

- 4) S. H. Glarum: J. Chem. Phys. 33 (1960), 1371

Kinetic Ising Model

松原武生 (京大理)

吉光浩二 ()

§ 1. Kinetic Ising Model の意義

二次相転移の Mathematical Model としての Ising Model は次のような点で意味を持っている。

- ① Exact solution が存在する。(二次元)
- ② Mathematical structure が透明である。(代数的)
- ③ 有効性と限界。(物理現象の本質をとらえている。)

同様に相転移を含む系の Dynamics の Mathematical Model としての "Kinetic Ising Model" も上の点で意味を持ち得る。すなわち、

- ① 相転移の起る model で exact solution を求めることは出来ないか。
(一次元 Glauber Model は exact であるが有限温度で相転移が起らない。)

② Mathematical structure が透明で代数的処理が可能である。

③ 有効性。次のような system で有用である。

- (a) 二元合金
- (b) 強誘電体 (KDP, NaNO_2)
- (c) 生体高分子 (cooperative reaction)

このような点から "Kinetic Ising Model" の一般的 Formulation を考える。更にその 2, 3 の特別な場合を考える。

§ 2. Formulation

スピン系の配置を $\alpha \equiv \{\sigma\}$ で表わし, 分布関数を $f(\alpha, t)$ とする。すべての配置についての和を

Kinetic Ising Model

$$\sum_{\{\sigma\}} = \sum_{\alpha} \simeq \int \dots \dots d\alpha$$

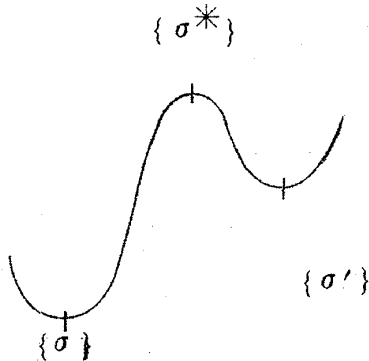
等と略記する。外場 F の中で $\{\sigma\} = \alpha$ なる配置にあるときの系のエネルギーを

$$U(\{\sigma\}) = E(\{\sigma\}) - \mu(\{\sigma\}) F \dots \dots \dots (1)$$

とする。 $E(\{\sigma\})$ は外場がないときの相互作用のエネルギー、 $\mu(\{\sigma\})$ は系の分極を与える物理量である。単位時間に $\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma'\}$ なる転移の起る確を $W(\{\sigma\}|\{\sigma'\})$ とすると detailed balance の条件から

$$W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) e^{-\frac{U(\{\sigma\})}{kT}} = W(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) e^{-\frac{U(\{\sigma'\})}{kT}} \dots \dots (2)$$

が成立つ。例えばこの条件を満す W として



$$\begin{aligned}
 W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) &\propto e^{-\frac{U^* - U(\{\sigma\})}{kT}} \\
 W(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) &\propto e^{-\frac{U^* - U(\{\sigma'\})}{kT}}
 \end{aligned} \dots \dots (3)$$

の形を仮定すると、 F が充分小さいとき、その一次まで考慮して

$$W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) = W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \left[1 - \frac{\mu(\{\sigma\}) F}{kT} + \dots \dots \right] \dots (4)$$

の形に展開できる。

$f(\alpha, t)$ に対する基礎方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\{\sigma\}, t)}{\partial t} &= -f(\{\sigma\}, t) \sum_{\{\sigma'\}} W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \\
 &\quad + \sum_{\{\sigma'\}} W(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) f(\{\sigma'\}, t) \dots \dots (5)
 \end{aligned}$$

外場がないときの平衡分布を $f_0(\{\sigma\})$ として

$$f(\{\sigma\}, t) = f_0(\{\sigma\}) + g(\{\sigma\}, t) \quad \dots\dots\dots (6)$$

