

学位申請論文

力学系におけるカオスへ至る

分岐と位相構造

上江列達也

学位審査報告

氏名	上江 冽 達 也
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 博 第 号
学位授与の日付	昭 和 年 月 日
学位授与の要件	学位規則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 一 専 攻
(学位論文題目) 力学系におけるカオスへ至る分岐と位相構造	
論文調査委員	主 査 富 田 和 久 松 原 武 生 恒 藤 敏 彦

理 学 研 究 科

(論文内容の要旨)

小数自由度に関する常微分方程式の解が本質的な複雑化を示す「カオス」現象を従来行なわれていない位相論的な面から記述することが本論文の目的である。

対流の模型としてモード数を3に落したローレンツ模型がカオスを示すことは著明であるが、このカオスが周期的外力に対して示す応答を詳細に調べたことがこの論文の基礎をなしている。論文内容の第1は、カオスに到る径路の分類であり、第2は、諸種の分岐に伴う軌道の位相的特徴の記述とその理解を助ける理論的考察である。

I カオスにいたる径路の研究。

上述のローレンツ模型は、

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y),$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz + A \cos Bt,$$

で与えられるが、解の3次元的写像表示(stroboscopy)についてA,Bのみを変化させて調べた相図はかなり複雑であり、その代りに種々の異なる型のカオスへの径路をみる事が出来た。

(1) 非対称 limit cycle → 一連の倍周期分岐 → 非対称カオス → 対称カオス

この場合には2次元の Hénon - Héiles 系との類似が見出されている。

(2) 対称 limit cycle → homoclinic 条件 → 対称カオス (間欠性)

(3) 非対称 limit cycle → heteroclinic 条件 → 対称カオス

(間欠性)

結果として生ずるカオスは間欠的であるが、(2)、(3)の機構は、従来、間欠性発生の機構として考えられていた。saddle-node 合体の機構とは明らかに異なるものであり、申請者が新たに指摘したものである。

以上の分類に

(4) トーラス (quasiperiodicity) → カオス

の径路を加えれば、一般的に通用する径路の分類になるものと考えられる。

II 諸種の分岐に伴う流れの位相論的な性格の移行。

力学系の解の位相論的な特徴づけ自体、ある意味で前例の少ない新しい研究分野である。

この様な目的で申請者がとり上げる量として‘結び目型’と‘リンク数’とがある。

A) 1つの閉軌道の特徴づける‘結び目型’ (knot type)

B) 2つの閉軌道 c_1, c_2 の絡み合いを規定する‘リンク数’ (linking index) $L(c_1, c_2)$

これは

$$L(c_1, c_2) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{c_1 c_2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{d}r_1 \times \vec{d}r_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \quad (\text{Gauss 方式})$$

で定義される。

次に、分岐に伴う変化を論ずるために、

c_1 = 着目する軌道 (不安定化の主体) $x_0(t)$

ととり、この軌道の近傍の流れを

$$x_{i\zeta} \equiv \{ \vec{x}_0(t) + \zeta \vec{v}_i(t) ; 0 \leq t \leq 2T \}$$

(ここに $\zeta \ll 1$, $\vec{v}_i(t)$ は規格化した固有ベクトル)

とすれば、 x_0 に対するその近傍の流れの関係は、‘ねじれ数’ (torsion number)

$$n_i = \frac{1}{2} L(x_0, x_{i\zeta}),$$

又は‘相対的ねじれ数’ r_j であらわされる。

申請者は、以上の諸量を計算機を用いて徹底的に評価し、これらに基づいて分岐を通じたの‘結び目型’および‘ねじれ数’の移行を詳細に求めた。

これに加えて、軌道とその近傍の位相構造の変化を簡単な仮定に基づいて扱う理論的な考察を行ない、上記のシミュレーションの結果とよく一致する結果を得たのである。

氏名	上江洸 達也
----	--------

(論文審査の結果の要旨)

力学系における解軌道の再帰的振舞が本質的に複雑化する現象としての‘カオス’は、近時、活潑な研究の対象となっているが、その研究の多くは測度論的諸量—例えば、時間変化の特徴を示す、軌道の離隔率としての Liapunov 数、エントロピーの発生率 (Kolmogorov-Sinai のエントロピー)、また不変集合の分数次元 (Hausdorff 次元)—を用いて‘カオス’を特徴づけようとするものである。

この様な事態の下において、申請者は、従来欠けていた面として、位相的側面に着目し、‘カオス’状態における軌道の形やその近傍との連結状況を位相論的に特徴づけることを行った。この着眼は、極めて新鮮であり、今後の‘カオス’の研究に対して大きな刺戟を与える先駆的な労作とみられる。

参考論文は、本論文と密接な関係があり、この方面の研究に対する申請者の温蓄を示すものである。

以上の諸点の考察により、申請者の本論文は、理学博士の学位に値するものと認める。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。

学位申請論文

力学系におけるカオスへ至る

分岐と位相構造

上江洲 達也

目次

0 序章	1.
0-0. まえがき	1.
0-1. カオス, ストレンジ アトラクターの定義とその特徴	3
0-2. カオスへのルート	13
0-3. 物理系におけるカオス	19
0-4. 本研究の目的	23
第1章 カオスへのルート (強制ロ-レンツモデルを例にとり)	25
1-0. モデルと相図	25
1-1. カオスへのルート	30
1-2. まとめと議論	45
第2章 3次元常微分方程式の解の位相的性質	46
2-0. 3次元空間内の閉曲線の位相的特徴づけ	46
2-1. 3次元常微分方程式の周期解の位相的諸量	51
2-2. 分岐過程における周期解の位相構造の変化	58
2-3. 倍周期分岐のカスケード現象(2 ⁿ 分岐)の領域における 周期解の位相構造の successive な変化	71
2-4. 数値計算 その1(周期解領域)	78
2-5. ストレンジ アトラクターの位相的特徴づけ	84
2-6. 数値計算 その2(カオス領域)	87
2-7. オリジナル・ロ-レンツモデルの大域的な分岐過程における 位相構造の変化	95
2-8. まとめと議論	99
	102

謝辞

附 録

A. Hénon マップと 2次元での非線形性を持つ散逸率一定($\epsilon=0$)の 2次元写像との同値性 (decouple しない場合).	103
B. 対称性のある系での対称リミットサイクルの倍周期分岐の禁止について	105
C. $u(t)$ の連続性, 微分可能性	114
D. $n_i - r_i + L(x_0 + \zeta' f_i, x_0)$ の言正明	117
文 献	120

0-0 ま え が き

自然現象、更には社会現象を記述する決定論的方程式、即ち、
ランダムな力を仮定しない方程式 (Hamilton 方程式, Navier-Stokes
方程式等) は一般的に次のような形に書ける。

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{X}(\vec{x}(t)) \quad (0.1)$$

但し、 $\vec{x}(t)$ は問題に応じて、ユークリッド空間、バナハ空間、ヒルベルト空間
等に属するベクトルであり、 \vec{X} はそこでのベクトル場である。又、

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n) \quad \vec{x}_n, \vec{F} \in \mathbb{R}^n \quad (0.2)$$

という形の差分方程式で現象が記述される場合がある。このような系を
総称して力学系と呼ぶ^{*}。このような系において、 \vec{X} 、又は \vec{F} が非線形
の場合、一般解を求めるのは容易なことではない。のみならず、低次元の
場合でさえ、解析的でない、ストカスティックな振舞を示す解が存在する。
このような解はカオスと呼ばれる乱流現象やエルゴード問題と関連

* 補足すれば、(0.1)の場合、解は、初期値 $\vec{x}(0)$ と時刻 t の関数として、

$\vec{x} = \vec{f}(t, \vec{x}(0))$ とかけ、これを \vec{X} によって生成される flow と呼ぶ。この写像

\vec{f} のことを考えている空間上の力学系と呼ぶ。(0.2)の場合も同様。

して、極めて興味深い。

力学系におけるカオスは、保存系(位相空間内の体積が時間発展にも変化しない系)においては Poincaré¹⁾ 以来知られている現象であり、又、散逸系においては、1963年の Lorenz²⁾ による、いわゆるローレンツ・アトラクターの発見以来、多くの研究がなされている*)

この章では まずカオスの定義、特徴について述べ、次に現在までに知られているカオスへのルートの種類について述べる。更に物理系におけるカオス研究について概括し、最後に本研究の目的について述べる。

*) 散逸系でのカオスは、Lorenz 以前に、発見されている。³⁾

0-1. カオス, ストレレンジ アトラクターの定義とその特徴

Li-Yorke⁴⁾ は、区間 $I = [0, 1]$ から I への連続写像 f において、3周期解が存在すれば、次の3つの命題が成立することを証明した。^{*)}

i) 任意の自然数 k に対して、 k 周期点がある。

ii) 区間 I に f -不変 ($f(S) = S$) な非可算集合 S があり、 S 内の任意の

点 p, q に対して

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0 \quad **)$$

iii) $p \in S$ 内の任意の点 p, q を周期点とすると、

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

ii) は S 内の任意の2点は、どんなに f を作用させても、離れたり、充分近づいたりすることを示しており、iii) は S 内の点 p が周期点に収束しないことを、つまり S 内の点の非周期的性質を示している。更に l 周期点 ($l \neq 2^n, n=0, 1, 2, \dots$) が存在すればよいという証明が Oono によってもなされている。又、高次元

*) 実際は、もっとゆるい条件で証明されている。

***) $f^0(p) = p, f^1(p) = f(p), f^n(p) = f(f^{n-1}(p))$ 。又、 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ は、各々上極限及び下極限。

への拡張として、snap-back repeller が存在すればカオスになるという
証明がある。^{b)} Li-Yorke の意味でのカオス ^{*}i), ii), iii) を含む別のカオスの
定義もなされている。⁷⁾ しかし、このように定義されたカオスは、

必ずしも観測可能ではないため、Formal Chaos と呼ばれる。

カオスが観測にかかるとは (Observable Chaos) ^{*}、ルバーク測度
に関して絶対連続な不変測度を持つ場合であり、support が

ルバーク測度 0 のカントール集合になる window とよばれる現象が

Formal Chaos のカテゴリーに入っている。更に、1次元写像 f が

パラメータ λ を持つ場合、ある特殊な λ_0 のみで絶対連続

であっても、物理的には意味がなく、 λ の変化に対して構造安定で

なければ観測にかからないであろう。このことについては次の

*) i) は通常 'いくらでも長い周期を持つ解がある' とおきかえられる。

***) 7) では Observable Chaos を次のように定義している。 ; ルバーク測度

が正の集合 A があり、 A 内の全ての点 x に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{f^k(x)} = \mu$.

ここで μ は正の Kolmogorov エントロピー $h(f, \mu)$ を持つ不変測度。

δ_y は y で値を持つ δ -測度。 $h(f, \mu) > 0$ で、 μ が絶対連続な。

この意味で Observable Chaos となる。

ように、絶対連続な不変測度の存在する λ の測度は以下の2つの場合、有限になることが証明されている。⁸⁾

① $f_\lambda(x) = \lambda g(x)$ $0 \leq \lambda < 4$, $g(x)$ は C^3 -位相で $x(1-x)$ に近い関数

② $f_\lambda(x) = \lambda g(x) \pmod{1}$, $g(x)$ は C^3 級, $f(0) = f(1) = 0$,
かつ $[0, 1]$ で 1つの非退化 critical point ^{*} を持つ。

以上は、1次元写像の場合であるが、カオティックな振舞を示すには、diffeomorphism (逆が存在して、 f, f^{-1} とも微分可能である写像, 以下 diffeo. と略す) ならず2次元以上、flow (微分方程式 ^{**)} によって生成される流れ) ならず3次元以上 ^{**)} が必要である。このような力学系の中でも、数学的には特に Axiom A を満たす力学系 ⁹⁾ について多くの結果が得られている。以下、これについて、簡単に説明する。

* critical point \bar{x} とは、 $\frac{d}{dx} g(x) \Big|_{x=\bar{x}} = 0$ となる点。非退化

とは、条件 $\frac{d^2}{dx^2} g(x) \Big|_{x=\bar{x}} \neq 0$ 。

** 非自律系も自律系と考えることができ、自律系として3次元以上。

flow 又は diffeo. f が Axiom A を満たすとは 次の 2つの条件が満足される場合である。

^{*})
1) 非遊走集合 Ω は双曲的構造をもつ。

2) f の周期点全体が Ω で稠密 (flow の場合, 平衡点は孤立)。

ここで不変集合 Ω が双曲的構造を持つとは、尤雑把に言えば、 Ω 内の任意の点 x で、伸びる方向と縮む方向があり、それぞれが、 x を通る軌道とともに連続的に変化すること、つまり それらの次元が軌道に沿って一定であることである。この双曲的構造が、カオティックな振舞いによって決定的であり、初期値に対する敏感な依存性の原因となる。

1次元の場合と同様に、今の場合も観測可能性が物理的には、重要であるが、集合 Ω が観測されるためにはそれがアトラクターである必要がある。(アトラクター Λ とは、その近傍の点 U が $t \rightarrow \infty$ で Λ に近づく

^{*}) Ω 内の任意の点 x とするとき、 x の任意の近傍 U と、任意の正の

定数 τ に対し、 $(\bigcup_{t > \tau} f^t(U)) \cap U \neq \emptyset$ 、つまり、どんなに

時間がたっても、もとの点の近くに戻ってくるような点の全体。これは不変閉集合となる。

ような位相推移的不変閉集合^{*}) のことである。) 更にこのようなアトラクターを持つ系が構造安定である必要がある。力学系 f が Axiom A を満たし、更に強横断性条件^{**)} を満たせば、構造安定であることが知られている。

