基研研究会報告

短期研究会"一次元系の非線型力学"

1月25日から28日までの期間に基研で開かれた表題の研究会で行われた講演の内容を講演者に各自書いて戴きましたので以下に掲載させていただきます。非常に教育的かつ有益な話が多かったのでなるべく詳しく書いて戴きましたので，少し長くなりましたが，この方面に興味をお持ちの方には役に立つものと思います。（寺　本）

振動子系グループは何をしてきたか

堀　淳一

振動子系グループが今迄してきた仕事について話せということですが，私甚だ健忘症でありまして，その上直観に訴えにくいのが私共の仕事の特徴でもありますので，短時間の間に他の分野の方々にも分っていただけるような話が出来るかどうか，また粗漏のないお話が出来るかどうか，全く自身がありません。しかし寺本先生の御命令とあっては止むを得ませんので，現在までの経過をかいつまんでお話ししたいと思います。

今振動子系グループという呼び名を使いましたが，これは不完全結晶の問題や格子系の力学過程の問題に興味をもつ者が集まって，1960年から基研の短期研究会を中心にして仕事を進めて来た間にいつとはなしについた名前で，誰がつけたのか私は存じません。もちろんこういう名前の boundary のはっきりした集団が存在するわけでもありませんし，あまりレッテル的な呼び名を用いることは好ましくないと思いますが，便宜上この名前を使うことにいたします。

振動子系グループで分迄とり扱って来たのは，調和振動子系及び方法的にこ

れとパラレルに扱うことの出来る電子系の中，もっぱら非周期的な構造をもつものです。これらはまた，少数個の欠陥や不純物を含む“不完全系” S_{imp} と全体が統計的に乱れている“無秩序系” S_{dis} とに分類出来ます。またテーマとしては，これらの規準振動または固有状態の性値，とくに固有振動数またはエネルギー固有値のスペクトルを求めようといういわゆる“time-independent” な問題 T_{ind} と，これらの系の dynamical な性質或は時間発展をしらべようといういわゆる“time-dependent” な問題 T_{dep} の２つに分類出来ます。以下これらを組み合せた４通りのカテゴリーに分けて研究の状況を説明いたします。

S_{imp}-T_{ind}　無限にひろがった完全格子のスペクトルは周知のように band 構造をもっており，固有函数は平面波ですが，不純物や境界面のために周期性が乱れると，不純物或は境界面の付近に局在した mode が現われることがあり，これらに属する準位は band の間の gap の中に孤立して出て来るかまたは完全系の band とは別の band(overlap することはあるが) を作ります。このような mode の現われる条件やその性質については，多くの人がしらべていますが，振動子系グループにおいても Takeno，Kashiwamura 等がこの方面の仕事をかなり精力的に行ないました。またある種の不純物が入ると，band の中に著しくスペクトル密度の大きい所が現われて，いわゆる resonance level を作ることがありますが，これについては Takeno の研究が多数あります。最近の１つの傾向として，long-range interaction をもつ格子の band 構造や局在 mode の研究が，Fukushima，Teramoto，Narita 等によって進められています。局在 mode や resonance mode は赤外吸収や Mössbaner 効果などにおいて重要な役割を演じるので，実験と密着した問題として今後も中心的課題となるでしょう。

S_{imp} - T_{dep}　少数の不純物が系が力学的行動にどのような影響を与えるか或は逆に，不純物の力学的性質に対して格子全体がどのような効果を及ぼすかという問題は，輸送現象や不可逆現象と関連して非常に興味があります。Teramoto 及び Kashiwamura は早くから調和振動子系における不可逆性の現われ方を追求していましたが，これに対する不純物の影響をくわしく吟味して heat flow の問題に関する suggestive な結果を得ました。また調和格子