とにおいて, g を F について一次の量とみなす。 F に関して二次以上の量を省くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\{\sigma\}, t)}{\partial t} = & -g(\{\sigma\}, t) \sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \\ & + \sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) g(\{\sigma'\}, t) + f_0(\{\sigma\}) \sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \frac{\mu(\{\sigma\}) F}{kT} \\ & - \sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) \frac{\mu(\{\sigma'\}) F}{kT} f_0(\{\sigma'\}) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

今 operator、

$$D(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) = \delta_{\{\sigma\}\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma''\}} W_0(\{\sigma\}|\{\sigma''\}) - W_0(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

を定義すると(7)の右辺の才一行は

$$- \sum_{\{\sigma'\}} g(\{\sigma'\}, t) D(\{\sigma'\}|\{\sigma\})$$

とかけ, また(7)の右辺の才二行は

$$\frac{F}{kT} \sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\}) \mu(\{\sigma'\}) D(\{\sigma'\}|\{\sigma\})$$

と書くことが出来る。故に(7)は

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\{\sigma\}, t)}{\partial t} = & - \sum_{\{\sigma'\}} g(\{\sigma'\}, t) D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) \\ & + \frac{F}{kT} \sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\}) \mu(\{\sigma'\}) D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

Kinetic Ising Model

と変形出来る。

そこでまず次の左固有値問題を解く

$$\sum_{\{\sigma'\}} \varphi_n(\{\sigma'\}) D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) = \lambda_n \varphi_n(\{\sigma\}) \dots\dots\dots(10)$$

$\lambda_n, \varphi_n(\{\sigma\})$ は完全系をつくるものと仮定して

$$\left. \begin{aligned} g(\{\sigma\}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(\{\sigma\}) \\ \sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\}) \mu(\{\sigma'\}) D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) &= \sum_{n=1}^{\infty} kT c_n \varphi_n(\{\sigma\}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

のように展開すると、(11) を (9) に入れて、

$$\frac{d a_n(t)}{d t} = -\lambda_n a_n + F(t) c_n \dots\dots\dots(12)$$

となる。 $t = -\infty$ で $F(-\infty) = 0$ で熱平行にあったとすると、 $a_n(-\infty) = 0$

$$a_n(t) = c_n \int_{-\infty}^t F(s) e^{-\lambda_n(t-s)} ds \dots\dots\dots(13)$$

$$\therefore f(\{\sigma\}, t) = f_0(\{\sigma\}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^t F(s) e^{\lambda_n(s-t)} \varphi_n(\{\sigma\}) ds \dots\dots(14)$$

が得られる。分極は

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\{\sigma\}} f(\{\sigma\}, t) \mu(\{\sigma\}) \\ &= \sum_{\{\sigma\}} g(\{\sigma\}, t) \mu(\{\sigma\}) \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

そこで

$$\sum_{\{\sigma\}} \varphi_n(\{\sigma\}) \mu(\{\sigma\}) \equiv \mu_n \dots\dots\dots(16)$$

$$p_n = c_n \mu_n \dots\dots\dots (17)$$

と定義すると

$$P(t) = \int_{-\infty}^t F(s) \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-\lambda_n(t-s)} ds \dots\dots\dots (18)$$

これは正に緩和関数である。

$$F = E_0 e^{i\omega t}$$

のとき, $\tau_n = 1/\lambda_n$ とおいて

$$P(t) = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \tau_n}{1 + i\omega \tau_n} \dots\dots\dots (19)$$

p_n の意味を知るために, $f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\})$ を $\varphi_n(\{\sigma\})$ で展開する

$$f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* \varphi_n(\{\sigma\}) + f_0(\{\sigma\}) \left[\sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\})\mu(\{\sigma'\}) \right] \dots\dots\dots (20)$$