Axiom A 力学系が C^2 級であるとき、(ルバークの意味で) 殆んど全ての軌道はアトラクターに吸引される。更に次の量

$$P(\mu) = h(f, \mu) - \int \log J_+ d\mu \quad (***)$$

を最大にする Λ 上の不変測度 μ^* が一意的に定まり、 μ^* のもとで系はエルゴード的になる。つまり、 Λ の basin の殆んど全ての点 x に対して

*) 位相推移的 (topologically transitive) 集合 Λ とは Λ 内で稠密な軌道が存在する不変閉集合のこと。Axiom A の場合、非遊走集合はこのような集合 (basic set) の disjoint な和集合となる。各々の basic set はそれ以上分割できないため、basic set について議論すれば十分である。

**) 任意の 2 点 x, y に対し安定多様体 $W^s(x)$ と不安定多様体 $W^u(y)$ が横断的に交わる。

***) J_+ は不安定多様体の x での接空間を E_x^u としたとき $Df|_{E_x^u} \rightarrow E_{f(x)}^u$ なる線形写像のヤコビ行列式。

任意の連続関数を g とすると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(f(x, t)) dt = \int g d\mu$$

これは flow の場合であり, diffeo. の場合は, 積分が 和になる。

Axiom A の basic sets の 1 つ Λ が アトラクターであり, しかも E_x^u の次元が 0 でないとき, 軌道は Λ 内で複雑な振舞をする。これが ストレンジ・アトラクター (以下 S.A. と略す) の 1 つの例である。

Axiom A カ学系の例として Smale の horseshoe⁹⁾ がある。図 1。

但しこの場合には, 非遊走集合は, 2 つの
コントロール集合の直積と, 1 つの平衡点から
なり 前者は, アトラクターではない。

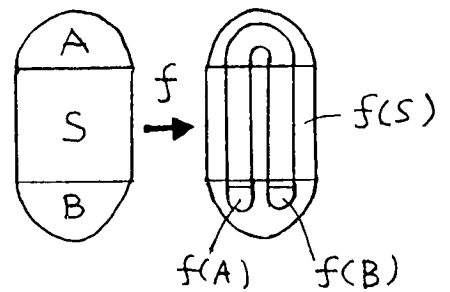


図 1

S.A. を持つ Axiom A カ学系の例としては, Solenoid がある。

これは 図 2 のように 2次元 solid torus
を 軸方向に縮め 円周方向に約 2倍
に引き伸ばして 180° ひねり, 半分に
折, 2 もとの solid torus 内に埋め込む
写像である。この写像の非遊走集合は

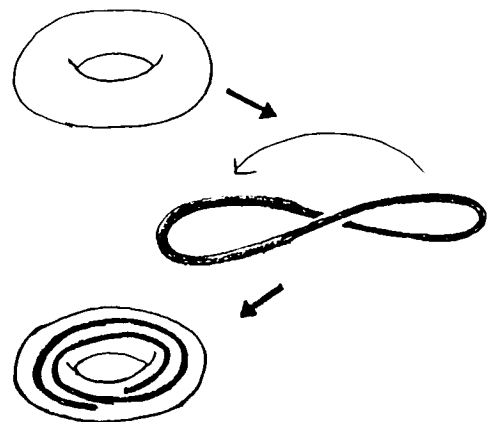


図 2

アトラクターであり (1次元集合) \times (コントロール集合) となる。

一般の力学系の場合には、S.A. の数学的に厳密な定義は、まだない。この論文では 平衡点でも、周期解でも、概周期解でもない

アトラクターを、S.A. とよぶ。その判定基準は、第1 Lyapunov 数¹⁰⁾

が正 (即ち、接ベクトルが長時間平均として exponential で伸びる、

つまり平均としての双曲的構造をもつという事) になることである。

Axiom A²⁾ ない S.A. の例としては、ローレンツ²⁾ アトラクターが最も有名で

ある。いわゆるローレンツモデルは 大気の運動を記述するため、もとの

偏微分方程式 (Navier-Stokes 方程式 + 熱伝導方程式 (Bénard

問題)) で、速度場と温度場を Fourier 級数に展開して、3つの

モードのみをひき、得られた微分方程式 (0.3) である。

$$\frac{d}{dt} x = -\sigma(x - y)$$

$$\frac{d}{dt} y = rx - y - xz \quad (0.3)$$

$$\frac{d}{dt} z = xy - bz$$

ここで、 σ, b, r はパラメータで r は Rayleigh 数に相当する。

Lorenz は、 $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ のところで数値計算を行ない、安定な

非周期的解を見出した。図3。このアトラクターは、原点をサドルとして
 含んでおり Axiom A アトラクター ではない。アトラクター上の軌道が

$z=r-1$ なる平面を

上向きに横切る点

をプロットすると、

図4のような概略

する本の曲線が得ら

れるが、実はこれは

非可算無限個の

曲線を束ねたものとなっており

カントールの構造を持っている。

このような構造は Solenoide

でもみられたが、又、ローレンツ

アトラクターを更にモデル化

11)

した Hénon マップ (0.4) (2次

元 diffeo.) の S. A (これも

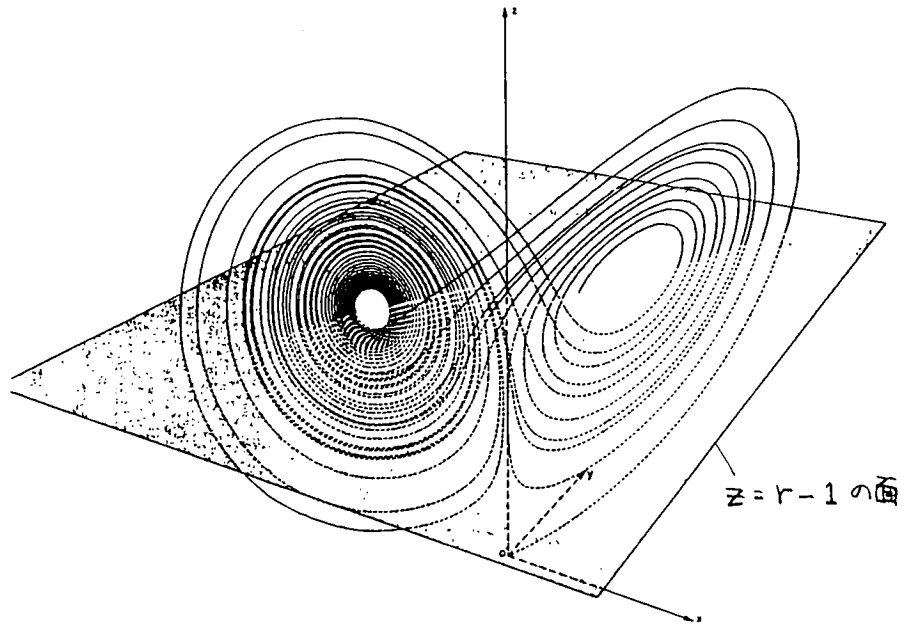


図3

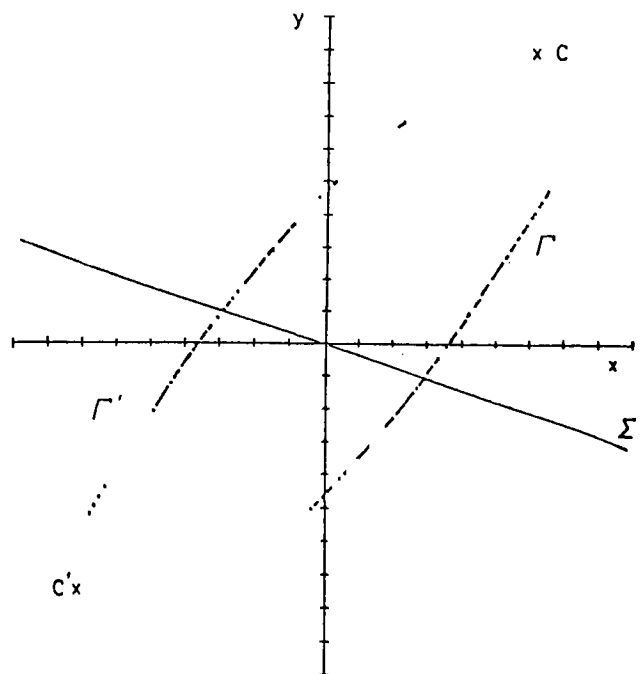


図4

Axiom A アトトラクターではない)にもみられ(図5)、散逸力学系のS.A.に共通の性質である

つまり、アトトラクターが双曲的構造を持つため、任意の体積素片はある方向には縮み、別の方向には伸びるが、軌道が最終的には有限領域内に閉じこめられるため、やがて『折りたたみ』が生ずる。

この機構がカントールの構造を作り出す。この

カントールの構造のため、S.A.の Hausdorff 次元 D_H は整数とはならない。ローレンツ・アトトラクターの場合は、 $D_H \approx 2.05$ と評価される。¹²⁾
¹³⁾
 この場合は、縮み方が激しいためカントールの構造は殆んどみ

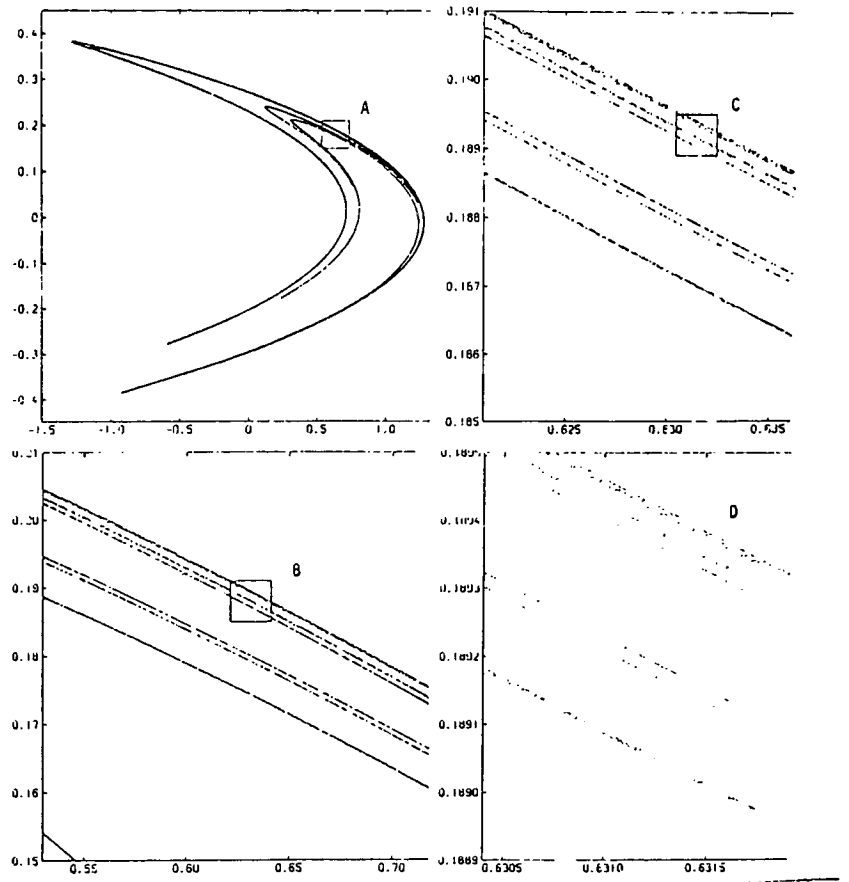


図5 横軸 x_n , 縦軸 y_n

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad (0.4)$$

Hénon アトトラクター $a=1.4, b=0.3$
 $B: A \times 15$ (倍率), $C: B \times 10$, $D: C \times 10$

ことが「アキオ」 D_H も2に近い。従って、更に1次元写像によりよく近似
される。連続する、座標の最大値 (M_n, M_{n+1}) をグラフに書くと
(ローレンツ・プロット), 図6の如く殆んど

曲線上にのりことがわかる。これは、
とりもなおさず、運動の決定論的
性格をあらわしている。

カオスのもう1つの特徴は、

ホモクリニック構造¹⁾である。

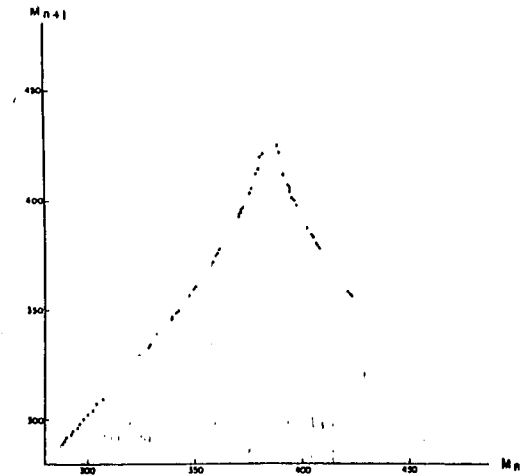


図6
ローレンツ・プロット

サドル的周期点の安定多様体と不安定多様体が出会う点を

homoclinic point^{*}と呼ぶ。特に、横断的に交わる場合を

transversal homoclinic pointと呼ぶ、この場合はhorseshoe的

構造の存在が示せ、horseshoeなら、任意に長い周期の存在等が

証明できる。Hénon アトラクター等はサドルの不安定多様体の閉包と

考えられている。

*1) 1個存在すれば無限個存在する。

0-2. カオスへのルート

カオスへのルートとしては、以下の3つを挙げることができる。

- 1) 2^n 分岐の集積
- 2) Intermittency
- 3) トーラス \rightarrow カオス

これらについて簡単に説明する。

1) は M. J. Feigenbaum¹⁴⁾ の発見によるものである。彼は適当な条件を満足する1次元写像 $x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = \lambda g(x_n)$ においてパラメータ λ の値を変化させることにより、1つの周期解が不安定化して、新たに周期が2倍の周期解が生成され、それが更に不安定化して、その2倍の周期の周期解が生成され、... という現象 — 2^n 分岐 — を見出した。

そして、繰り込み群の手法を用いて理論的解析を行なうと、 2^k 周期解

が最も安定になるパラメータを λ_k とするとき、
$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k+1}} = 4.669 \dots$$
 *

