

輸送現象の分布函数によらない運動学的理論 II.

Hall 効果及び磁気抵抗効果について.

康 舜 沢 (京大理)

(12月20日受理)

前回の論文 (物性研究 vol 8, No. 5 (1967), p 277, 以後これを論文 I とよぶことにする) において, ゲルマニウム等においてみられる非 Ohm 性の電流を分布函数を用いない運動学的方法で導出することを試みた。論文 I において用いられた電気伝導のような輸送現象をとりあつかう方法は, いくつかの制約 (古典論にもとづいていることや, 衝突あるいは散逸の具体的な内容を取り入れていないこと等) がある反面, その範囲内においては, 簡明なしかたで, 現象の表現を与えうることが, 電気伝導の場合についていえた。(衝突ないしは散逸の具体的なことには立ち入らないで, それらの平均的な性質のみを考慮したということは, 一面では制約になるが, 他方では, 個々の場合の散逸の具体的な型にはよらない一般性をももっているということにもなるといえるだろう。)

この論文では, 論文 I で用いた方法が通常電気伝導のみではなく, ある条件のもとでは, よりひろい適用性をもっていることを示すために, 静的な磁場の中での輸送現象をとりあつかってみる。具体的には Hall 効果及び磁気抵抗効果をとりあつかう。我々の方法によって, 通常 Boltzmann の分布函数に対する運動学的方程式を解いてえられる結果と同等のものが, 簡単なしかたで導びくことができることを示すとともに, 結果の表式を導びき出す過程で, 磁場中での荷電粒子のふるまいと, 全体として表面にうかびあがる現象との間の見かけ上のパラドキシカルなくいちがいが, どのようにして内的な整合性を保っているのかということが, ごく自然に理解されることを示す。

論文 I と同様, 多数の charge carrier のうちのいずれか一つに着目してその多数回の衝突にわたる平均的なふるまいが, 観測される系の現象を代表するものと考え。この charge carrier がおこす, 格子振動あるいは不純物との衝突に番号をつけて, ある衝突からはじまって, N 回の衝突までのふるまいを考える。i 番目の衝突がおこる時刻を t_i と表わす。collision dur

ation は無視しうるものとする。ある衝突がおこって、次の衝突がおこるまで charge carrier は外場の中で、古典的運動方程式にしたがう自由粒子としてふるまうものと仮定する。したがって衝突が関係しない間は、この粒子のしたがう運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H} \quad \text{----- (1)}$$

と表わされる。E は電場，H は磁場を表わし，すべての charge carrier は，同一の質量 m と電荷 e をもつものとする。

次に，電場が x, y 軸方向，磁場が z 軸方向にかかっているとき，即ち

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H) \quad \text{----- (2)}$$

であるときについて考える。時刻 t ($t_i < t \leq t_{i+1}$) におけるこの carrier の速度を，特に $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i(t)$ で表わし，i 番目の衝突直後の速度を $\mathbf{V}_{i,0}$ で表わすことにする。

次に方程式 (1) の両辺を m で割って，成分にわけてかくと

$$\begin{aligned} \frac{dV_{ix}}{dt} &= \frac{e}{m} E_x + \frac{eH}{mc} V_{iy} \\ \frac{dV_{iy}}{dt} &= \frac{e}{m} E_y - \frac{eH}{mc} V_{ix} \end{aligned} \quad \text{----- (3)}$$

$$\frac{dV_{iz}}{dt} = 0$$

となる。(3) から z 成分は今の場合特別の考慮を必要としないことがわかるので x, y 成分のみについて考える。ここで簡単のため，次の記号を導入する。

$$\frac{e}{m} E_x \equiv \epsilon_x, \quad \frac{e}{m} E_y \equiv \epsilon_y, \quad \frac{eH}{mc} \equiv \omega. \quad \text{----- (4)}$$