最後の項は永久分極 $\sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\}) \neq 0$ があるときの場合も含めてつけ加えてある。右から $D(\{\sigma\}|\{\sigma''\})$ を operate して (11) のオ二式と比較すると直ちに

$$\begin{aligned} kT c_n &= \lambda_n \mu_n^* \\ \therefore c_n &= \frac{\mu_n^*}{kT} \cdot \frac{1}{\tau_n} \\ \therefore p_n \tau_n &= \mu_n c_n \tau_n = \frac{\mu_n \mu_n^*}{kT} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

又 (20) に $\mu(\{\sigma\})$ をかけて $\{\sigma\}$ について和をとると, (16) を用いて

Kinetic Ising Model

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\}) [\mu(\{\sigma\})]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \mu_n^* + \left(\sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\}) \mu(\{\sigma\}) \right)^2 \\ \therefore \sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\}) [\mu(\{\sigma\})]^2 - \left(\sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\}) \mu(\{\sigma\}) \right)^2 \\ &= \langle \mu^2(\{\sigma\}) \rangle - \langle \mu(\{\sigma\}) \rangle^2 \equiv \langle M^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \mu_n^* \dots (22) \end{aligned}$$

そこで

$$\beta_n \equiv \frac{\mu_n \mu_n^*}{\langle M^2 \rangle}, \quad \sum_n \beta_n = 1 \dots (23)$$

を定義すると

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\langle M^2 \rangle}{kT} E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1+i\omega\tau_n} \dots (24) \\ &= \frac{\langle M^2 \rangle}{kT} E_0 e^{i\omega t} \int \frac{H(\tau)}{1+i\omega\tau} d\tau \\ H(\tau) &\equiv \sum_n \beta_n \delta(\tau - \tau_n) \end{aligned}$$

λ_n の分布の母関数は次で与えられる。

$$\Phi(z) \equiv \langle M^2 \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\lambda_n z} \dots (25)$$

定義 (16), (20), (10) を用いて

$$\Phi(z) = \sum_{\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma'\}) \mu(\sigma') (e^{-zD}) (\{\sigma'\} | \{\sigma\}) \mu(\{\sigma\}) \dots (26)$$

となる。

§ 3 Reformulation

前節の結果を, すべての配置 $\{\sigma\}$ を element に持つ横ベクトル, 縦ベクト

ル、マトリックスを定義してまとめなおす。

$f(\{\sigma\}, t)$ を成分とする横ベクトル

$$\boxed{f_{\alpha_1}(t), f_{\alpha_2}(t), \dots, f_{\alpha_N}(t)} \equiv \mathbf{f}(t)$$

$$f_0(\{\sigma\}) \qquad \qquad \qquad \mathbf{f}_0$$

$$g(\{\sigma\}, t) \qquad \qquad \qquad \mathbf{g}(t)$$

$$\phi_n(\{\sigma\}) \qquad \qquad \qquad \phi_n$$

$$D(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \text{ を成分とするマトリックス} \qquad \qquad \qquad D$$

$$\mu(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) = \delta_{\{\sigma\}\{\sigma'\}} \mu(\{\sigma\}) \qquad \qquad \qquad \mu$$

(9) 式

$$\frac{\partial \mathbf{g}(t)}{\partial t} = -\mathbf{g} \cdot D + \frac{F}{kT} \mathbf{f}_0 \cdot (\mu D)$$

(10) 式

$$\phi_n \cdot D = \lambda_n \phi_n$$

(11) 式

$$\mathbf{g}(t) = \sum_n a_n(t) \phi_n$$

$$\mathbf{f}_0 \cdot (\mu D) = \sum_n kT c_n \phi_n$$

すべての成分が1の縦ベクトルを \mathbf{e} とすると

(15) 式

$$P(t) = (\mathbf{g} \cdot \mu \cdot \mathbf{e})$$

(16) 式

$$\mu_n \equiv (\phi_n \cdot \mu \cdot \mathbf{e})$$

(14) 式

Kinetic Ising Model

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_0 + \int_0^\infty F(t-s) \sum_n c_n \phi_n e^{-sD} ds \\
 &= f_0 + \int_0^\infty \frac{F(t-s)}{kT} f_0 \cdot (\mu D) e^{-sD} ds
 \end{aligned}$$

