の成分であり T → T_c で $\psi_0^{(1)} \to \infty$, $\psi_0^{(2)} \to$ finite, 又 $L_k^{(\alpha)}$ は kinetic coefficient である。これから例えば複素誘電率は,

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\psi_0^{(1)}}{i\omega\tau_1 + 1} + \frac{\psi_0^{(2)}}{i\omega\tau_2 + 1}, \quad \tau_1 = (L_0^{(2)} \lambda_1(0))^{-1}, \ \tau_2 = (L_0^{(2)} \lambda_2(0))^{-1}$$

となって T_c でも $\varepsilon(\omega)$ の real part が finite に残るという実験事実を説明することができる。

非線形緩和過程の現象論

西　川　恭　治（京大理）

ここで問題にするのは，秩序無秩序型強誘電性転移を行なう物質が，転移温度 T_c の直上で示す次の三つの性質である。

1) Susceptibility $\chi(\omega)$ の実数部分 $\chi'(\omega)$ が，$\omega \sim$ KMC 附近で ω^{-1} に比例する。これは，デバイモデルによる理論（$\chi'(\omega) \sim \omega^{-2}$）では説明できない。[1]

2) $\chi'(\omega)$ （$\omega \neq 0$）は $T = T_c$ で有限に止まる。これもデバイ理論（$\chi'(\omega) \to 0$）と相容れない。[1) 2)]

3) $\chi(\omega)$ の虚数部分 $\chi''(\omega)$ はデバイ理論で大体説明される。

これらの性質は，通常，デバイ理論の mono－dispersive relaxation に対して，poly－dispersive relaxation 或は緩和時間の分布という形で記述されている。1)，2) の形でデバイ理論からずれて来る温度領域は，TGS や $Ca_2Sr(C_2H_5CO_2)_6$ では，大体

$$(T - T_c)/T_c \lesssim 1/100$$

である。

私はこれを，T_c 近傍で現われる spatial fluctuation の非線形効果と

して説明する事を試みた。詳しくは文献 3) に発表してあるので，ここではエッセンスだけに止める。

出発点は，巨視的分極の時間相関で表わされる $\chi(\omega)$ を，微視的分極の相関と関係づける Glarum の公式[4] である。

$$\chi(\omega) = A(T,\omega)\int_0^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{m}(t)\rangle$$

ここに $A(T,\omega)$ は T 及び ω のゆっくり変化する関数で，$\mathbf{m}(t)$ は，着目する双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ のまわりのある領域（巨視的には小さく，原子間隔に比べては大きい。）の時刻 t における分極である。この公式が成り立つためには，$\mathbf{m}$ と外界との相互作用が巨視的に扱える事が必要である。この要請から，$\mathbf{m}$ をきめる領域の大きさは，双極子間の有効相関距離 λ より大きくなければならない。$T \to T_c$ と共に λ は大きくなるから，$\mathbf{m}$ もそれにつれて大きな領域の分極を表わすようになる。T_c 近傍での分極はここから現われる。

さて，$\mathbf{m}(t)$ の運動は一般に著しく複雑である。その中で，特に次の三つの性質に着目する。

a) $\mathbf{m}(t)$ は $T \to T_c$ にともない，critical slowing－down を示す。それは，$\mathbf{m}$ が λ^3 より大きい領域の分極だからである。

b) $\mathbf{m}(t)$ の運動は，一般に " 非線形 " である。それは $\mathbf{m}(t)$ が微視的な領域の分極だからである。

c) 非線形項は 3 次から始まる。それは，T_c より上では $\mathbf{m} \to -\mathbf{m}$ によって方程式が不変でなければならないからである。

ここで " 非線形 " というのは，$\mathbf{m}$ を線形理論での normal modes $\mathbf{M}_K$ を使って表わした時，$d\mathbf{m}/dt$ が $\mathbf{M}_K$ の一次結合では表わせない，という意味である。また 3 次の非線形項とは，一般に $\mathbf{M}_K \mathbf{M}_{K'} \mathbf{M}_{K''}$ という形で表わせる項の事である。

今 a) により，$d\mathbf{m}/dt$ の線形部分は $T - T_c$ と共に著しく小さくなる。その結果 T_c 近くでは 3 次の非線形項が重要になる。これが T_c 近くでの異常性にきいて来るのではないか，というのが私の考えである。

非線形効果を厳密に調べるのは大変なので，以下では次のようなモデル方程式について調べてみる。

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\nu_0 s(t) - \nu_1 s^3(t) + f(t) \qquad (2)$$

ここに s (t) は $\mathbf{m}$(t) の $\boldsymbol{\mu}$ 方向の成分を $-1 \leq s \leq 1$ となるように規格化したもので，係数 ν_0，ν_1 は

$$\nu_0 \propto (T - T_c) \qquad (3)$$

$$\nu_1 > 0 \qquad (4)$$

とする。(3) は critical slowing－down を表わし，(4) は T_c での転移が2次である事を表わす。f (t) は一種の random force で，以下では充分早い process を表わしていると仮定する。(2) 式は，上の a) b) c) の性質を示す最も簡単な方程式である事を強調しておく。

(2) を充分長い time scale で近似的に解くと，

$$s(t) \sim \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} g^{2n+1} e^{-t/\tau_n} \qquad (5)$$

$$g \sim \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_0}}\tilde{s} \Bigg/ \sqrt{1 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\tilde{s}^2} \qquad (6)$$

$$\tilde{s} = s(t=0) + \int_0^{\infty} dt' f(t') \qquad (7)$$

$$\tau_n = [(2n+1)\nu_0]^{-1} \qquad (8)$$

これは，s (t) の緩和過程が polydispersive であり，しかもその緩和時間の分布が $\nu_0 \to 0$ と共に広がって行く事を示している。この性質は，文献 1) の実験結果と定性的に一致している。