したがって，(3) の x, y 成分は

$$\frac{dV_{ix}}{dt} = \epsilon_x + \omega V_{iy} \quad \text{----- (5)}$$

$$\frac{dV_{iy}}{dt} = \epsilon_y - \omega V_{ix}$$

と表わされる。

連立微分方程式 (5) は, よく知られているように

$$V_i \equiv V_{ix} + i V_{iy} \quad \text{-----} \quad (6)$$

なる量を導入すれば

$$\frac{dV_i}{dt} = (\epsilon_x + i\epsilon_y) - i\omega V_i \quad \text{-----} \quad (7)$$

となつて, 簡単に解けることがわかる。その結果は

$$V_i(t) = \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{i\omega} + \left(V_{i,0} - \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{i\omega} \right) e^{-i\omega(t-t_i)} \quad \text{-----} \quad (8)$$

となる。

表式 (8) を, 実部と虚部とに分けると

$$V_i(t) = V_{ix}(t) + i V_{iy}(t)$$

$$= \frac{\epsilon_y}{\omega} + \left(V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_i) + \left(V_{iy0} + \frac{\epsilon_y}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_i) \quad \text{-----} \quad (9)$$

$$+ i \left\{ -\frac{\epsilon_x}{\omega} - \left(V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_i) + \left(V_{iy0} + \frac{\epsilon_x}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_i) \right\}$$

となり, これから結局

$$V_{ix}(t) = \frac{\epsilon_y}{\omega} + \left(V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_i) + \left(V_{iy0} + \frac{\epsilon_x}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_i) \quad \text{-----} \quad (10)$$

$$V_{iy}(t) = -\frac{\epsilon_x}{\omega} - \left(V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_i) + \left(V_{iy0} + \frac{\epsilon_x}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_i)$$

がえられるのである。

表式 (10) は, x, y 方向の drift motion と, z 軸まわり cyclotron motion との重ね合せを表わす。ここで注意しておくべきことは, x, y 軸方

向に，それぞれ E_x, E_y なる電場がかかっているにもかかわらず，磁場が z 方向にかかっているならば，そうでないときとはいちじるしくちがひ， x 軸方向の drift motion は E_y (および H と) によって，また y 軸方向の drift motion は E_x (および H と) によって決定されるということがらである。

次に， $V_{ix}(t)$ と $V_{iy}(t)$ の t_i と t_{i+1} の間における平均の値を計算すると次のようになることがすぐわかる。

$$\begin{aligned} \overline{V_{ix}(t)} &= \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_{ix}(t) dt \\ &= \frac{\epsilon_y}{\omega} + \frac{1}{\omega \Delta t_i} \left\{ (V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega}) \sin \omega \Delta t_i - (V_{iy0} + \frac{\epsilon_y}{\omega}) (\cos \omega \Delta t_i - 1) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{V_{iy}(t)} &= \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_{iy}(t) dt \\ &= -\frac{\epsilon_x}{\omega} + \frac{1}{\omega \Delta t_i} \left\{ (V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega}) (\cos \omega \Delta t_i - 1) + (V_{iy0} + \frac{\epsilon_x}{\omega}) \sin \omega \Delta t_i \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで記号

$$\Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i \quad (13)$$

を用いた。

式(11)及び(12)は，磁場の強さ H の大小によらず常に成立する。しかしながら，磁場が非常に強くなると，必ずしも古典論で表現しえないことがらが生じてくるという事情を考慮して，ここでは殆んどの Δt_i に対して

$$\omega \Delta t_i < 1 \quad (14)$$

がなりたち $\sin \omega \Delta t_i, \cos \omega \Delta t_i$ を $\omega \Delta t_i$ に関して展開して，低次の項のみを考慮するだけでよいというような場合を考える。