(19) 式

$$\begin{aligned}
 P(t) &= E_0 e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega s}}{kT} (f_0 \cdot \mu D e^{-sD} \mu \cdot e) ds \\
 &= E_0 e^{i\omega t} \frac{1}{kT} (f_0 \cdot \mu \frac{D}{D+i\omega} \mu \cdot e)
 \end{aligned}$$

ここで

$$(f_0 \cdot \mu \Lambda \mu \cdot e) = \sum_\alpha \sum_\beta f_{0\alpha} \mu_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mu_\beta$$

$$\Lambda \equiv \frac{D}{D+i\omega}$$

を考慮して, $f_{0\alpha}$ を $(\alpha\alpha)$ 成分に持つ diagonal matrix を f_0 , すべての成分が 1 の matrix を 1 とすると

$$\text{Tr} (f_0 \mu \Lambda \mu 1) = \sum_\alpha \sum_\beta f_{0\alpha} \mu_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mu_\beta 1_{\beta\alpha} = \sum_\alpha \sum_\beta f_{0\alpha} \mu_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mu_\beta$$

$$\therefore P(t) = E_0 e^{i\omega t} \frac{1}{kT} \text{Tr} (f_0 \mu \frac{D}{D+i\omega} \mu 1)$$

同様に (26) 式も

$$\Phi(z) = \text{Tr} (f_0 \mu e^{-zD} \mu 1)$$

§ 4 Special Model

前節までの一般論の特別な場合として, Glauber model, Tanaka et al 及び Kawasaki の model をあげることが出来る。前二者は分極を保存しない model であり, 強誘電体などに使え, 後者は分極を保存し, spin diffusion の model として使われる。

Glauber model は次の Master equation から出発する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\sigma_1 \dots \sigma_N t) &= - \sum_j W_j(\sigma_j) f(\sigma_1 \dots \sigma_N t) \\ &\quad + \sum_j W_j(-\sigma_j) f(\sigma_1 \dots -\sigma_j \dots \sigma_N t) \\ W_j(\sigma_j) &= \frac{\alpha}{2} (1 - \sigma_j \tanh \beta E_j) \\ E_j &= \sum_i J_{ij} \sigma_i + h \end{aligned}$$

$W_j(\sigma_j)$ は transition probability で detailed balance の条件

$$\frac{W_j(\sigma_j)}{W_j(-\sigma_j)} = \frac{f_0(-\sigma_j)}{f_0(\sigma_j)}$$

を満し, α は熱浴との相互作用の強さを, h は適当な単位ではかった外場を表わす。これから Moment についての方程式を求めると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \rangle &= - 2 \sum_{j=1}^n \langle \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n W_j(\sigma_j) \rangle \\ \langle \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \rangle &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n f(\sigma_1 \dots \sigma_N t) \end{aligned}$$

ここで $f(\sigma_1 \dots \sigma_N t)$ 成分とする縦ベクトルを \mathbf{f} , moment を適当に並べた縦ベクトルを \mathbf{m} とすると, 適当に matrix \mathbf{D} , $\tilde{\mathbf{D}}$ を定義することによって Master equation 及び Moment equation は

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{D} \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{m}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f(++ \dots +, t) \\ \vdots \\ f(--- \dots -, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \langle \sigma_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \sigma_N \rangle \\ \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Kinetic Ising Model

f を m に変換する matrix T を

$$m = \sqrt{N} T f$$

で定義すると

$$T^+ T = T T^+ = 1$$

を満す T が存在することが示せる。故に

$$\tilde{D} = T D T^{-1}$$

となる。更に Fourier 変換を行なうと

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \langle \sigma_j \rangle e^{i q r_j} \equiv \sigma(q) \text{ etc.}$$

$$m_F = U m,$$

$$\frac{\partial m_F}{\partial t} = - \tilde{D}_F m_F, \quad \tilde{D}_F = U \tilde{D} U^{-1}$$