の中の重い不純物がBrown 運動をする粒子に酷似したふるまいを示すという事実は，いわゆるheat resorvoirなるものの力学的本質を解明する上で恰好な手がかりを与えますが，これについてはどういう条件の下で，またどういう時間範囲の中で格子がheat resorvoir の役目をするかをToda，Takeno，Hori，Nakazawa，Narita，Sakurai等が詳細な吟味を行いました。非調和性が不可逆過程において本質的な役割を演じること，もっと平たくいえば，調和系では不可逆性は決して生じないが，非調和性が少しでもあれば平衡状態への不可逆的接近が必ず起る，というのは従来物理屋の常識とされていました。振動子系グループはこれに対してどちらかといえば懐疑的な立場をとって来ましたが，非調和系をまともにとり扱かうのが困難なので。からめ手から調和系でもかなりの程度の不可逆性を示す場合があることを示そうとしたのが上記のような研究でした。しかし最近 computer によって，非調和系でも必ずしも不可逆性を示さないという例がいろいろと見出されて来ましたので，これに刺戟されて，非調和系と積極的にとりくもうということになって来たわけです。おそらく，不可逆性は我々の観測する量の性格及び観測の time scale によって左右されるもので，その本質は調和系でも非調和系でも同じなのではないでしょうか。

T_{dep} の１つとして，Kogure は気体分子が格子に衝突するさいの，気体から格子へのエネルギー伝達の問題をとりあげて，興味のある結果を得ました。

$S_{dis}-T_{ind}$ 以前は系の構造が乱れると，スペクトルは周期系の場合にもっていたsingularityを失ってダラダラとしたものになる，という摂動論的な結果が常識でしたが，これは１９６０年にDean の数値計算によってくつがえされました。松田氏によると，S_{dis} の問題に対しては，１９５９ 年以前が B.C.(before computer)で，１９６０ 年以後がA.D.(After Dean)ということになります。Dean の結果によると，一般に系が乱れるとスペクトルはかえってギザギザの多い複雑なものになり，多数のpeak と狭いgap をもつて来ます。これを我々はfine structure とよんでいます。この意味で奇妙なモデル実験の結果は理論屋にとって極めて challengingで，振動子系グループの中心課題の１つとなりましたが，幸いMatsuda が定式化した連分数の方法及びHori-Asahi が開発した伝達行列の方法を駆使することによって，

１９６４年頃までに原理的に解決され，無秩序系のスペクトルがfine structureをもつことは何等不思議ではなく，むしろ当然予期されるものであることが明らかになりました。さらに重要な副産物として，いわゆるSaxon-Hutnerの定理が大巾に拡張されて，一般のSaxon-Hutner型の定理として確立されました。これによって，fine structureに現われるgapが説明出来るばかりでなく，液体型やガラス型の無秩序系のスペクトルのように，fine structureをもたないもののgapも説明されます。

１９６５年に，連分数の方法と伝達行列の方法とを統一したphase theoryという一般理論がHoriによって定式化されましたが，これは２，３次元の系に対してはeffectiveな適用が困難であるという欠点をもっています。これに対して１９６６年にMatsudaは全く別の発想法によって，一般のn次元系に対して有効な“islandization” の方法という新しい方法を創始しました。この理論はまだ発展の途上にありますが，高次元系のスペクトルの研究はこれによって著しく見通しが開けたといってよいでしょう。

無秩序系のスペクトルをdiagrammaticな方法で計算することは，Matsubara，Toyozawa，Yonezawa，Takeno，Langerなどによって試みられていますが，少くとも現在のところ，fine structureを出すことには成功していません。Green函数やdiagramの方法はマクロな物理量の計算には有効ですが，スペクトルのような微妙なものを計算するのにはeffectiveでないようです。Islandizationやphaseの方法は，これらの近似法の適用限界及びその近似のnatureを解明するのによい手段となり得ると思われます。Matsudaは“effective distance” の概念にもとづいて，fine structureを失わずにスペクトルを近似的に求める方法を提出し，これによって非常によい結果を得ました。これらの方法とdiagramの方法との比較は興味があり，Matsuda,Yonezawaによって着手されています。

非調和系ではスペクトルのfine structureはどうなるのかというのは大きな問題です。そもそも非調和系ではスペクトルなるものが存在するのか，存在するとすればどういう意味をもつのか，ということからして明らかではありません。この問題も今回の非線形研究会の１つの動機となったもので，今後解決することが望まれます。今回発表されるTodaの研究はその１つの手がかり