次に (5) を (1) に代入して $\chi(\omega)$ を計算すると

$$\chi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{i\omega\tau_n + 1} \qquad (9)$$

という形に書かれる。これは，高周波の極限では

$$\chi'(\omega) \doteqdot \frac{1}{\omega^2 \tau_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[2n+1 \right]^2$$

$$\chi''(\omega) \doteqdot \frac{1}{\omega \tau_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ (2n+1) \qquad \cdots\cdots (10)$$

となるが，これを計算すると，

$$\chi'(\omega) = \frac{\chi(0)}{\omega^2 \tau_0^2} \{ 1 + 4\tau_0 \nu_1 b_1 + 3\tau_0^2 \nu_1^2 b_2 \} \qquad \cdots\cdots (11)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{\chi(0)}{\omega \tau_0} \{ 1 + \tau_0 \nu_1 b_1 \} \qquad \cdots\cdots (12)$$

ただし，

$$b_n = \langle \mu \tilde{s}^{2n+1} \rangle \Big/ \langle \mu \tilde{s} \rangle \qquad \cdots\cdots (13)$$

今特に，

$$b_n \propto \tau_0^{-1} \propto \chi(0)^{-1} \qquad \cdots\cdots (14)$$

と仮定すると，$T \to T_c$ で $\chi'(\omega)$ は有限，かつ $\chi''(\omega)$ はデバイ現論と本質的に変らないという結果がえられる。(14) は微視的立場から証明されねばならない仮定だが，$\langle \mu \tilde{s} \rangle$ が $\chi(0)$ に比例する事を考えれば，全然無理な仮定でもなさそうに思える。

(11) (12) は，(14) を仮定すれば，一応最初にのべた $\chi(\omega)$ の性質の中の 2) と 3) を説明しているが，性質 1) とは相容れない。これは，$\omega \to \infty$ の極限を考えたためと思われる。実際には，$\omega \sim$ KMC という周波数領域では (10) の近似はよくないであろう。しかし，いずれにせよ (9) で n の大きい所のふるまいが重要と思われるから，その領域での c_n の形を適当に仮定して調べてみる事は興味深い。今，c_n の n の大きいところでの漸近形として，

$$C_n \sim \frac{(\tau_0 \nu_1)^a}{(2n+1)^b} \exp\left[-\tau_c/\tau_n\right] \qquad (15)$$

を採用し，$\omega \to \infty$ で上の結果がえられるように a，b の関係を定めると，

$$a = b - 1 \qquad (16)$$

がえられる。(15)，(16) を使って(9)を計算すると，

$$\chi(\omega) \sim (\tau_0 \nu_1)^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\tau_c/\tau_n\right]}{(2n+1)^a \left[i\omega\tau_0 + 2n+1\right]}$$

$$\sim \left(\frac{\nu_1}{\omega}\right)^a \int_{1/\omega\tau_0}^{\infty} dt\, \frac{t^{1-a} - it^{-a}}{1+t^2}\, e^{-\omega\tau_c t} \qquad (17)$$

ここで，$\omega\tau_c \ll 1$ という周波数領域に限り，且つ $a=1$ とおくと，(17)は

$$\chi(\omega) \sim \frac{\nu_1}{\omega} \int_{1/\omega\tau_0}^{\infty} dt\, \frac{1 - i/t}{1+t^2}$$

となる。これは，文献 1) の実験式

$$\chi(\omega) \sim \frac{1}{\omega} \int_{1/\omega\tau_0}^{\infty} dt \left[1 - \frac{i}{t}\right] e^{-t^2} \exp\left[\frac{1}{\omega^2 \tau_0^2}\right]$$

と非常によく似た形をしている。勿論(15)は何ら根拠のない仮定であるが。

文　　献

1) R. H. Hill and S. K. Ichiki : Phys. Rev. 128 (1962), 1140 ; 130 (1963), 150.

2) E. Nakamura and M. Hosoya : J. Phys. Soc. (Japan) 23 (1967), 844.

3) K. Nishikawa ; Prog. Theor. Phys. 38 (1967), 305.

4) S. H. Glarum : J. Chem. Phys. 33 (1960), 1371

Kinetic Ising Model

松 原 武 生（京大理）
吉 光 浩 二（ 〃 ）

§1. Kinetic Ising Model の意義

二次相転移の Mathematical Model としての Ising Model は次のような点で意味を持っている。

① Exact solution が存在する。（二次元）

② Mathermatical structure が透明である。（代数的）

③ 有効性と限界。（物理現象の本質をとらえている。）

同様に相転移を含む系の Dynamics の Mathematical Model としての "Kinetic Ising Model" も上の点で意味を持ち得る。すなわち，

① 相転移の起る model で exact solution を求めることは出来ないか。（一次元 Glauber Model は exact であるが有限温度で相転移が起らない。）

② Mathematical structure が透明で代数的処理が可能である。

③ 有効性。次のような system で有用である。

(a) 二元合金

(b) 強誘電体 （KDP, $NaNO_2$）

(c) 生体高分子 (cooperative reaction)

このような点から "Kinetic Ising Model" の一般的 Formulation を考える。更にその 2, 3 の特別な場合を考える。

§2. Formulation

スピン系の配置を $\alpha \equiv \{\sigma\}$ で表わし，分布関数を $f(\alpha, t)$ とする。すべての配置についての和を