となることを説明した。彼の議論は写像 $f^{2^{k-1}}(x, \lambda_k)$ と $f^{2^k}(x, \lambda_{k+1})$

の $x = \bar{x}$ のまわりでの漸近的相似則、即ち適当に scale した関数

*) 頂点のベキ 2 が 2 の場合。

が $k \rightarrow \infty$ で universal function に収束すること、^{*}を仮定するが、これは
数学的には未だ証明されていない。Logistic モデル $x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$
を例にとると、 $x = \frac{1}{2}$ で関数値は最大になるが (critical point
 $x = \frac{1}{2}$)、 2^k 周期解の安定領域で、 $f^{2^k}(\frac{1}{2}, \lambda)$ が λ の単調関数である
ことが証明されていないため、無限に分岐が続くかどうかは明らかで
ない。^{**} Feigenbaum は 1次元写像を扱ったが、高次元系の場合も、ある
条件のもとで、1次元の場合の δ の存在を仮定して、同じ結論になること
が示されている。¹⁶⁾ 更に 10¹⁷- スペクトルについての議論や 10¹⁷ x-ター
依存性を含めた理論もある。¹⁸⁾ 又、実験的には振動磁場中の
微小磁石や種々の流体で δ の測定がなされている。¹⁹⁾ 2^n 分岐の
集積後はカオスになると期待されるが証明は未だない。²⁰⁾

以上は、散逸系の場合であったが保存系の場合に同様な現象
が存在し、 $\delta_c \approx 8.721$ なる値が得られている。²¹⁾

* スケール因子 α としては、 $z=2$ の場合 $\alpha = -2.502 \dots$ なる値が得られている。

** $f(x) = 1 - a|x|^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon \ll 1$) については証明がある。¹⁵⁾

2) は Manneville と Pomeau ²²⁾ による議論された。これは層流状態の後に burst が不規則に生ずる現象で、これについても繰り込み群によるアプローチがなされている。²³⁾ 第1章でこの現象に関連した議論を行なう。

3) には、無限回の分岐を経てカオスに至るという立場と、有限回の分岐でよいとする立場がある。Landou, Hopf ²⁴⁾ は層流から乱流への遷移過程を次のように考えた。即ち、次々に Hopf 分岐が生ずることにより多重周期運動が生成され、system の自由度がパラメータの変化とともに増大していく。そして、遂に自由度が無限に行き、極限の状態が乱流状態であるとするのである。これに対して、Ruelle と Takens ²⁵⁾ は Hopf 分岐が3度おこれば、乱流状態が可能であると主張した。正確に述べれば、3次元トーラス T^3 上の constant flow は、その任意の C^2 -近傍に、Axiom A を満たして、S.A. を持つベクトル場が存在するということを証明したのである。しかしながら、このことは必ずしも T^3 上の概周期運動 (以下 Q.P.M. (Quasi Periodic Motion) と略す) が摂動に対して、安定ではないということの意味するのではなく、

C^2 位相で、3-dim. Q.P.M.の近くに スレンジ Axiom A フォクターがある
 事を言ただけであり、関数空間の中で S.A. を示すバクトル場がどれ
 ほどの広がりを持つているのかは明らかでない。実際、安定性は、関数
 空間への位相の入れ方に依存しており、²⁶⁾ A Itô によつて、 $\epsilon f (f \in C^\infty)$
 の形の摂動が ^{*} k 次元トラス上の constant flow に C^{k+1} 位相で近
 ければ、これに対しては、 k -dim. Q.P.M. は安定であるという結果が
 得られている。この問題に対しては未だ最終的結論は得られて
 いないようである。実験的に安定な 3-dim. Q.P.M. を見出したという報告
 は ²⁷⁾ ある。又、常微分方程式や偏微分方程式の数値計算においても
 見出されている。二次元写像では、1個のパラメーターを変化させて、トラス
 の分岐を追いかけていくと、実に複雑な分岐を行ない、又、微細構造
 が多様であるが、パラメーターを2つに増やして分岐を考えると、統一的理解
 が得られるという報告がある。²⁹⁾

保存系、特に Hamilton 系の場合は系の完全可積分性と関連して
 多くの研究が行われている。完全可積分な系に小さな摂動を加えると、

*) このような形の摂動が物理的にはもっともらしいとの理由で、彼は
 この形を採用している。

30)

K.A.M.の定理によつて、無理数の winding number w のトーラスは、摂動が

小さいときは、その殆んどが壊れずに残るが、^{**)} Poincaré - Birkhoffの定理

によつて、 w が有理数のトーラスは、resonance をおこして壊れ、elliptic な

周期点と、hyperbolic な周期点の2つになつてしまふ。³¹⁾ この両者をつなぐ

細かい層 (stochastic layer) では、stochastic な振舞がみられる。³²⁾

これは、homoclinic point の生成に帰因する。摂動を大きくしていくと、

壊れるトーラスが増え、又 stochastic layer の領域も大きくなっていき、

全空間に stochastic な領域が広がっていく。^{***)} 自由度 2 の Hamilton

*) 自由度 f の完全可積分系は、action I , angle θ で記述でき、その

解は、 $I_i = I_i^0$, $\theta_i = \omega_i t + \theta_i^0$ ($i=1, 2, \dots, f$) となる。軌道は、 $\{I_i^0, \dots, I_f^0\} \times T^f$

上を運動するので、これをトーラスと呼ぶ (f 次元)。

***) K.A.M. トーラス と呼ぶ。

***) 勿論、局所的には、elliptic な周期点や、hyperbolic な周期点か

が存在し、elliptic な点のまわりには、トーラスがある。更に、そのトーラスの

まわりには、elliptic, hyperbolic point が存在し... という、階層構造

になっている。

系では K.A.M. トーラスは空間を分割していろど、単一の軌道が全空間に
 広がっていきけるためには、全2の K.A.M. トーラスが壊れぬほじない。最後に壊
 れる K.A.M. トーラスを特徴づける試みか、^{*} Greene, Kodanoff, Shenker に
 よってなされ、 w が黄金比の逆数 ($w = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) の K.A.M. トーラスか、
 Last K.A.M. であるという conjecture のもとに、系入り込み群によるアプローチ
 がなされた。³³⁾ winding number を一定に保つという手法は 散逸系のトーラスの
 研究にも適用された。^{34), **)}

以上の他に、S.A. 内の不安定平衡点 (或いは、不安定周期解) の不安定多
 様体か、別の安定な解の basin に触れて (ヘテロクリニック交差)、S.A. が
 消失する現象、³⁵⁾ いわゆる crisis の逆プロセスも、カオスへの1つのルートと
 みるこじかできよう。

* 自由度 3 以上の系 (或いは、Hamiltonian が時間上に依存する自由度 2 の系)
 では、K.A.M. トーラスが存在してても、stochastic layer をつたて、
 任意の stochastic region まで移動できる軌道が存在する。

** 但し、 w を一定に保つという方法での解析は、分岐現象を扱っていろ
 のではじない。

0-3. 物理系におけるカオス

物理学の分野におけるカオスの研究は、Commensurate-Incommensurate 転移 (以下 Comm. Incomm. 転移と略す), Localization, 光乱流, 乱流等の問題と関連になされている。又、古典力学におけるカオスと量子系での現象との対応, 或いは、カオス軌道の量子化等の問題も議論されている。ここでは、これらについてのごく簡単な説明を行う。

Comm.-Incomm. 転移の問題では、例えば、1次元周期ポテンシャル中で^{36),*)} 相互作用する原子系を扱う (対応する物理現象は、例えば、結晶表面へのガスの吸着)。T=0 では、エネルギーが極値にありという条件より、連続する3つの原子の位置についての関係式が導かれ、これより2次元写像が構成される。ポテンシャルの深さと相互作用の強さの兼ねあいで、原子の安定な配置が変化し、ポテンシャルの周期 a に対して、原子の平均距離 l が有理比の場合 (Comm.) と無理比の場合 (Incomm.)

*) 例えば $H = \sum_i \left[\frac{1}{2} (u_{i+1} - u_i)^2 + \lambda V(u_i) \right]$, u_i は i 番目の原子の位置。

とで解の性質は大きく変化する。^{*} Comm. phase は周期解に、Incomm. phase は概周期解に対応している。又、準安定状態としてカオス相も存在する。他にも、

ANNNI Model (³⁷⁾ Axial (Anisotropic) Next Nearest Neighbor Ising Model)

において、平均場近似、低温展開の手法を用いて、種々の相図が得られて

いる。^{**} 又、hierarchical Ising Model において、frustration を強くして

いくと、糸染り込み群の方程式（糸染り込み操作の前後の結合定数を

結びつけた式、1次元写像）の解がカオティックになり、これがスピングラス

相に対応するという議論もある。³⁸⁾ Localizationの問題では、kicked

rotatorの量子力学系と、1次元 random Lattice 中の伝導電子とを

関連づけた話や、³⁹⁾ Incomm. potential 中の電子の運動を2次元写像で

* Comm. の場合には、エネルギーギャップが存在するが、Incomm. の場合

には、並進に対する対称性があり（ゴールドストーンモード）、ギャップは存在しない。

** 横軸にパラメーター、縦軸に波数をとったときのグラフは、モテールによらず、

たださかにはる場合、Comm. phase のみが無限個存在する devil's

staircase を形成する場合等がある。実験的には、CeSb において、

1つの Comm. phase が観測されている。

記述する話がある。更に、光学系の乱流に関して、ring cavity 内の非線形媒質中を通過する光(レーザー)の従う遅延微分方程式が、様々な周期解、カオスを生み出し、それらの間に多様な遷移現象の存在することが見出されている。⁴¹⁾ 乱流に関しては、前節で述べたカオスへのルートと関連して多くの研究がある。^{20), 27)} 又、宇宙論においても Einstein 方程式の1つの解 'Mixmaster' 宇宙のダイナミクスが、1次元写像でかけ^{*}、その解がカオティックになり、その不変測度や K -エントロピー (正になる) が厳密に求まり、系がエルゴード的であることが示されている。⁴²⁾ 古典系と量子系との関連、量子系におけるカオスの問題では

1) Hamiltonian が時間に依存する場合の dynamics

2) 定常な場合のエネルギー・スペクトルと波動関数

について研究されている。^{43), **)} 1) では、あるパラメーター λ があって、

量子的な場合 ($\lambda > 1$) と古典力学がある時間までよい場合 ($\lambda < 1$) に

*) $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $T(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$, $x \neq 0$, $T(0) = 0$, $[]$ は Gauss の記号。

**) 古典的には、 K -系 (ストカスティックな振舞を示す) であるような系の量子力学

系 (このような系を ⁴³⁾ では, quantal K -system と呼んでいる) を扱う。

分けることができた。よって1の場合、 $t_0 < t_1$ の場合、 t_0 で決まる時刻 t_0 があって、 $t_0 > t_1$ なる波束
 の量子力学的平均値の時間発展と、古典力学に従う運動とは、少ししか異ならない。
 $t_0 < t_1$ で、波束は大きく広がるが、場をなめらかにして、'平均場'を考えれば、
 $t_0 < t_1$ でも、平均値の従う方程式は、古典力学のものと同じで違わない。しかし、
 量子効果が蓄積して、ある時刻で、以上になると ($t_0 < t_1$)、古典力学との対応は
 つかなくなる。2) の場合は、 k -系に由来する randomness からエネルギー・スペ
 クトルの分布密度や波動関数の振舞いに影^響を及ぼし、複雑にするという
 議論がなされている。実験事実としては、原子核のスペクトルや、分子振動のスペ
 クトル等がある。しかしながら、量子系で本当にカオスがあるかという
 問題は、未だ未解決である^{**)}。

*) 従って、ストカスティックに振舞う。

⁴⁴⁾
 **) Hogg and Huberman は、Hamiltonian H_0 が離散散乱固有値を持つ。
 それに付加される周期ポテンシャル $V(V(t) = V(t+T))$ が共鳴的でなく、
 $\|V\|$ が有限であるならば、波動関数とエネルギーの期待値が概周期的
 であることを示した。しかし、古典的には、小さな振動でもカオスが生ずるのは、
 共鳴が生ずる場合なので、定理の前提をはずすと、異なる結論になる
 可能性がある。

0-4. 本研究の目的

前節まではカオス研究の一端について大まかに説明してきたが、この節では本研究の目的について述べる。

第1章での議論は、S.A.の周期外力への応答の問題に関連する。この種の問題では、ローレンツ・アトラクターにノイズを加えて相関関数の計算を行なった研究⁴⁵⁾や1次元写像でノイズを加え、2^{分岐及び}⁴⁶⁾ Intermittencyへの影響²³⁾を調べた研究、ノイズを含めたスケール則の議論^{47), 23)}、更に1次元写像に周期外力を加えた研究⁴⁸⁾等がある。第1章ではローレンツ・モデルに sinusoidal な外力を対称性を破らなように加えた系(0.5) (強制ローレンツ・モデル)

$$\frac{d}{dt}x = -\sigma(x-y)$$

$$\frac{d}{dt}y = rx - y - xz$$

(0.5)

$$\frac{d}{dt}z = xy - bz + A \cos Bt$$

を扱う。但しパラメータは、 $\sigma=10$, $b=2.6667$, $r=28$ である。この系で以前、

A, B を大きくかえて相関を描き、種々の量の計算を行なったが、⁵⁰⁾

*) 1次元写像のダイナミクスの観測可能性への外部ノイズの役割を

論じた研究もある。⁴⁹⁾

ここでは、相図の特徴的な領域に焦点をあわせて、分岐現象の詳細を明らかにし、カオスへのいくつかのルートについて議論する。

第2章では3次元常微分方程式の解の位相的性質について議論する。力学系でのトポロジーの問題は、Birman⁵⁰⁾によつて、ローレンツ・アトラクター内の新しい結び目(ローレンツ・ノット)を持つ周期解についての研究がある。この章では周期解やS.A.を位相的に特徴付ける諸量を定義し、解の分岐とトポロジーの変化について考察する。これは従来の、metrical, measure theoretical な議論とは別に、カオティックな軌道の3次元空間への埋め込みの複雑さ、即ち topological な複雑さを記述する1つの言式みである。