式(11)と(12)で $\cos \omega \Delta t_i, \sin \omega \Delta t_i$ を $\omega \Delta t_i$ に関して展開して，4次以下までをとると

$$\overline{V_{ix}(t)} = \frac{\epsilon_y}{\omega} + \frac{1}{\omega \Delta t_i} \left\{ (V_{ix0} - \frac{\epsilon_y}{\omega}) (\omega \Delta t_i - \frac{\omega^3 \Delta t_i^3}{6}) - (V_{iy0} + \frac{\epsilon_x}{\omega}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\omega^2}{2} \Delta t_i^2 + \frac{\omega^4 \Delta t_i^4}{24} \right) \} \\
 = & \frac{\epsilon_y}{\omega} + \frac{1}{\omega \Delta t_i} \left\{ V_{ix0} \omega \Delta t_i - \frac{\omega^3}{6} V_{ix0} \Delta t_i^3 - \epsilon_y \Delta t_i + \frac{\omega^2}{6} \epsilon_y \Delta t_i^3 \right. \\
 & \left. + \frac{\omega^2}{2} V_{iy0} \Delta t_i^2 - \frac{\omega^4}{24} V_{iy0} \Delta t_i^4 + \frac{\omega}{2} \epsilon_x \Delta t_i^2 - \frac{\omega^3}{24} \epsilon_x \Delta t_i^4 \right\} \\
 = & \frac{\epsilon_y}{\omega} + V_{ix0} - \frac{\omega^2}{6} V_{ix0} \Delta t_i^2 - \frac{\epsilon_y}{\omega} + \frac{\omega}{6} \epsilon_y \Delta t_i^2 + \frac{\omega}{2} V_{iy0} \Delta t_i \\
 & - \frac{\omega^3}{24} V_{iy0} \Delta t_i^3 + \frac{1}{2} \epsilon_x \Delta t_i - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_x \Delta t_i^3 \\
 = & V_{ix0} + \frac{1}{2} V_{iy0} \Delta t_i - \frac{\omega^2}{6} V_{ix0} \Delta t_i^2 - \frac{\omega^3}{24} V_{iy0} \Delta t_i^3 \\
 & + \frac{1}{2} \epsilon_x \Delta t_i + \frac{\omega}{6} \epsilon_y \Delta t_i^2 - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_x \Delta t_i^3 \quad \text{----- (15)}
 \end{aligned}$$

および，同様にして

$$\begin{aligned}
 \overline{v_{iy}(t)} = & V_{iy0} - \frac{1}{2} \omega V_{ix0} \Delta t_i - \frac{\omega^2}{6} V_{iy0} \Delta t_i^2 + \frac{\omega^3}{24} V_{ix0} \Delta t_i^3 \\
 & + \frac{1}{2} \epsilon_y \Delta t_i - \frac{\omega}{6} \epsilon_x \Delta t_i^2 - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_y \Delta t_i^3 \quad \text{----- (16)}
 \end{aligned}$$

がえられる。

式 (15) 及び (16) において注目すべきことは，衝突間の時間間隔 Δt_i と磁場の強さとが，条件 (14) をみたしているような場合には carrier の運動は，時々刻々には式 (10) で表わされるような運動をしているにも拘わらず， Δt_i の間の平均の運動は式 (15) と (16) で表わされようになり，主として，速度の x 成分は x 成分の電場によって加速され，y 成分は y 方向の電場成分によって加速されるというようになっていることがわかるのである。(15) と (16) 式での dominant term は，それぞれの第 5 項である。第 1 項から第 4 項までは，多数回の衝突にわたる和をとれば消えてしまうものであり，第 6

項と7項は第5項よりも高次項である。) いいかえれば(15)と(16)式の導出過程からもわかるように条件(14)がみたされているような場合には drift motion $(\frac{\epsilon_y}{\omega}, -\frac{\epsilon_x}{\omega})$ と cyclotron motion の一部とが打ち消しあい cyclotron motion の而余の部分が平均として, x成分の電場がx方向の加速に, y成分の電場がy方向の加速に寄与するように作用するというようになるのである。このことが, 磁場中での荷電粒子が衝突と衝突との間の時々刻々において(10)式に表わされたような運動をするにも拘わらず, x方向の電場によってきまるx方向の電流が全体として観測される理由になっているといえるだろう。後でえられる電流の表式(28)はこのことにもとづいてえられたのである。

