氏名	三井斌友（みついたけとも）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第747号
学位授与の日付	昭和56年9月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	Runge-Kutta type integration formulas including the evaluation of the second derivative, Part 1 （2階導関数値を含むルンゲ・クッタ型積分公式）
論文調査委員	(主査)教授 一松信　教授 高須達　教授 山口昌哉

論文内容の要旨

常微分方程式 $y'=f(x, y)$ の初期値問題 $y(x_I)=y_I,\ x\geqq x_I$ に対する数値解法が応用上重要なことはいうまでもない。そのために最も多く使われるのは，離散近似法である。これにも種々の方式があるが，よく使われる一つの型は，前進型の Runge-Kutta 型公式である。これは定められた合計 p 回（この p を段数という）の点において $f(x, y)$ の値を評価し，その重みつき平均値を次の増分とする。もし計算誤差がないとしたとき，それが真の解の Taylor 展開と q 次の項まで合うならば，その公式の位数を q という。

この公式は1900年前後に Runge, Heun, Kutta らが研究したものだが，その後永らく伝統的に使われていた。公式そのものの再検討は，電子計算機の発展以降であり，特に1960年頃から Ceschino, Butcher らの寄与が大きい。Butcher は，段数 p を定めたときの達成可能位数 (attainable order) の概念を確立し，$p\leqq 9$ について，本来の Runge-Kutta 型の達成可能位数の限界を確定した。

申請者が扱ったのは，これらの方法とは若干異なり，解の2階導関数に相当する。

$$y''=g(x, y)=f_x(x, y)+f_y(x, y)f(x, y)$$

の評価をも加えた公式である。この型の公式を初めて提唱した学者は不明であるが，申請者に大きな影響を与えたのは故占部実教授である。その最初の公式は予測子・修正子型だったが，広島大学の新谷尚郎教授は，y' を1回，y'' をq回使ういわば (1, q) 段の Runge-Kutta 型公式を研究し，$q=1\sim5$ のおのおのについて q＋2位（3～7位）の公式を示したが，それが達成可能位数の限界であるかどうかは吟味されていなかった。申請者はこの問題に挑戦し，$q=1\sim4$ について確かに $q+2$ が達成可能位数の限界であるという決定的結果を得た。

原理的には，これはある連立代数方程式系の解の有無であるが，その方程式系は巨大なものである。申請者は数理解析研究所に設置の DEC-SYSTEM-2020 に載せた数式処理体系 REDUCE-II により，まず方程式系を正しく求め，さらにこの数式処理体系を強力な道具として活用しつつ，上記の結果を明確に示し得た。

参考論文4篇のうち1篇は非線型常微分方程式の準周期解に関する研究，他の3篇は非線型境界値問題に関する各種の近似解法をめぐる理論並びに数値例の検討であって，いずれも優れた研究である。

論文審査の結果の要旨

自然現象の多くが微分方程式によって記述されることと，それが厳密に解けるのは例外的であって，実際問題には近似解法・数値解法が不可欠なことはいうまでもない。

Runge-Kutta 型の公式は，自己出発型であり，誤差の評価を加えれば刻み幅の自動変更が可能など，いくたのよい性質を有し，古くから愛用されている。しかしその公式自体の再検討は，電子計算機が大発展をみた近年まで，十分に進められていなかった。

2階導関数に相当する

$$y''=g(x,\ y)=f_x(x,\ y)+f_y(x,\ y)f(x,\ y)$$

の評価をも併用する公式は，未だ断片的な研究が散見するだけであり，達成可能位数の限界を明確にしたのは，本論文が世界最初である。この場合，下限は具体的な公式の実例を構成すればすむが，上限は，公式中に含まれるパラメタに対し，その位数までの条件式を連立させた巨大な連立代数方程式系の解の有無の吟味という大作業になる。これは段数 q の増加とともに急激に困難になる。y' を1回，y'' を q 回使う公式では，$q=1$は自明，$q=2$は容易である。$q=3$ はかなりの工夫を要する。$q=4$ となると通常の方法では絶望的に難しい。申請者は計算機による数式処理体系を巧妙に活用しつつ，$q=4$ のとき7位の公式を与える14元22個の連立方程式を解析した。これらはある変数については線型なので，それらの係数の間に連立しうる条件が成立するが，その先はきめの細かい多数の場合分けと，個々の吟味を要する。最も困難な一つの場合については，申請者はあるパラメタに関する整係数代数方程式を導き，それを数値的に解いて，区間解析の手法で誤差を評価し，誤差を考慮に入れても，他の条件と両立しないことを確かめるという方法をとっている。伝統的な数学からは異質だが，論理的にはまったく正しい論法である。

申請者はさらに $q=5$ の場合に挑戦し，8位の公式の不可能性をほぼ示したが，未だ上記のような数値的評価によらざるを得ない場合が残っており，決定的な結論に達していない。これらの基礎的研究の次には，さらに具体的な公式を作り，典型的な微分方程式を解いて在来の公式と比較するという実用化試験が残されている。その意味で，本研究は未完成であるが，前記の場合の達成可能位数の限界を決定したことだけでも優れた成果である。また将来は日常的になると思うが，数学の研究に計算機を強力な道具として活用した例は，世界的にも未だ例が乏しく，その方面でも輝かしい先駆者の一人といえるであろう。

以上により，本論文は，理学博士の学位論文として，価値あるものと認める。