尚、第1章全部及び第2章の第4節までの内容は既に論として⁵²⁾発表された。

第1章 カオスへのルート 25

(強制ローレンツモデルを例にとり)

1-0. モデルと相図

この節では、モデルの説明と、相図から得られる知見について概観する。

強制ローレンツモデル (1.1) は、ローレンツモデル (1.1) の強制外力 = 0 と

同様に $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ なる変換に対して不変であり、z軸は、

不変集合にとりこいる。^{*}

$$\frac{d}{dt}x = -\sigma(x-y)$$

$$\frac{d}{dt}y = rx - y - xz \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}z = xy - bz + A \cos Bt$$

$$\sigma = 10, \quad b = 2.6667, \quad r = 28$$

図 7.8 は、(A, B) 空間での相図であり、安定なカオス相とリミットサイクル相 (以下

各々 C 相, L 相 と略す) が複雑に分布している。これからわかるように、

S.A. は 1/r とともに (1.1) のような振動の入り方に対しては安定であり、A ~ 20

^{*} z 軸上の周期解 $(0, 0, \frac{A}{\sqrt{b^2+B^2}} \cos(Bt - \phi)) \equiv (0, 0, z_0(t), (t_0, \phi - \frac{\pi}{B}))$ は、

不安定な stroboscopic mapping M^0 (ストロボマップと略す) のサドル点に

とりこいる。但し M^0 は、 $\vec{x}(t)$ を (1.1) の解とするとき、 $\vec{x}(t_0) \in \vec{x}(t_0 + T_F)$ に写す

写像、(T_F は外力の周期、 $T_F = \frac{2\pi}{B}$)。又 $z = z - z_0(t)$ とおくと (x, y, z)

を変数とし、r の代わりに $r(t) = r - z_0(t)$ とし、A = 0 としたローレンツモデルになる。

で始めてL相が出現する。又、リミット

サイクルにはいろいろなタイプがあり(図8)。

それは、1. 周期性、2. 対称性、3. 位相的性質、

によって分類される。又、S.A.は、1. 対称性、

2. 位相的性質によって分類される。更に

Poincaré sectionを適当にとると、図9

のように、 $x > 0, y > 0$ の領域R

と $x < 0, y < 0$ の領域Lを周

期的に訪れる場合 (type α) と

そのような周期性がない場合

(type β , 図10) とがある。これは、

2次元上の不安定リミット・サイクル

の関与する現象である。

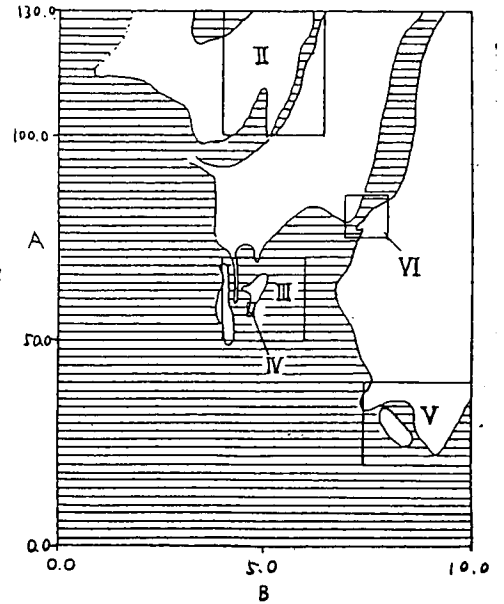


図7. 白い部分がL相
(この図自体がI)

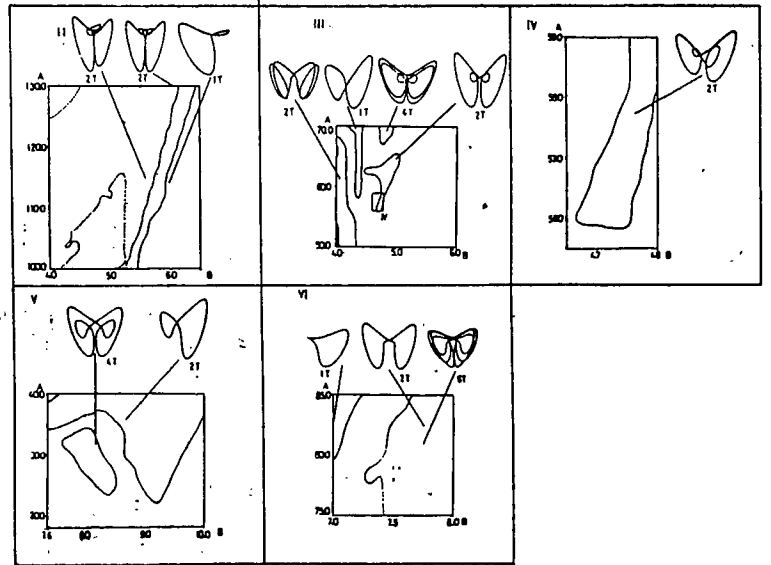


図8 図7における領域II~VIの拡大図

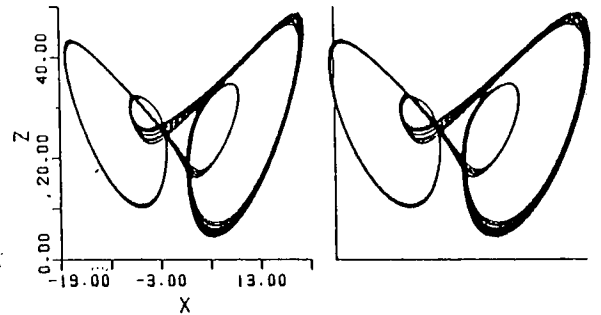
*) 島カオスに対応。

**) type α は type β より ストカスティシティの度合は小さいと考えることができ、

それは、LとRの記号列のエントロピーによって評価できる。

相図から得られる知見としては、

① カオス領域は「つばが」² 118 のように
みえる。



② 非対称リミット サイクルとそれが

融合してできた対称リミット・サイクル
の中間領域にカオスがある。

図 9. Stereoscopic Portrait

$A=56.1, B=4.67$

③ 異なるタイプのリミット・サイクルの共存は
あるが、カオスとリミット・サイクルの共存は
ない。^{*}

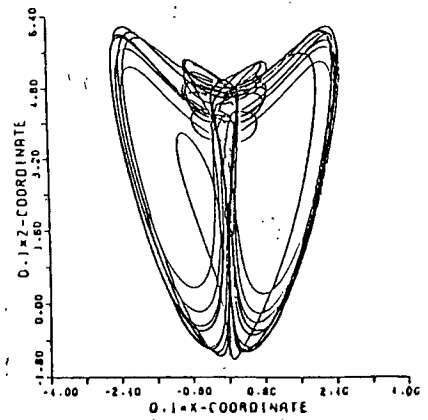


図 10 $A=120.0, B=6.0$

の3つが挙げられる。これらの特徴は、一般的形式かどうかは定かではない。

53)

①については、カオス領域が孤立している系があり、③についてもローレンツ・モデル²

54)

固定点とカオスの共存する領域がある。②もカオスならず必ずそうなるという

わけではない。②の例を図11, 12に示す。リミット・サイクルやカオスの種々の

*この章全体を通じて、リミット・サイクル、カオスは、特にことわらない限り、全て

アトラクターである。ここで共存とは、2つ以上のアトラクターが、同じ11°3x-ターで、

同時に存在することをいう。

遷移現象は、対称性の見地からまとめると

図13のようになる。^{*} (1)は、ピッチフォーク

分岐 (Symmetry breaking), (2)は2ⁿ分岐,

(3)はホモクリニック交差による Intermittency,

(4)はヘテロクリニック交差による Intermittency,

(5)は basin の接触 (或はヘテロクリニック

交差とみられる) である。(6)は、ストロホフ

マップ^oでの Hausdorff 次元 D_H が、 $1 < D_H < 2$

から $2 < D_H < 3$ へ遷移する現象で

ある ($A \approx 61, B = 6$)。③については、

例えば $A = 131.0, B = 6.5$ で、

図14の2つのリミット・サイクルが

共存している。但し共存の生ず

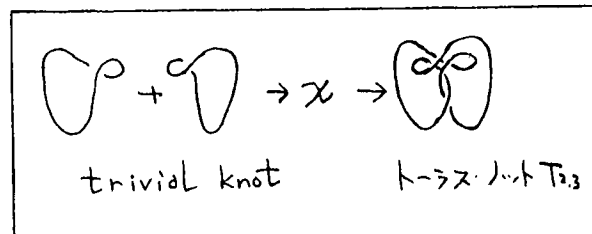


図11. 領域II. π はカオス。

(trividal knot, ト→ス・リンクについては) 2-0 参照。

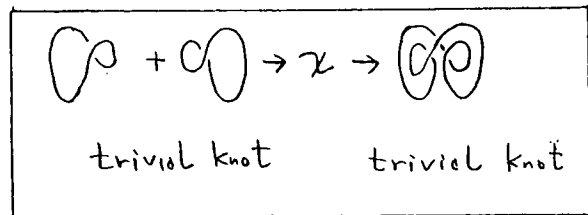


図12. 領域V

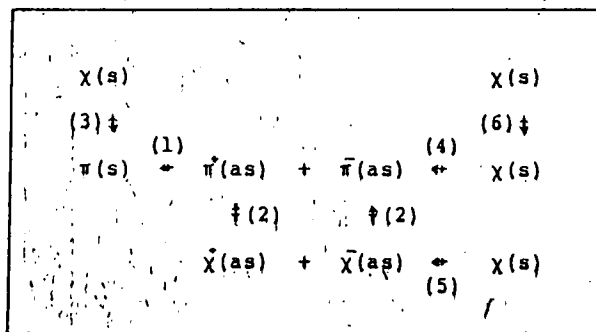


図13. π は周期解を意味する。
 s: symmetric, as; asymmetric

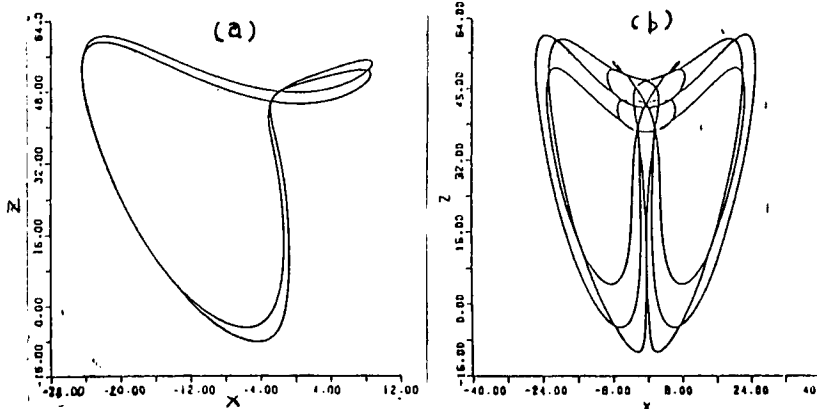


図14. (a): 2周期解, (b): 6周期解

* 強制ローレンツモデルで生じている現象である。他のXカニズムも当然

考えられよう。例えば (2)は Intermittency でも可能であり、 $\pi \leftrightarrow \pi$

は, crisis でも可能。

るパラメータ領域は、極めて小さい。又、これらのリミット・サイクルの basin は、3次元空間内に複雑に分布している。^{*} 図11や図12、それに第2章で述べるオリジナルローレンツモデル(ローレンツモデルを強制系A区別して、以下このようによら)でのあるパラメータ領域における分岐は、(1) \rightarrow (2) \rightarrow (5) \leftarrow (3) のルートをとる。

次節では、領域IIでの上記のルート及び領域IVでの(4)の遷移について詳細に調べる。

* 非自律系であるため、初期時刻 $t=0$ における basin を問題にする。

1-1. カオスへのルート

α. 非対称・リミットサイクル → 2ⁿ分岐 → 非対称カオス → バンド マージング →

→ 対称カオス , A_{c2} = 116.43, B = 6.0 (固定), 図 7.8 の II の領域。

パラメータ A を 114.9 から上げてゆくと, 周期 1 (単位 T_F) の非対称リミット

サイクルから, 倍周期分岐が順次生じる。(64周期まで観測)。表 1. 図 15.