式(15)と(16)から, N回の衝突にわたる時刻 t_1 から t_N までの間の単位時間あたりの平均の速度のx, y成分を $\langle V_x \rangle_N, \langle V_y \rangle_N$ で表わすと

$$\begin{aligned} \langle V_x \rangle_N &= \frac{\sum_{i=1}^N V_{ix}(t) \Delta t_i}{\sum_{i=1}^N \Delta t_i} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \Delta t_i} \left\{ \sum_{i=1}^N V_{ix0} \Delta t_i - \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^N V_{ix0} \Delta t_i^3 + \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^N V_{iy0} \Delta t_i^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega^3}{24} \sum_{i=1}^N V_{iy0} \Delta t_i^3 + \frac{1}{2} \epsilon_x \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2 + \frac{\omega}{6} \epsilon_y \sum_{i=1}^N \Delta t_i^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_x \sum_{i=1}^N \Delta t_i^4 \right\} \quad \text{----- (17)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle V_y \rangle_N &= \frac{\sum_{i=1}^N V_{iy}(t) \Delta t_i}{\sum_{i=1}^N \Delta t_i} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \Delta t_i} \left\{ \sum_{i=1}^N V_{iy0} \Delta t_i - \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^N V_{ix0} \Delta t_i^2 - \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^N V_{iy0} \Delta t_i^3 + \frac{\omega^3}{24} \sum_{i=1}^N V_{ix0} \Delta t_i^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_y \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2 - \frac{\omega}{6} \epsilon_x \sum_{i=1}^N \Delta t_i^3 - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_y \sum_{i=1}^N \Delta t_i^4 \right\} \quad \text{----- (18)} \end{aligned}$$

がえられる。ここで和 Σ は $i=1$ から N までとるものとする。

(17), (18) において, 論文 I で行ったと同様にして, V_{ix0}, V_{iy0} が関与する和は全て消えるものとする。これは衝突あるいは散乱の等方性がなりたつ場合に当てはまるといえるだろう。そうすると

$$\langle V_x \rangle_N = \frac{1}{2} \epsilon_x \frac{\Sigma \Delta t_i^2}{\Sigma \Delta t_i} + \frac{\omega}{6} \epsilon_y \frac{\Sigma \Delta t_i^3}{\Sigma \Delta t_i} - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_x \frac{\Sigma \Delta t_i^4}{\Sigma \Delta t_i} \quad (19)$$

$$\langle V_y \rangle_N = \frac{1}{2} \epsilon_y \frac{\Sigma \Delta t_i^2}{\Sigma \Delta t_i} - \frac{\omega}{6} \epsilon_x \frac{\Sigma \Delta t_i^3}{\Sigma \Delta t_i} - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_y \frac{\Sigma \Delta t_i^4}{\Sigma \Delta t_i} \quad (20)$$

がえられる。ここで N を充分大きくとれば

$$\frac{\Sigma \Delta t_i^{\alpha+1}}{\Sigma \Delta t_i} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

したかつて, また $\langle V_x \rangle_N, \langle V_y \rangle_N$ も N の値にはよらない定常値をとるものと仮定すれば

$$\frac{\Sigma \Delta t_i^{\alpha+1}}{\Sigma \Delta t_i} \equiv \langle \tau^\alpha \rangle \quad (21)$$

なる記号を導入して

$$\langle V_x \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_x \langle \tau \rangle + \frac{\omega}{6} \epsilon_y \langle \tau^2 \rangle - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_x \langle \tau^3 \rangle \quad (22)$$

$$\langle V_y \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_y \langle \tau \rangle - \frac{\omega}{6} \epsilon_x \langle \tau^2 \rangle - \frac{\omega^2}{24} \epsilon_y \langle \tau^3 \rangle \quad (23)$$

がえられる。

(23) 式より, x 方向の電流を流す条件の下での y 方向の Hall 電場は, 定義により $\langle V_y \rangle = 0$ なる条件よりえられ

$$\epsilon_y = \frac{\omega \epsilon_x \langle \tau^2 \rangle}{3 (\langle \tau \rangle - \frac{\omega^2}{12} \langle \tau^3 \rangle)} \quad (24)$$