従って $\sigma(0)$ は一般に higher order moment の q 成分と couple し poly disperse relaxation になる。

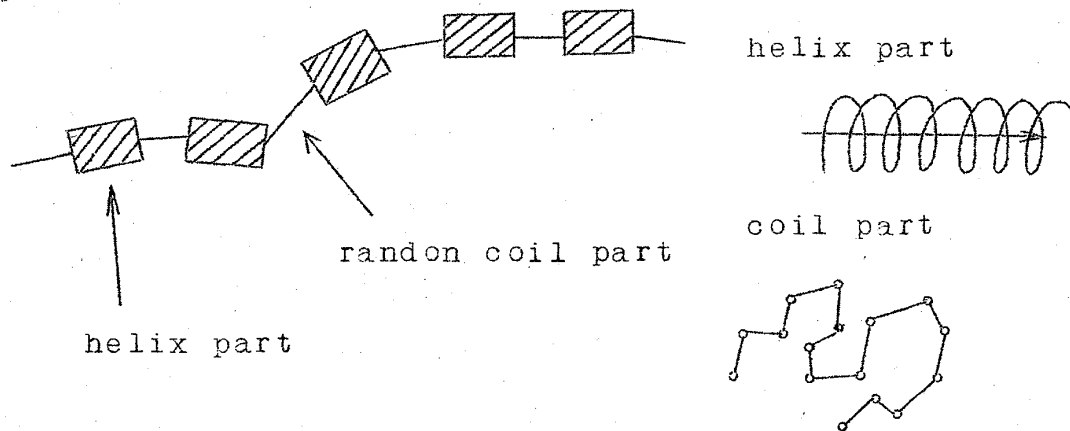
(Polarization $\propto \sum_j \langle \sigma_j \rangle \propto \sigma(0)$)

そこで相転移を起す model で exact に解けるものを作ることが出来ないかが問題となる。nearest neighbour interaction の一次元 Glauber model は exact に解けるが、有限温度で相転移が起らず $\sigma(0)$ は $\sigma(q)$ 及び higher order moment と couple しない特別の場合であって mono-disperse である。

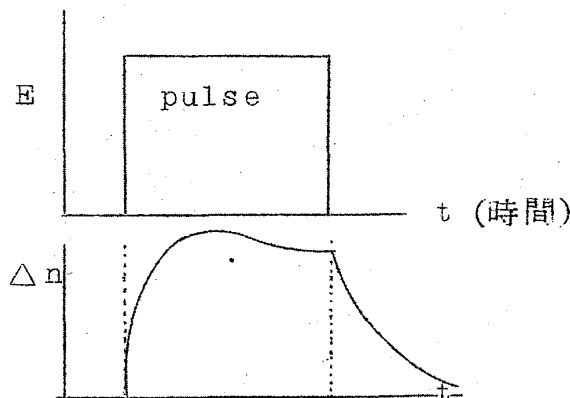
§5 一次元 Model

生体高分子の cooperative reaction には、一次元物質で "相転移" を起すものとして、helix-coil transition, DNA の denaturation などがある。ともに hydrogen bond の有無 (或は helix 状態, coil 状

態)に Ising 変数を対応させた, 一次元 Ising system としてとりあつかわれる。例えば後者は Montroll によれば interaction J が $J = A(T - T_0)$ の如く温度変化する Ising system としてあつかわれ, randomness を考慮に入れて melting curve (hydrogen bond の bond fraction の温度変化)を得ている。前者は schematic には図のような構造を持っており



helix part は矢印方向に dipole moment を持っている。coil part は gaussian model など色々の方法で取扱われる。このような system について dynamical な性質に対して, T -jump relaxation (或る平衡状態から温度を急に变える), Dielectric relaxation, Kerr effect などが実験的に調べられている。誘電分散には helix part の orientation 及び helix part の coil part への変化など time dependence に異った二つの element があり新たな問題である。又 coil part の取扱いも問題となる。Kerr 効果は電場 E によって生じた一軸性結晶 like の異方性によって光が複屈折する現象で, E に平行及び直角な方向の屈折率 $n_{||}$, n_{\perp} の差 $\Delta n = n_{||} - n_{\perp}$ は次の図のようになる。そして Δn の立上り及び減衰には