2^k周期領域でのストロボマップ (M⁰)^{2^k} の微分 d(M⁰)^{2^k} の固有値は, 数値

計算より, 近似的に次のようにかける。図 16.

$$\lambda_{1,2}^{(k)} = C^{(k)} \pm \sqrt{\{C^{(k)}\}^2 + B^{(k)}} \quad (|\lambda_1^{(k)}| \geq |\lambda_2^{(k)}| \geq |\lambda_3^{(k)}|)$$

(1.2)

$$C^{(k)} = -\sqrt{a^{(k)}} (A - A_c^{(k)})$$

2 ^k	2	4	8	16	32	64
A ^(k)	114.957	116.187	116.37	116.412	116.4199	116.42145

表 1. 2^k 周期解の onset point

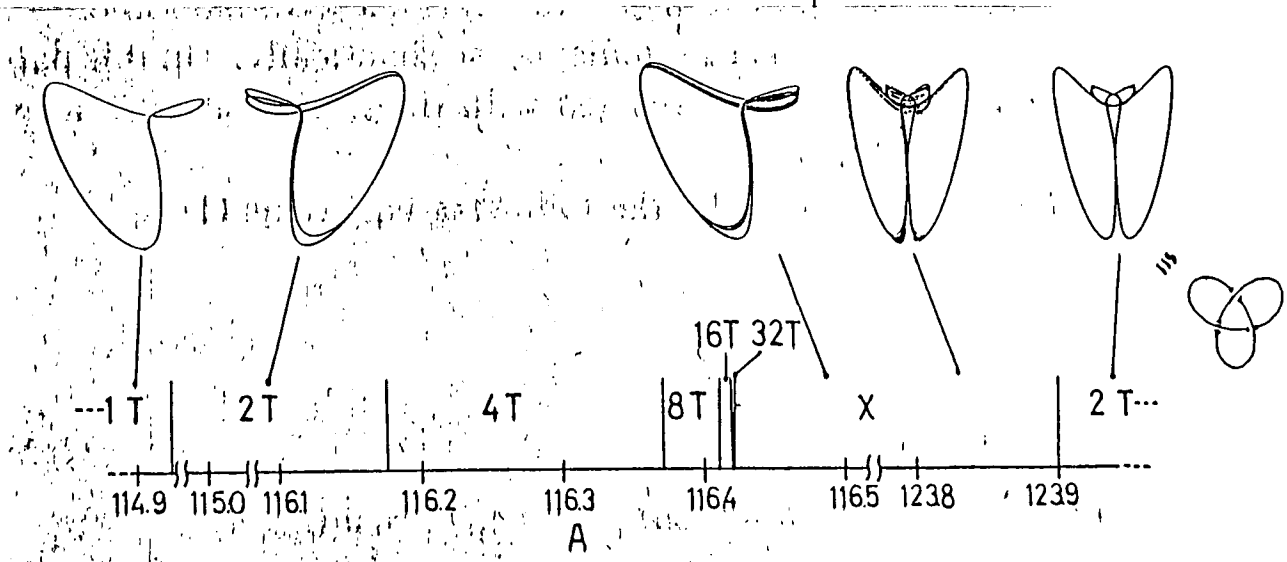


図 15

但し第3番目の固有値 $\lambda_3^{(k)}$ は、非常に小さい値になる。(後で議論する)。

$A_c^{(k)}, a^{(k)}, B^{(k)}$ の値

は表2のように

なる。

これは、Henon

マ、 $\Gamma^0(1,3)$ の

原点での安定性

と、パラメータ表！

存在が同じで

ある。

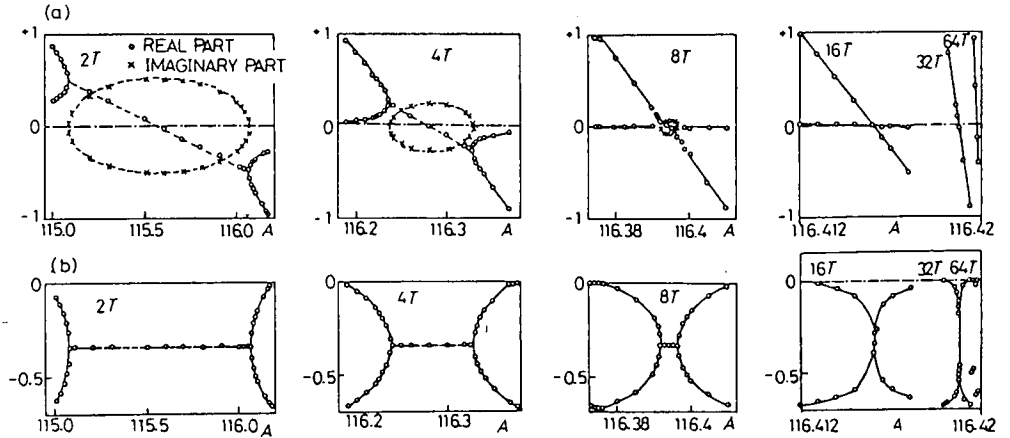


図16 2^k 周期領域 ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$) の (a) 固有値 $\lambda_{1,2}^{(k)}$ と (b) Lyapunov 数 $L(1), L(2)$ のパラメータ依存性。(但し図は、 $T_F L(i)$)

	$a^{(k)}$	$B^{(k)}$	$A_c^{(k)}$	$B^{(k)}/(B^{(k-1)})^2$	$(B^{(k)})^{1/2^k}$
$k=1$	1.036944	0.2524271	115.5722	1.067018	0.502422
2	31.68720	0.0679898	116.2820	0.980328	0.510635
3	757.3501	0.0045317	116.3943	1.004884	0.509368
4	16251.12	$2.0636 \cdot 10^{-5}$	116.4160	***	0.509523

表2. adjustable parameter $a^{(k)}, B^{(k)}, A_c^{(k)}$ と、比 $B^{(k)}/(B^{(k-1)})^2$ 及び $B^{(k)}$ の評価 $(B^{(k)})^{1/2^k}$ の値。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -By_n + 2Cx_n + 2x_n^2 \\ x_n \end{pmatrix} \equiv G_{B,C}(x_n, y_n) \quad (13)$$

Henon マ、 Γ^0 と、 $C \in \frac{1+B}{2}$ から下げると、原点から順次 2^n 分岐を生じる

* $L(i)$ は、 i 番目の Lyapunov 数で、 2^k 周期領域では、 $L(i) = \frac{1}{T^{(k)}} \ln |\lambda_i^{(k)}|$,

但し、 $T^{(k)} = 2^k T_F$ 。又最大の2次元 Lyapunov 数 L_2 , 3次元 Lyapunov 数

を L_v とかくと、 $L_2 = L(1) + L(2)$, $L_v = L(1) + L(2) + L(3) = -(0+b+1) = \text{一定}$ となる。

が、2周期解が分岐したとき、そのまわりでの2階写像は、変数及び係数を線り込むことによつて、近似的にもとと同じ形になる。¹⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= G_{B,C'}(x'_n, y'_n) \\ x'_n &= \alpha(x_{2n} - x^*), \quad y'_n = \alpha(y_{2n} - y^*), \quad \alpha: \text{scaling factor.} \\ (x^*, y^*) &: \text{2周期点.} \end{aligned} \right\} (1.4)$$

$$\begin{pmatrix} B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2 \\ -2C^2 + 2C(1+B)C + 2B^2 + 3B + 2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$G_{B,C}$ の1周期解の固有値は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } \lambda_{\pm} &= C \pm \sqrt{C^2 - B} \quad \lambda_{\pm}: \text{real}, \quad C^2 \geq B \\ L(1) &= \ln|\lambda+1|, \quad L(2) = \ln|\lambda-1| \\ \text{ii) } \lambda_{\pm} &= C \pm i\sqrt{B-C^2} \quad \lambda_{\pm}: \text{complex}, \quad C^2 < B \\ L(1) &= L(2) = \frac{1}{2} \ln|\lambda+1| = \frac{1}{2} \ln|B| \end{aligned} \right\} (1.6)$$

(1.2)と(1.6)は同じ10>x-タ-依存性を示している。又、(1.5)より $\frac{B'}{B^2} = 1$ 、表2

のテ-タ $\frac{B^{(k)}}{(B^{(k-1)})^2}$ もほとんど1。従つて、この2分岐の領域で、強制ロ-レ-ツ系

は、Henon マ-フ-で近似できることがわかる。これは、次のようにして、理解できる。

まず、次の命題が証明できる。(付録 A)。

「散逸率^{*}一定 ($\neq 0$) の 2次元写像は、固定点のまわりの 2次のオーダーの非線形項までを考えると、変数変換により、2 Hénon マップに帰着できる。」

さて、考えている領域^{*}で、第 3 Lyapunov 数 $L(3)$ は、第 1, 第 2 Lyapunov 数 $L(1), L(2)$ に比べて非常に小さく、しかもほぼ一定なので、ストロボ マップを考えたとき、軌道は 2次元 slow manifold に急速に近づき、その上では、 $L_s = L(1) + L(2) = L_v - L(3) \approx \text{一定}$ となる。従って散逸率は、ほぼ一定だと考えられ、上述の命題により、slow manifold 上の写像を Hénon マップで近似できることがわかる。^{**} 表 1 のデータより散逸率 $B \sim (B^{(k)})^{\frac{1}{2k}} \sim 0.51$ となる。Hénon マップでは、 2^k 周期解の安定領域での複素固有値の領域の占める割合 $\Delta^{(k)}$ は近似的に次のようになる。図 17。

* 一般に n 次元写像 $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$ において、 \vec{x} における微小体積 $dV(\vec{x})$ は、 \vec{f} が作用させることにより、 $dV' = \left| \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right| dV(\vec{x})$ となる。 $\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|$ は、Jacobi の行列式。この $\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|$ のことを、点 \vec{x} での散逸率と呼ぶ。

** 3次の項まで入れると、Hénon マップにはならないが、分岐がすすめば、2次の係数が 0 にならない限り、3次以上の項は無視できる。

$$\Delta^{(k)} \cong \frac{2\sqrt{B^{(k)}}}{1+B^{(k)}} \quad (1.7)$$

$B^{(k)} = 1$ のとき $\Delta^{(k)} = 1$ であり, $\Delta^{(k)}$ は 2次元系の

目安となる。iteration を繰り返していくとき、

$\Delta^{(k)} \rightarrow 0$ とするが 近似的に 1次元的になる

(Feigenbaum 理論が適用可能になる) iteration $\times 17. C_0^{(k)} = \frac{1+B^{(k)}}{2}, C_1^{(k)} = -\frac{1+B^{(k)}}{2}$

$$D_0^{(k)} = \sqrt{B^{(k)}}, E_0^{(k)} = -\sqrt{B^{(k)}}$$

の回数 n_c は, $n_c \propto \frac{1}{\ln B}$ の依存性を持つ。

表 3 に Feigenbaum 定数

δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
6.44 ± 0.77	5.123 ± 0.420	4.740 ± 0.132	4.715 ± 0.552

δ の評価値を示す。

表 3. $\delta_n = \left\langle \frac{A_n^{(10)} - A_{n-1}^{(10)}}{A_{n+1}^{(10)} - A_n^{(10)}} \right\rangle$; $\langle \rangle$ は いくつかの
評価法による平均。

パラメータ A の値が $A_c = 116.43$ 以上になると、島カオスが観測され、バンド

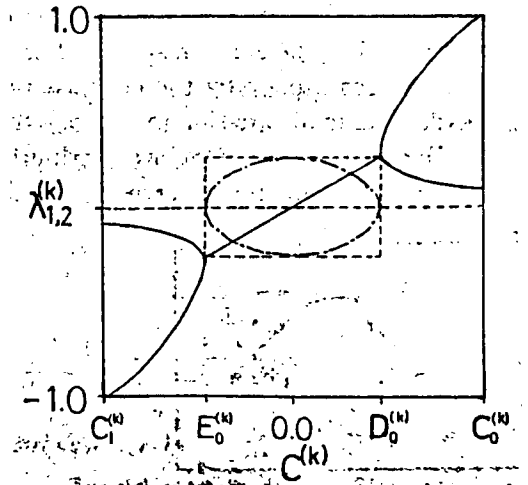
マージングが生じ、 $A \sim 116.49$ で 2つの非対称な島カオスが結合して、1つの

対称カオスになる。このプロセスには z 軸上にある不安定リミット・サイクルが

関与していると考えられる。以下「ストロホ」マップ M^0 での現象を考察する。

z 軸上の不安定リミット・サイクルは、 M^0 のサドルであり $(0, 0, \frac{Ab}{b^2+B^2})$ の点にある。

この点での dM^0 の固有値は、 $\lambda_1 \sim 10^6, \lambda_2 \sim 10^{-2}, \lambda_3 \sim 10^{-10}$ であり、固有方向



\vec{e}_1, \vec{e}_2 は (x, y) 成分のみを持つ, \vec{e}_3 は z 成分のみを持つ。*1) 図 18。

サドルの安定多様体 W^s は 2つの非対称 S.A.

を分離しているが, ^{**1)} A の増加とともに アトラクターと

W^s の距離が次第に小さくなり, ついに接触する

ことにより, 2つのアトラクターの合体がおこると考える

ことができる。(対称性より接触は, 同時に起こる。)

すなわち, サドルも S.A. の一部分となる。図 19。

標語的に言えば, 「サドルの安定多様体と

不安定多様体の交差, つまりホモクリニック

交差の発生により, 2つの非対称な S.A.

が合体する」。^{**2)} 対称な S.A. において, 以前

の非対称 S.A. の一つに対応する状態から, もう一方の

状態への遷移が生ずるのは, z 軸付近の領域

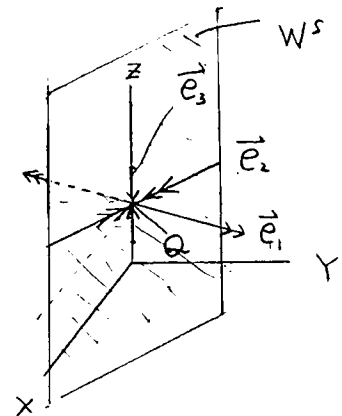


図 18 Q: サドル

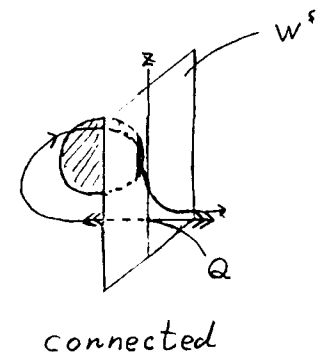
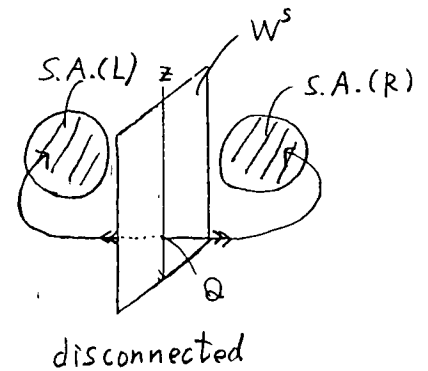


図 19

*1) $e_1 \approx (0.4, 0.9, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$, $e_3 \approx (-0.7, 0.7, 0)$

**1) W^s は, 実際には 極めて複雑な形状 (枝分かれ) をしていると考えられる。

図 17, 18 は, あくまで schematic なものである。

**2) ここでの議論は, 厳密な証明を行なったものではない。

に軌道が入ってくるときであり、S.A.の片側に続け滞りする時間は、この領域に入るまでの時間と考えられ、

パラメーターAを増加させるにしたがって減らしていく。図20.