として注目されます。

$S_{dis}-T_{dep}$ このカテゴリーでは残念ながら計算の困難のためあまり仕事はなされていません。Takeno は Green 函数を用いて S_{dis} の時間発展を論じ，Hori は cumulant 展開を用いて normal mode の時間変化を計算することを試みましたが，他の方法で得られた結果とくいちがっており，断定的な結論は得られていません。これらをくわしく比較検討することは不可逆過程の理論にとって大きな意味がある筈ですが，なお残された問題となっています。

以上で振動子系グループのしてきた仕事をざっと概観したわけですが，最後にグループの研究の特徴について一言のべてしめくくりたいと思います。特徴にはいろいろあるでしょうが，私の考えでは最も目立つのは常識に対して懐疑的だということだろうと思います。調和系における heat flow の研究にしても，無秩序系のスペクトルの fine structure の研究にしてもこの意識が底にあるわけです。物理における“常識”というものの成立の仕方はいろいろありますが，近似方法の過信から来るものはその1つで，無秩序系のスペクトルがいつもダラダラしたものになるという常識や，非線形性が不可逆性の原因になるという常識は何れもこの種のものと考えられます。これらに挑戦するためには rigorous な方法を考えることが必要ですから，新しい方法論の案出や開発が振動子系グループの今一つの特徴となるのは必然的ななりゆきといえるでしょう。Fine structure の問題を解決するのに伝達行列，連分数，phase 及び islandazation の新しい方法が用いられたことはすでにお話ししましたが，fine structure 以外に対してもこれらの方法は有効に応用されており，Matsuda による伝達行列法の鎖状分子への応用，Asahi による同法の高次元格子宥限格子への応用などの仕事があります。このほか Fukuda, Hori-Asahi によってS－行列の方法が，Kotera-Osawa によって Transmission-Matrix の方法が，Kotera，Toda によって random walk の方法が，何れも不純物準位の問題に対して有効な別法として定式化されています。同じことを別の方法でとり扱うことは一見無意味に見えますが，islandization や phase の方法が成功したことからもわかるように，別の見方でものを見ると，最初解決困難と思われた問題に対して意外な突破口が開けること

がしばしばあるものですし，また新しい物理的 picture が得られて見通しがよくなることもありますから，この種の研究も大いに発展させるべきだと思います。

常識に対する批判的研究のもう1つの方向としては，従来理論物理において甚だ気軽に考えられていたスペクトルの概念のより厳密な意味を明らかにして，スペクトルの問題と散乱の問題の基礎的関係や，resonance mode の正確な意味などをはっきりさせようとする仕事があります。しかし数学的困難のため，この種の問題に関してはAsahiの差分方程式のスペクトルの理論を除いてはあまり具体的な仕事はまだ出ていません。このような“深刻な”問題をとり扱かうことの意義については，グループの中でもいろいろな意見がありますが，研究会における討論などの基調には，つねにこの傾向の問題意識があったことは否定出来ないと思います。

どうも，独断的なところが多々あったのではないかという気がしまして恐縮ですが，これで現在までの経過の大ざっぱな報告を終りたいと思います。

流体力学における非線型問題

巽　友正（京大理）

§1. 流体力学の構成

流体が運動状態にあると否とを問わず，その物理的性質は密度ρ，圧力p，温度T，内部エネルギーε，エントロピーsなどの熱力学的量によって規定される。そして，流体が運動しているときには，その運動は速度$\mathbf{u}$によって記述される。これらの量はすべて，座標$\mathbf{x}$，時間tの函数である。

流体の運動はつぎのいくつかの保存則を表わす方程式によって支配される。

連続方程式（質量保存）：
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u})=0\ , \tag{1}$$

運動方程式（運動量保存）：
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u})+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\mathbf{u})=\mathrm{grad}(-p+\sigma)+\rho\mathbf{f}\ , \tag{2}$$