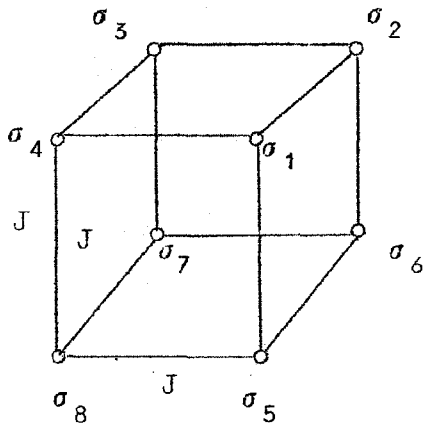


single relaxation からのずれがみられ, これは生体高分子の長さ及び温度によると思われる。すなわち, 長さをそろえると single relaxation になるが, helix-coil 転移のおこる温度域では single relaxation からずれる傾向がある。

Kinetic Ising Model

§6 有限個の system

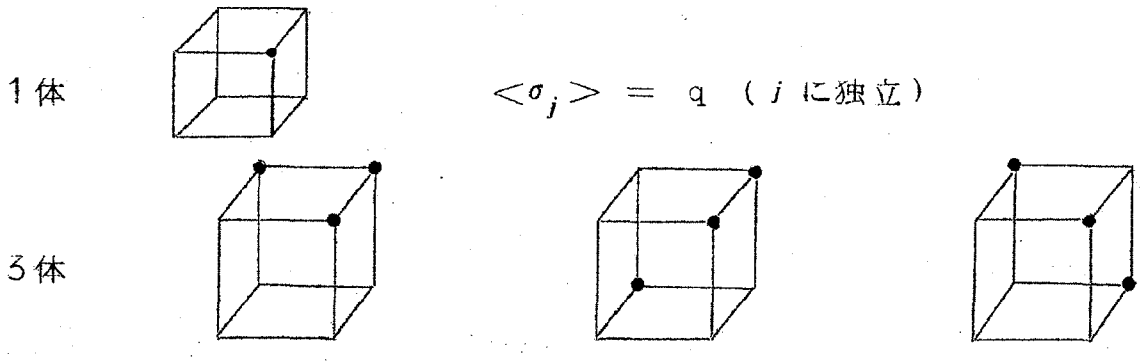
有限個のスピンからなる system は, N が非常に大きい system の持つ性質の傾向を調べる点で意味がある。polydisperse になるもので, relaxation time の分布の温度 dependence



及び粒子数 dependent がわかればよいが, はっきりした結論はない。例えば図のような cube を考える。

§4 の方程式によって, Moment equation を立てると $\sigma(0)$ は空間的に一様なものとしか couple せず, 結局 correlation の種類として図のようなものを