パラメーターを更に大きくすると

$A_{c2} = 123.899$ で安定なリミットサイクルが出現する。この遷移について次に議論する。

b. ホモクリニック交差の生成による

Intermittency $A_{c2} = 123.899$, $B = 6.0$ (固定)

$A > A_{c2}$ で出現するリミット・サイクルは、周期 ε で対称である。^{*}一般に、

適当な条件のもとで、対称リミット・サイクルは倍周期分岐を生じない事が

証明できる。(付録B)。今の場合、リミット・サイクルが不安定化するときの $d(M^0)^2$ の

^{*}この場合の結び目型は $T_{2,3}$ 。

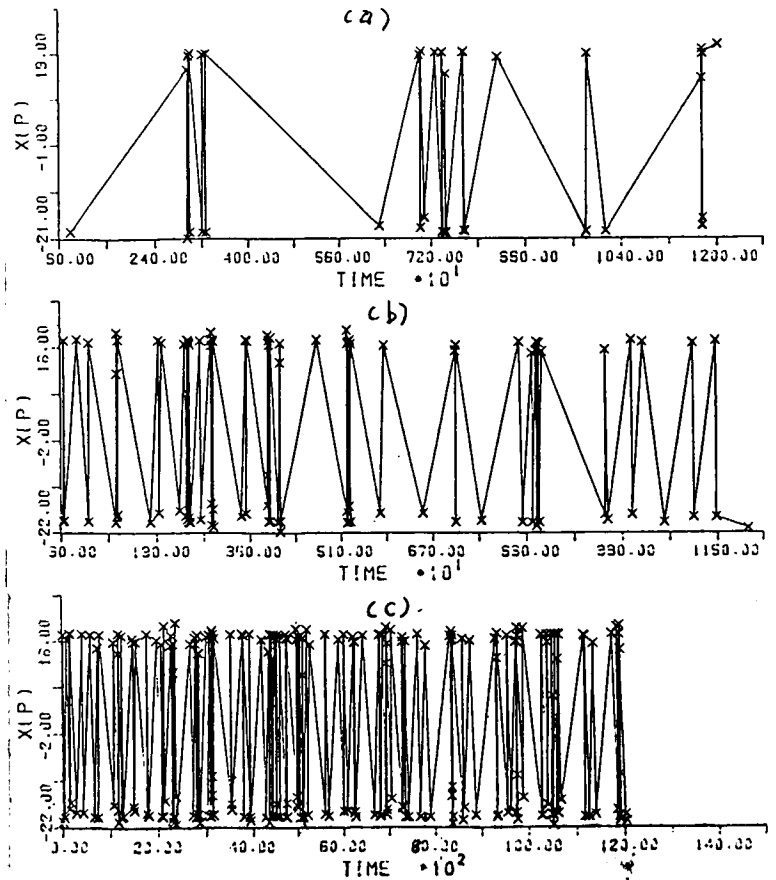


図20. $L \leftrightarrow R$ の変化. x と x の間は、左側の x のある領域に滞在する。上が“R”, 下が“L”.
 (a) $A = 116.49$, (b) $A = 116.5$, (c) $A = 116.52$
 全 $B = 6.0$

固有値は +1 である。実験データは、ホモクリニック
 交差の生成を示しており (図 21)、インターミテントな
 振舞^{*}が観測される。図 22。このメカニズムは、
 従来のものと異なると考えられるが、ひととほに、
 後に考察する。

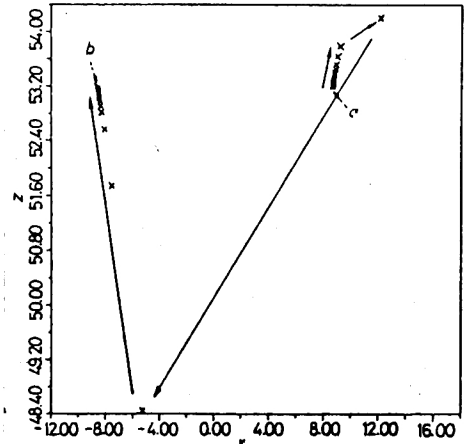


図 21, a: initial point
 b: final point

C. ヘテロクリニック交差の生成に

よる Intermittency, $A_{c3} = 54.865$,

$B = 4.7$ (固定), 領域 IV.

$A > A_{c3}$ での 1 対の周期 2 の非

対称リミットサイクルが安定であり

$A < A_{c3}$ では、対称な S.A. が安定で

ある。図 23。リミットサイクルは、 $(M^0)^2$

でめれば" フォーカスであり、 $A = A_c$ での

$(M^0)^2$ の複素固有値の絶対値が 1 に

なる。この遷移も Intermittency の

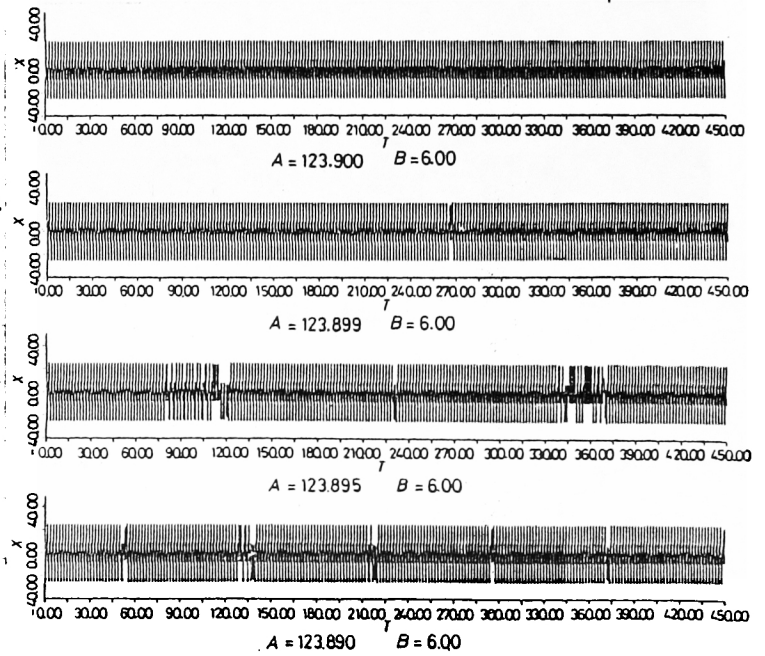


図 22

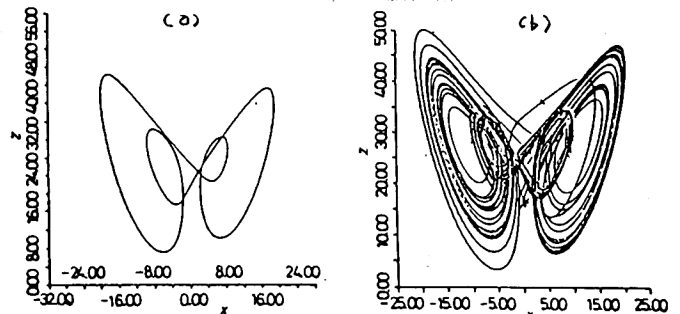


図 23, (a) $A = 55.22$, (b) $A = 54.86$

* 層流状態に intermittent に burst が生じる現象を、ここでは Intermittency と呼ぶ。

あり(図24)、図24で envelope が波状になるのは、複素固有値であることが反映している。又、一対の非対称リミット・サイクルに対応して、層流状態が2種類

ある。^{*} Lyapunov 数の指標

依存性を、図25に示す。固有値が

複素数であるため、 $A > A_{c3}$ で、 $L_5 =$

$2L(1)$ であり、 $A = A_{c3}$ で $L(1)$ と L_5 は

同時に0になり、 $A < A_{c3}$ で両方とも

正になる。この時、 $L(1) > L_5 > 0$ なの？

第2 Lyapunov 数 $L(2) = L_5$ $L(1)$ は

負である。 $L_5 > 0$ は面積が平均

として指数関数的に増大して

いくことを意味している。Koplan

and Yorke の公式^{13), **)} によれば、

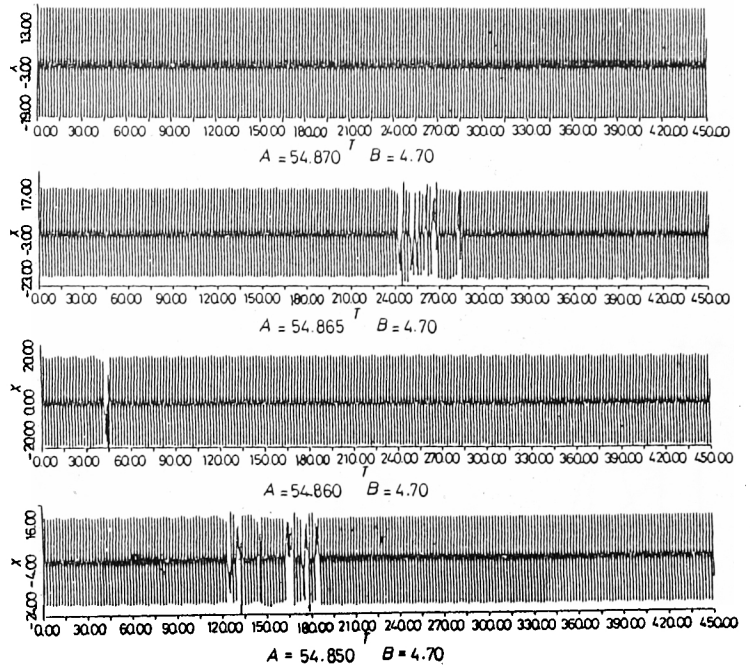


図 24

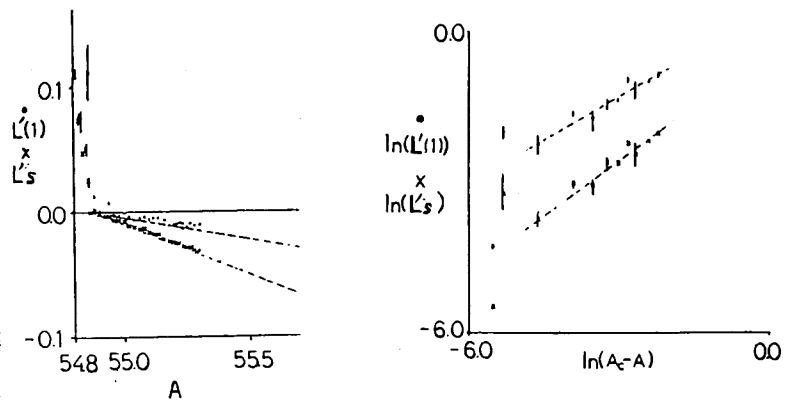


図 25 $L'(1) = T_F L(1)$, $L'_5 = T_F L_5$
 垂直の線分は、error bar.

^{*} 図24では判別しきれないが拡大すると、2種類あることが確かめられる。

^{**} $D_H = k + \frac{L(1)+L(2)+\dots+L(k)}{L(k+1)}$, 但し $L, L(1)+L(2)+\dots+L(k) \geq 0, L(1)+L(2)+\dots+L(k+1) < 0$

ストロボ マップ 2²⁾ の S.A の Hausdorff 次元は, 2以上であり Hyper-chaos と考えられる。^{*}

さて, 次に従来の Intermittency のメカニズムと, b, c 2²⁾ のメカニズムと相違について議論する。Monneville and Roupeau²²⁾ によ, 2 論じられた Intermittency は 1次元写像における図26のプロセス, つまり逆 tangent 分岐によるカオス

への遷移である。(a)の状態では安定な固定点 x_s があるか (b)ではそれが不安定な固定点 x_u と合体消失する。軌道が以前の

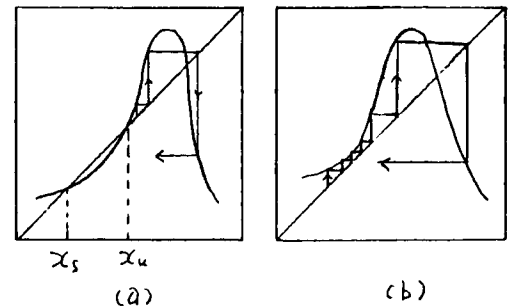


図 26

固定点の近傍にもどると, ここで長時間滞

在し, 層流状態を実現する。Intermittent な振舞が可能なためには, 層流状態への回帰のメカニズムが必要である。1次元写像の場合は, (a)の状態

で x_s が global に安定であるためには x_u を出た軌道は x_s に吸引されなければならない

図 (a) のように x_u の不安定多様体^{**)}が x_s の安定多様体になる必要がある。

*) 第 2 Lyapunov 数が正になる場合を Hyper-chaos と呼ぶ場合もある。

**) ここでは, 1次元の場合も安定, 不安定多様体という言葉を使った。

この構造が (b) の状態でも継続して、層流状態への回復が実現される。

以上は 1次元の場合であるが、Monneville and Pomeau の Intermittency の高次元

系でのメカニズムを次に考えてみる。その場合もサドル-ノード分岐の逆過程

により Intermittency になると考えられ、軌道の回帰性を実現するために、図27

のようになっていると考える。^{*} (a) 2" サドルの

不安定多様体からノードの安定多様体になつて

いる。ノードが global なアトラクターならば、必ず

こうなっている筈である。この構造は、(c) で 固定点

がなくとも 継続して、回帰性を保証する。

要約すると、Monneville and Pomeau の Intermittency は、

サドル-ノード分岐の逆過程であり、安定な固定点が存在

する状態で既に、回帰的構造が存在しており、分岐後、

固定点の消失した状態でも、この構造が継続する

ため、Intermittent な振舞を示す。次に、b, c における

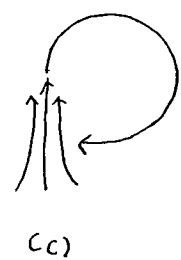
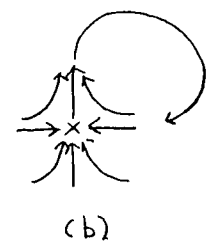
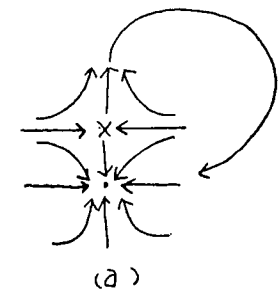


