとえば浅い流れの表面を伝わるような波である。この場合方程式は(7)と似ているが，右辺の高階微分のあらわれ方がちがっている。この場合の方程式は，Kortwey-de Vries 方程式[4)]と呼ばれ

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} + u_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial x} = -\delta^2 \frac{\partial^3 u_\delta}{\partial x^3} \qquad (12)$$

となる。この場合の波動をここでは non-linear dispersive wave と呼んだ。これは(7)式とは全く異っている。(12)は $t \to -t$ と変換する（時間反転）と方程式は

$$\frac{\partial u'_\delta}{\partial t'} - u'_\delta \frac{\delta^3 u'_\delta}{\partial x} = \delta^2 \frac{\partial^3 u'_\delta}{\partial x^3} \qquad (13)$$

となる。したがって（13）と（12）から時間反転の解 u'_δ は

$$u\delta'(x, t) = u\delta(-x, -t)$$

となる。つまり，方程式（12）は時間反転に対して不変であるということが言える。それに反して方程式(7)は非可逆項 $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の存在のために時間反転に対して不変でない。此の対称性のちがい以上の解の詳しい性質を方程式（12）から調べることは容易ではない。というのは（12）は解析的に処理することができないからである。[7)]

（12）を数値的に初期値問題として解くことは今まで試みられ興味のある結

論がひきだされている。[5)6)] 結論から言えば（12）に従う波動伝播に於いては solitary wave が重要な役割をはたす。solitary wave は（12）の定常解 $u_\delta = u_\delta(x - U_0 t)$ として与えられる。このとき方程式は

$$\frac{d}{dx}\left[(u_\delta - U_0)^2/2\right] = -\delta^2 \frac{\delta^3 u_\delta}{dx^3} \qquad (14)$$

となる。（14）は積分の結果

$$\frac{\delta^2}{2}\left[\frac{d}{dx}(u_\delta - U_0)\right]^2 + \frac{1}{6}(u_\delta - U_0)^3 + L(u_\delta - U_0) + M = 0 \qquad (15)$$

とかける。L，Mは積分常数である。一般のL，Mについてこれは非調和周期解を与えるが，LとMがある関係でむすばれるとこれは周期∞の解となりこれを solitary wave と呼ぶ。その explicit な形は

$$\left.\begin{aligned} u_\delta &= U_\infty + U_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - U_0 t}{\Delta}\right) \\ U_0 &= U_\infty + U_1 \\ \Delta^2 &= \delta^2/(12 U_1) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

となる。此の solitary wave はきわめて安定であって，例えば２つの solitary wave の衝突を考えても，それらが相互作用をしている間は波形はかなり異るが，相互作用の後では前と同じ波形のものが再びあらわれるということが数値計算で求められている。更に初期値として正弦波的ななめらかなものをとると，ある時刻にはその正弦波は有限個の solitary wave にわかれそれ以後はこれらの solitary wave の運動として理解されることも示される。不幸にして此等の結果は数値的にしか示されていないので，これが（12）という方程式についてのみ成立することなのか，分数をもつ非線型方程式にとって一般的なことなのかは不明である。

最後に（12）の解 u_δ の $\delta \to 0$ の limit について考えよう。この極限は(1)の

weak solution に一致しはしない。これを (12) から示すことは厄介なので，(7)に似た分数型方程式を考えよう。それは

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + u_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = i\epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \qquad (17)$$

である[8]。この式は(7)と異り，時間反転に対して不変である。ただ u はもはや実数ではなくて，一般に複素数となっている。(17) を実数の従属変数 (v, n)

$$u_\epsilon = v_\epsilon - i\epsilon \frac{\partial}{\partial x}(\log n_\epsilon)$$

を使って書きかえると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_\epsilon v_\epsilon) = 0 \\ &\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} + v_\epsilon \frac{\partial}{\partial x} v_\epsilon = 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{n_\epsilon}} \frac{\partial^2 \sqrt{n_\epsilon}}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \qquad (19)$$

となる。ここで $\epsilon \to 0$ の極限で v_ϵ は(1)の weak solution にならないということは，Riemann 問題について示されている。このときには (17) の limit は，初期値として不連続面が一つある場合には時間とともに此の不連続面が 2 つに分れて 2 つの衝撃波面が生じ，通常の衝撃波とは全く異ったふるまいを示す。この衝撃波は reversible shock と呼ばれている。

いずれにせよ，分散効果のある場合の非線型波動の伝播は非常に興味のある性質を示すにも拘らず，未だ充分に調べられてはおらず，とくにその解の中で solitary wave の示す役割については今後考察されねばならない問題として残されている。

References

1) 例えば代表的な教科書をみよ。

R. Courant and K. O. Friedrichs: Supersonic Flow and

Shock Waves (Interscience Pub., New York) §II and §III A. (1948)

A. Jeffrey and T. Taniuti: Nonlinear Wave Propagation with Applications to Physics and Magneto-hydrodynamics, Part I. (Academic Press, New York) 1964

2) E. Hopf : Comm. Pure. Appl. Math.

3) A. Jeffrey and T. Taniuti : 上掲書.

4) D. J. Kortwey and G. deVries; Phil. Mag. series 5, 39 (1895),422

5) N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: Phys. Rev. Lett. 15 (1965),240

6) N. J. Zabusky: preprint

7) 近似的なとりあつかいとしては,

G. B. Whitham: Prc. Roy. Soc. A 283(1965) 238.

G. B. Whitham: J. Fluid Mech, 22(1965)273.

J. C. Luke: Proc. Roy. Soc. A 292(1966) 403.

8) N. Yajima, A. Outi and T. Taniuti, Prog. Theor. Phys. 35(1966) 1142.

平衡状態への近迫(計算機)

小暮陽三(都立航空工専)

非線型振動子系におけるエネルギー分配やエルゴード性については，計算機による研究が最近活潑に実行されている。その結果，非線型項を摂動とする従来の方法にかなり深刻な疑問を与えているので，一次元鎖をモデルとしたこの方面の研究の Review を行い，特に R.S. Northcote, R.B. Potts の興味深い結果を報告した。最初にこの種の計算を実行したのは E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam[1](以下FPUと称する)である。一次元鎖の粒子間力がフ