考えればよい。

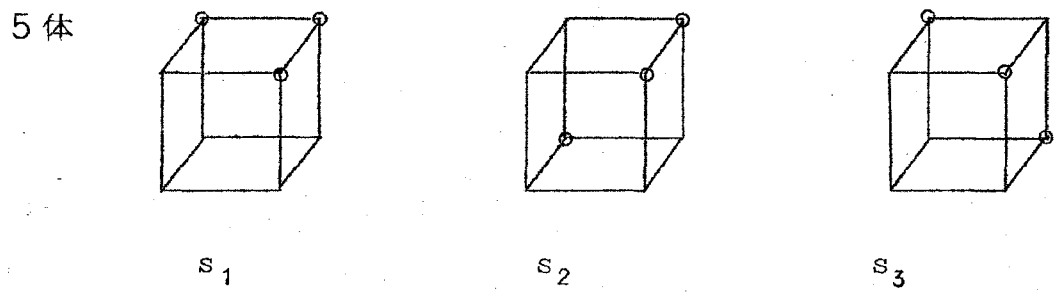


$$\langle \sigma_j \rangle = q \quad (j \text{ に独立})$$

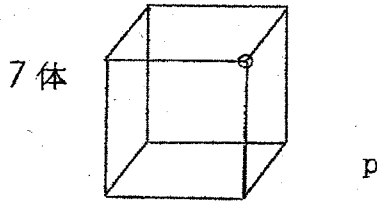
$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \rangle = t_1 \quad \langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_7 \rangle = t_2 \quad \langle \sigma_1 \sigma_3 \sigma_6 \rangle = t_3$$

($\langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \rangle = \langle \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \rangle = \dots$, 空間的一様の場合に当る。)

他も同様である。



(白円の spin は考えない。 s_1 は t_1 の逆に当る。)



従って, q, t_1, t_2, \dots, p を成分とするベクトルを ξ とすると

$$-\frac{d}{d\alpha t} \xi = M\xi, \quad \xi = {}^t (q, t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3, p)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1-3x & & & & -Y & & & \\ (4X+Y) & 3-2X & -2(X+Y) & & -X & & & \\ -2X & -(2X+Y) & 3(1-X) & & -(2X+Y) & & & -Y \\ & -3X & -6X & 3 & & & -3Y & \\ -Y & -6X & -(4X+3Y) & & 5-2X & -(2X+Y) & & -X \\ & -(4X+3Y) & -4X & & -(2X+2Y) & 5-2X & & -2X \\ -Y & & & -3(2X+Y) & -3X & & -3X & 5-3X \\ & -3Y & & & -Y & -3(4Y+Y) & -6X & 7-3X \end{bmatrix}$$

但し, 空白はゼロで

$$X = \frac{r(r^2+1)}{1+3r^2}$$

$$r = \tanh \frac{J}{kT}$$

$$Y = -\frac{2r^3}{1+3r^2}$$

である。

Polarization は q に比例するので, 一般に 8 つの relaxation time が現われる。高温の limit ($T \rightarrow \infty$) をとると, $X, Y \rightarrow 0$ であるので, M は diagonal になり,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & 3 & & & & & & \\ & & 5 & & & & & \\ & & & 7 & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Kinetic Ising Model

q は独立に relate する。低温の limit ($T \rightarrow 0$) では $X \rightarrow \frac{1}{2}$, $Y \rightarrow -\frac{1}{2}$ で, static な方程式 $M\epsilon = 0$ は $q = t_1 = t_2 = \dots = p = 1$ の解を持つ。高温から温度を下げるに従って relaxation mode は couple したし polydisperse になるのであるが, それがどの程度なのであるかは, まだよく分っていない。しかし relaxation time の一つは絶対 0 度に近づくとつれて無限大になることがわかる。すなわち

$$|M| = (1-3X-Y) \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & 5 & & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & & 7 \end{vmatrix} M'_{ij}$$

但し, M の matrix element を M_{ij} とすると

$$M'_{ij} = M_{ij} \quad (j \neq 1)$$

$$1-3X-Y = \frac{(1-r)^3}{1+3r^2} \geq 0$$

となり, $T \rightarrow 0$ のとき $1-3X-Y \rightarrow 0$, 従って $|M| \rightarrow 0$ となるからである。ここで問題は他の mode のふるまいであるが, 一つの relaxation time のみが大きくなるのか, 他の relaxation time もひきづられて大きくなるのか, 二つの可能性がある。

又このような relaxation time の分布の温度変化と共に, 粒子数 N に対する変化にも興味がある。