図 27

* 図27は 写像でも、flow でもよい。但し 2次元 flow (自律系) では、

他に安定解が生じるのが不可能

Intermittency のメカニズムについて述べる。この場合、回帰的構造は、系の

対称性と密接に関連している。^{*} b の場合には、 $(M^0)^2$ でみると、 $A < A_{c2}$ で

2つの安定なモードが存在している。^{**} このとき図28のようになっていると考える。

但し、 x_R と x_L の basin の境界である W^s は、

複雑な形をしていると予想される。^{***}

すなわち、 A が A_{c2} 以上にたると、1つの方向が

不安定になり、ノードからサドルに変化

する。このとき、例えば x_R の不安定多様体は、

複雑な形状をしている。 W^s と交差する。一方、

サドル Q の不安定多様体は、 x_L, x_R の安定多様

体と交差しているため、結局、 Q を介して

x_R と不安定多様体と、 x_R, x_L の安定多様体とが交差することになる。図29。

*) 周期解の Floquet 指数が +1 のときには、generic には、サドル-ノード分岐が

生じるが、系に対称性のある場合には、ピッチフォーク分岐や、 b の場合がある。

***) $x_R \approx (8.6, 3.0, 53.1)$, $x_L \approx (-8.6, -3.0, 53.1)$ ($A=1239$)。又 $d(M^0)^2$ の固有値は

$$\lambda_1 \approx 0.97, \lambda_2 \approx 0.13, \lambda_3 \approx 3 \times 10^{-12}.$$

****) 数値計算によれば、わずかな初期値の変化で、行きつく先が変化する。

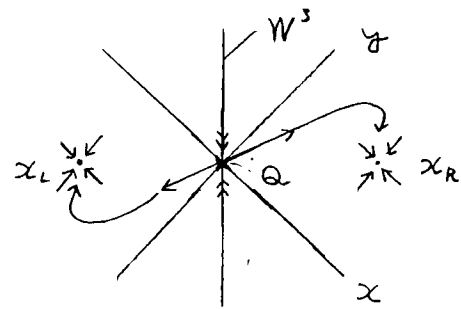


図 28

Q: サドル

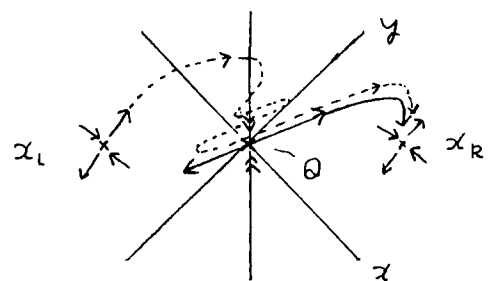


図 29

系は対称であるから $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ としたプロセスも起こり、従って、 x_R と x_L の間を軌道が往來する。これが b の場合の回復小生のメカニズムである。

x_R と x_L は M^0 の 2 周期点であるため、 M^0 でみれば、サドル点とのヘテロクリニック交差とともに、ホモクリニック交差が生じていることになる。不安定化直後では、

ひとたび x_R, x_L の近傍に軌道が落ち込むと、そこから脱するまでに、 $n \propto \frac{1}{|\ln|\lambda||}$

程度の iteration が必要となる。この場合には、 $(M^0)^2$ で 4 つのフォーカスがある。

M^0 では、 $(x_L^1, x_R^1), (x_L^2, x_R^2)$ の 2 つの 2 周期点がある。^{*} $A = A_{c3}$ でこれは

不安定化し 4 つの状態が混ざり、非対称 S.A は生じず、いきなり

対称 S.A が生まれる。これをもう少し詳しく考察する。 $(M^0)^2$ での 4 つの

フォーカスは、 $A = A_{c3}$ で Hopf 分岐をおこすから、 $A < A_{c3}$ で 1 次元トラスが

できないため、inverted Hopf 分岐であると思われる。すると、 $A > A_{c3}$ では、

図 30 のようにフォーカスのまわりに不安定なトラスが存在すると考えら

れる。このとき、例えば x_L^1 のまわりの不安定トラスの 2 次元不安定多様体

は W^s とのヘテロクリニック交差を介して、 x_R^1, x_L^2 の安定多様体とヘテロクリニック

* $A = 54.88$ では、 $x_L^1 \cong (9.4, 11.2, 28.6)$, $\lambda = 0.16 \pm i0.99$ ($|\lambda| = 0.995$), $\lambda_3 \approx 9 \times 10^{-6}$.

交差を生じていると考えられる。そして、対称性より、 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ としたプロセスも生じる。A が A_{c3} に近づくとトーラスの半径が小さくなり、 $A = A_{c3}$ でトーラスは消失してフォーカスは不安定になり、フォーカスの二次元不安定多様体と他のフォーカスの一次元安定多様体とのヘテロクリニック交差による、

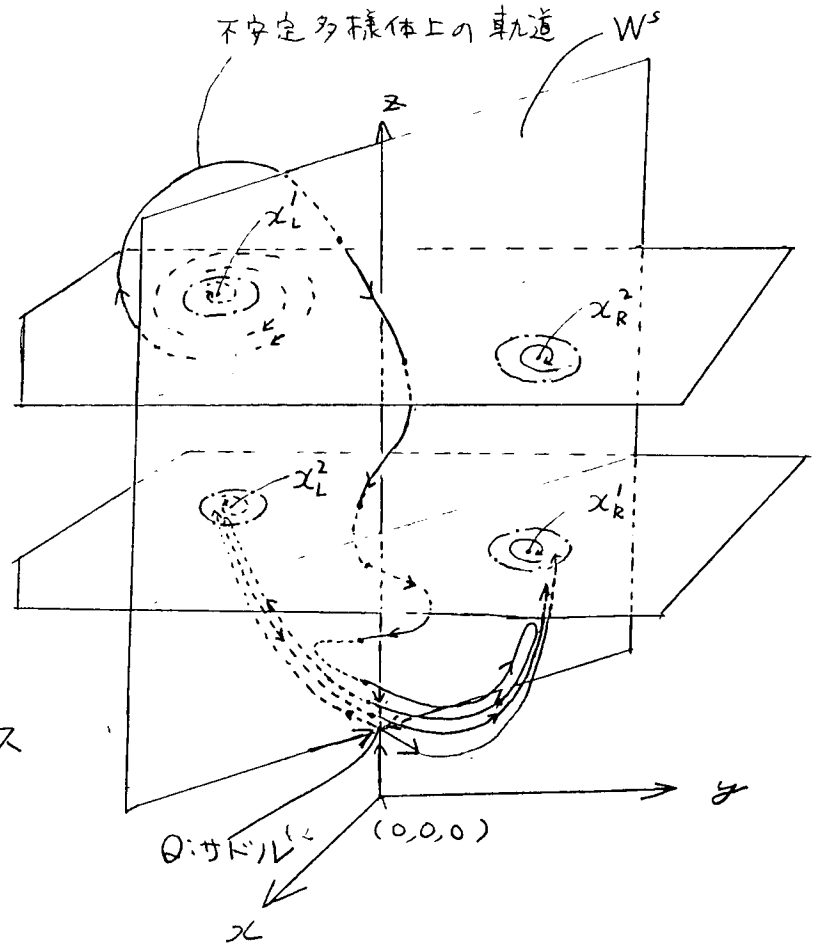


図30 1点全真系, 不安定トーラス

Intermittency が生じる。層流状態への滞在時間は、二次元不安定多様体のどこに回歸するかにより大きく変わる。

以上の外に、b.c. で生じている Intermittency は、系の対称性と密接に関係しており、安定な周期点が不安定化して、z軸上のサドルとのヘテロ。

* サドルノード分岐の逆過程の場合は、周期解が消失したが、ここには存在する。

クリニク交差を介して、ホモ又はヘテロ・クリニク交差が「ヘアー」を生ずるために
 回帰的性質が保証される。このようにメカニズムはサドル・ロード分岐の
 逆過程と異なるが、図31に示す如く、パワー・スペクトルはリミット・サイクル
 領域での δ -peak が幅をもち、かつ δ の振動数成分が増加するという。

共通の性質を持つ。

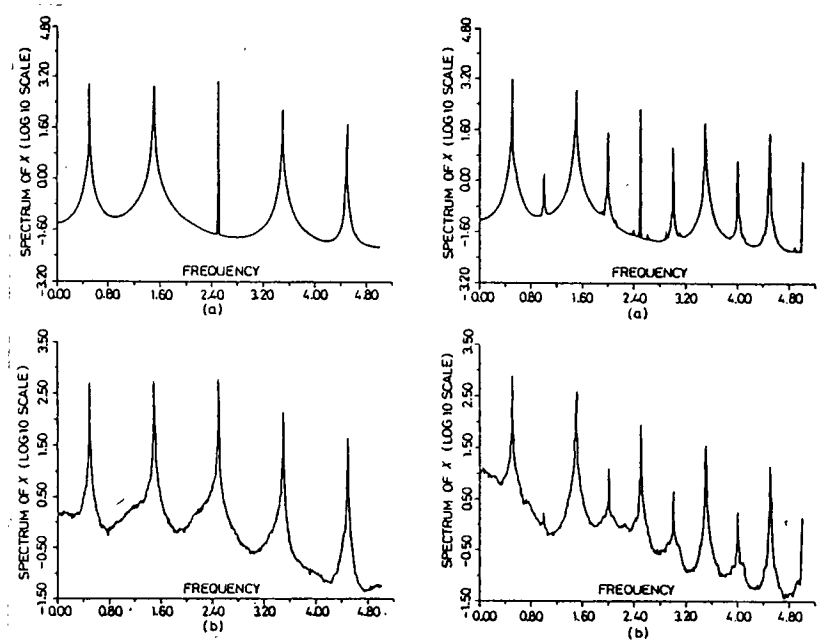


図31 $x(t)$ のパワー・スペクトル

左; (a) $A=125.0$, $B=6.0$ 、2周期解

(b) $A=123.89$, $B=6.0$ 、S.A.

右; (a) $A=54.87$, $B=4.7$ 、2周期解

(b) $A=54.8$, $B=4.7$ 、S.A.

1-2. まとめと議論

この章では、カオスへのルートについて、強制ローレンツモデルを例にとり調べた。その結果、2分岐の領域でストロボマップ(3次元写像)がHenonマップで近似できるということが示され、写像の1次元化のプロセスが明らかにされた。又、従来のものとは異なるメカニズムの Intermittency が見出された。これは強制ローレンツモデルに固有な現象ではなく、かなり一般的な系^{*}で成立すると考えられる。但し、厳密に言えば、b. の場合には、 A_{c2} 以下の不安定リミットサイクルの存在が証明されたわけではなく、この遷移についてはまだ完全に明らかにされたわけではない。カオスへのルートとしては、他に0-2. であげた 3) トラス → カオス があるが、Ruelle - Takens の説を検証するためには、3次元トラスの出現が可能な系を扱う必要がある。更に、カオス-カオスの遷移、例えば3次元自律系での対称性の異なるカオス間の遷移^{**}、 n 次元の異なるカオス間の遷移等について、今後研究されねばならない。

*) b, c, の現象が、対称性を持たない系でどの程度一般的に生ずるかは明らかではない。

**) 第2章(2-7)に、これについての議論がある。

第2章 3次元常微分方程式の解の位相的性質

2-0. 3次元空間内の閉曲線の位相的特徴づけ

この節では、むすび目型及びリンク数についての簡単な説明を行なう。⁵⁶⁾

3次元ユークリッド空間 R^3 内の閉曲線は、そのむすび目型により区別される。

2つのむすび目 K, K' は、 R^3 から R^3 への同相写像 h により1対1に写像される

とき、即ち $K' = h(K)$ となるとき、同じ型に属するといわれる。⁴⁾ むすび目は R^3 への

埋め込まれかたで特徴づけることができる。基本群 $\pi(R^3 - K)$ (位相空間

$(R^3 - K)$ における始点を固定した閉曲線のホモトピー同値類^{4*)}) が重要

な指標である。基本群は異なる。2つのむすび目型 K, K' は異なるむすび目型

に属する。但し、逆は真ではない。現在までのところ、むすび目型を完全に規定

する不変量は知られていない。基本群 $\pi(R^3 - K)$ が与えられたとき、その

*) これは同値関係による。

4*) $(R^3 - K)$ 内の、始点を固定した2つの閉曲線は連続に変形していき

重なることができるとき、ホモトピックであるという。ホモトピックな関係は、

同値関係であり、この関係による同値類を、ホモトピー同値類とFらう。

これは群になる。この群は始点に依存するが、今考えたい空間 $(R^3 - K)$ は

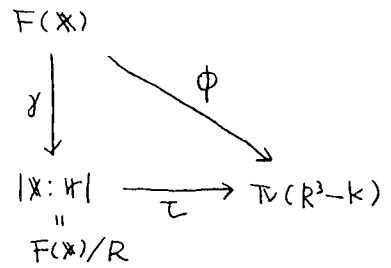
弧状連続なもので、始点の異なる2つの群は、同型となる。

群表示 $(\mathbb{X}; \mathbb{K})$ が考えられ、図32の図式が成立する。

但しここで、 \mathbb{X} は $\pi(R-k)$ の生成元と1対1に

対応する元の集合で、 $F(\mathbb{X})$ は、 \mathbb{X} を自由基と

する自由群。 R は ϕ の核。 以下に、詳細は



省くが $(\mathbb{X}; \mathbb{K})$ から Alexander 行列 A という

行列を定義する事ができ、この行列から k 番目

の初等イテアル E_k , k 番目の結び目多項式

図32

ϕ : 準同型,

γ : \mathbb{X} への準同型

τ : 同型

$\mathbb{X}; \mathbb{K}$; R の剰余群

表示 $(\mathbb{X}; \mathbb{K})$ の群表示による。

Δ_k が得られる ($k \geq 0$)。 E_k や Δ_k が異なれば、結び目型の異なる事が

結論される。 結び目理論は、それ自体数学の一分野をなしており、現在も

未解決の問題が多い。 本論文では、周期解の n 結び目型について、 $\pi(R^3-k)$

E_k, Δ_k を一般的に与える試みは行われたい。 結び目型については以下で

簡単な結び目と、その Alexander 行列式 Δ_1 を挙げるにとどめる。

* E_k は $0 < n-k \leq m$ ならば、 A の全ての $(n-k)$ 行 $(n-k)$ 列の小行列の行列式
 による生成されるイテアル, i.e. $\left\{ \sum_{t=1}^{n-k} t R \right\}$, $n-k > m$ ならば $E_k = 0$, $n-k \leq 0$ ならば $E_k = R$.