となる。いまは条件 (14) がみたされている場合を考えているから、(24) 式は

$$\epsilon_y = \frac{\omega \langle \tau^2 \rangle}{3 \langle \tau \rangle} \epsilon_x \quad \text{-----} \quad (25)$$

と近似することができる。定義式 (4) を用いれば、(25) 式は

$$E_y = \frac{eH E_x \langle \tau^2 \rangle}{3mc \langle \tau \rangle} \quad \text{-----} \quad (26)$$

となる。

また (22) 式から、磁気抵抗効果をも含めて、x 方向の電流は、n を carrier の密度として

$$\begin{aligned} J_x &= ne \langle v_x \rangle \\ &= \frac{1}{2} ne \left(\epsilon_x \langle \tau \rangle + \frac{\omega}{3} \epsilon_y \langle \tau^2 \rangle - \frac{\omega^2}{12} \epsilon_x \langle \tau^3 \rangle \right) \quad \text{-----} \quad (27) \end{aligned}$$

となり、これに (25) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} ne \epsilon_x \langle \tau \rangle \left\{ 1 + \frac{\omega^2 \langle \tau^2 \rangle^2}{9 \langle \tau \rangle^2} - \frac{\omega^2 \langle \tau^3 \rangle}{12 \langle \tau \rangle} \right\} \\ &= \frac{ne^2 \langle \tau \rangle}{2m} E_x \left\{ 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{eH}{me} \right)^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} - \frac{1}{12} \left(\frac{eH}{mc} \right) \frac{\langle \tau^3 \rangle}{\langle \tau \rangle} \right\} \quad \text{-----} \quad (28) \end{aligned}$$

がえられる。この式で第 2 項と第 3 項とが磁気抵抗効果をあらわす。

磁気抵抗効果を見れば

$$E_x = \frac{2m}{ne^2 \langle \tau \rangle} J_x$$

となり、これを Hall 電場の表式 (26) に代入すれば

$$E_y = \frac{eH \langle \tau^2 \rangle}{3mc \langle \tau \rangle} \frac{2m}{ne^2 \langle \tau \rangle} J_x \quad \text{-----} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{nec} \frac{2\langle\tau^2\rangle}{3\langle\tau\rangle} H J_x$$

となって、Hall 係数の表式として

$$R = \frac{1}{nec} \frac{2\langle\tau^2\rangle}{3\langle\tau\rangle} \text{-----} (30)$$

がえられる。

磁気抵抗効果を含む電流の表式(28)と Hall 係数の表式(30)とは数係数のちがいを除いて Boltzmann の分布函数に関する運動学的方程式を解いてえられるよく知られた表式と同等である。数係数のちがいは、ここで定義した種々の次数の平均の衝突間時間 $\langle\tau^\alpha\rangle$ と Boltzmann の方法において定義された分布函数の緩和時間の平均値とが厳密に同等のものであるとはいえないことによるものと思われる。

以上のとりあつかいにおいては、磁場の強さは条件(14)により制約せられていることと、電場の強さには何らの制約も加えられていないという点を注意しておこう。このことは、論文 I において、ある種の非 Ohm 性電流が、 $\langle\tau\rangle$ が電場に依存することにより発生するというをみたのと同様、いまの場合でも $\langle\tau^\alpha\rangle$ 等が電場の強さに依存するというを何ら妨げるものではない。しかしながら磁場に関していえば $\langle\tau\rangle$ は磁場 H に強く依存するような場合はいまの場合には、条件(14)により排除せられていると考えてよいだろう。また強磁場では条件(14)がなりたたないばかりか、古典論そのものが成立しがたいという事情があって、強磁場における輸送現象 (Shubnikov - de Haas 効果や Esaki 効果等) に対してはここでのとりあつかいは直ちに適用することはできないといえるだろう。