但し、 A は、 m 行 n 列。 R は、実数の集合。

** Δ_k は A の $(n-k)$ 行 $(n-k)$ 列の部分行列式の最大公約数、但し $n-k > m$
 ならば $\Delta_k = 0$, $n-k \leq 0$ ならば $\Delta_k = 1$ 。 特に Δ_1 は Alexander 行列式とよぶ。

a. trivial knot

$x^2 + y^2 = 1, z = 0$ と同値の結び目。図33。

$$\Delta_1 = 1.$$

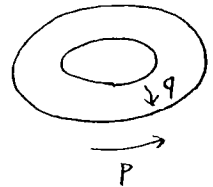


図33

b. トーラス・ノット $T_{p,q}$ (p, q は互いに素な整数)

2次元トーラス上を、円周方向に q 回まわす間に、

円環方向に p 回まわす結び目。図34。



$T_{2,9}$ は 交差が 9 個 (最小のとき) あり 図35

のような結び目である。

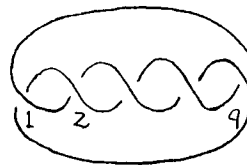
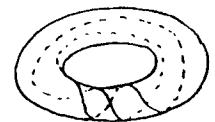


図35



$T_{2,3}$ = trefoil
 (3葉結び目)
 図34.

このとき、

$$\Delta_1 = t^{q-1} - t^{q-2} + t^{q-3} - \dots + 1$$

となる。

次に、向きをついた2つの閉曲線 C_1, C_2 について考える。 C_1, C_2 がどのように絡み

あっているかを特徴づける量にリンク数 $L(C_1, C_2)$ があり、次式 (Gauss for-

mula) で定義される。

$$L(C_1, C_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \quad (2.1)$$


$\|\cdot\|$ はユークリッドノルム, (\cdot, \cdot) は内積, \times は外積。


これは例えば C_1 を縁とする閉曲面 (ガイフェルトの膜) を考え、その面に C_1 による決まる向きをつけ、 C_2 がその膜を通過するとき、 C_2 の向きと、膜の向きが右ねじの関係にあれば $+1$ 、左ねじの関係にあれば -1 とし、それらを

加えあわせたものである。図 36。又は、 C_1, C_2 を

適当な方向からみることにより、横断的な交差

が有限回生じるようにしておく。^{**} 例えば C_1 に

注目して、 C_1 が C_2 の下を通過するとき、 に

$+1$,  に -1 を割りあてる。これらの総和

が L に等しい。

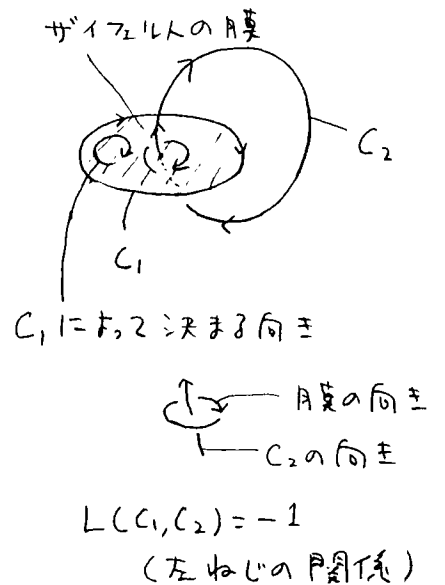


図 36

* 膜の向きにねじを回したとき、進行方向が C_1 の向きになるようなねじを考える。

** 有限個の直線からなる結び目を多辺形結び目といい、それと同値な結び目

は、馬刺れしている (tame) という。そうでないものは野生 (wild) という。馬刺れた結び

目ではこのような事は必ず可能。又結び目のホロメータ表示が C^1 級ならば馬刺れして

いることが示せる。⁵⁶⁾ この論文では、バクテリ場を C^1 級と仮定するので、角解は馬刺れている。

以上で、閉曲系を位相的に特徴づける量についての説明をおこなう。次節では、微分方程式の解としての閉曲系の特徴づけを行おう。

2-1. 3次元常微分方程式の周期解の位相的諸量

3次元常微分方程式(2.2)を考えよ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) &= \vec{F}(\vec{x}(t), t, \mu) \\ \vec{x}, \vec{F}(\vec{x}, t, \mu) &\in \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} \in C^1 \\ \mu &: \text{バイフォークーションパラメータ} \end{aligned} \right\} (2.2)$$

そこで(2.1)の周期解 $\vec{x}_0(t, \mu)$ を考えよ。T をその周期とする。又 $\vec{F}(\vec{x}, t, \mu)$

は、周期Tの周期関数とする。

$$\vec{F}(\vec{x}, t+T, \mu) = \vec{F}(\vec{x}, t, \mu) \quad (*) \quad (2.3)$$

\vec{x}_0 を特徴づけるには、その結合点型の他に、力学系(2.2)の解があること

いうことを考慮し、その近傍でのflowの様子を記述せねばならない。

そのために、 \vec{x}_0 のまわりでの変分方程式(2.4)を考えよ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{w}(t) &= D\vec{F}(\vec{x}_0(t, \mu), t, \mu) \cdot \vec{w}(t) \\ \{D\vec{F}(\vec{x}, t, \mu)\}_{ij} &= \frac{\partial F_i(\vec{x}, t, \mu)}{\partial x_j} \\ \vec{F} &= (F_1, F_2, F_3) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

*) 以下からの議論は、勿論自律系でも正しい。又、簡単のため

T = mT₀ (m, 自然数) とする。

この解は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \vec{W}(t) &= \text{Exp} \left[\int_{t_0}^t D\vec{F}(\vec{x}(z), z, \mu) dz \right] \vec{W}(t_0) \\ &\equiv dS_{\mu}^{(t, t_0)}(\vec{x}_0(t_0, \mu)) \cdot \vec{W}(t_0) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{t_0}^t} \right\} (2.5)$$

Exp [] は ordered exponential, 又, $S_{\mu}^{(t, t_0)}$ は (2.2) に従って, $\vec{x}(t_0) \in \vec{x}(t)$ に

写す写像^{*}, 即ち, $S_{\mu}^{(t, t_0)}(\vec{x}(t_0)) = \vec{x}(t)$. 又 $dS_{\mu}^{(t, t_0)}(\vec{x}_0(t_0, \mu))$ は, $S_{\mu}^{(t, t_0)}$ の点

$\vec{x}_0(t_0, \mu)$ における微分である。ここで, $dS_{\mu}^{(t_0+T, t_0)}(\vec{x}_0(t_0, \mu)) = d(M_{\mu}^{t_0})^m(\vec{x}_0(t_0, \mu))$

$\equiv d\psi_{\mu}$ の固有値 $\lambda_i(\mu)$, 固有ベクトル $\vec{e}_i(\mu)$ ^{**} を考える。但し λ_i が実の場合を

考える。 \vec{e}_i も実とする。

$$d\psi \vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i \quad (2.6)$$

$\vec{V}_i(t) = \frac{dS^{(t_0+t, t_0)} \cdot \vec{e}_i}{\|dS^{(t_0+t, t_0)} \cdot \vec{e}_i\|}$ とおき, 各時刻 t で原点を $\vec{x}_0(t)$ とすれば, 時間か

たつとともに, $\vec{V}_i(t)$ は, $\vec{x}_0(t)$ のまわりを回転していく。図37。

さて, $\vec{x}_0(t)$ の近傍の flow の様子を記述するために

torsion number n_i を次のように定義する。

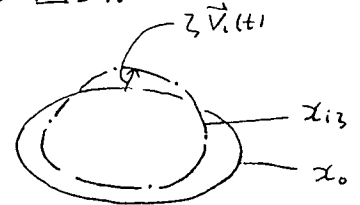


図37

*) 第1章で定義したストロホムマップ M^{t_0} は, $M^{t_0} = S_{\mu}^{(T_0+t_0, t_0)}$

**) λ_i は t_0 によらずに \vec{e}_i は t_0 により次のようになる。

$$\vec{e}_i(\mu)(t_0) = dS_{\mu}^{(t_0, 0)}(\vec{x}_0(0, \mu)) \vec{e}_i(\mu)(0)$$

以下簡単のため, 誤解の無い限り全2の表式から, $\mu, t_0 \in$ 除く。

$$n_i \equiv \frac{1}{2} L[\{\vec{x}_0(t); 0 \leq t < T\}, \{\vec{x}_0(t) + \lambda \vec{v}_i(t); 0 \leq t < 2T\}]$$

$$\equiv \frac{1}{2} L(x_0, x_{i3}) \quad \left. \vphantom{n_i} \right\} (2.7)$$

ここで、 $\lambda \ll 1$ とする。もし $\vec{v}_i(t)$ が $\dot{\vec{x}}_0(t)$ (\cdot は t による微分) と平行に与えら
 げれば、 n_i は well-defined で、 λ が 充分小さいとき、一定の値に与る。次に、

変分方程式 (2.4) の任意の解 $\vec{w}(t)$ に対 (2, relative torsion number $r(\vec{w})$)

を次のように定義する。

$$r(\vec{w}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\alpha_2(t)\dot{\alpha}_3(t) - \dot{\alpha}_2(t)\alpha_3(t)}{\alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^2} dt$$

$$\alpha_j(t) = (\vec{w}(t), \vec{f}_j(t))$$

$$\vec{f}_1(t) = \frac{\dot{\vec{x}}_0(t)}{\|\dot{\vec{x}}_0(t)\|}, \quad \vec{f}_2(t) = \frac{\dot{\vec{x}}_0(t) \times \ddot{\vec{x}}_0(t)}{\|\dot{\vec{x}}_0(t) \times \ddot{\vec{x}}_0(t)\|}, \quad \vec{f}_3(t) = \vec{f}_1(t) \times \vec{f}_2(t)$$

$$\left. \vphantom{r(\vec{w})} \right\} (2.8)$$

$a(t)$ を任意のスカラー関数としたとき $r(a\vec{w}) = r(\vec{w})$ であるから、 \vec{w} のまわり

に規格化したベクトル $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ を用い (2) もよい。 $r(\vec{v})$ は $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ で

張る部分空間への \vec{v} の射影 \vec{v}_2 の回転数、即ち $\dot{\vec{x}}_0$ のまわりの変分ベク

トルの動座標系 $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ に相対的回転数である。図 38。

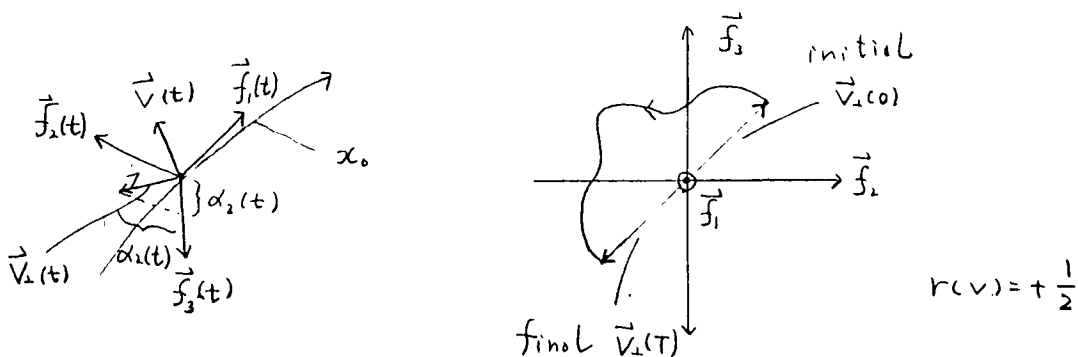


図 38

λ_i に関係した量 r_i を, $r_i \equiv r(\vec{v}_i)$ と定義すると, n_i と r_i の関係は次式

(2.9) で与えられる。

$$n_i = r_i + L(x_0 + \zeta' f_2, x_0) \quad (\zeta' \ll 1) \quad (2.9)$$

以上の定義についての注意

1. 自律系 (即ち \vec{f} が時間によらない) の場合^{**)}

$\vec{x}_0(t)$ 自身が変分方程式 (3) の解であり, $d\psi$ の固有値 $\lambda_0 = +1$ に属する

固有ベクトルに対応している。

$$d\psi \cdot \vec{x}_0(t) = \lambda_0 \vec{x}_0(t) \quad (2.10)$$

従って, 他の実固有値 λ_1, λ_2 ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$) に対しては, n_1, n_2 は常に

定義され, しかも $n_1 = n_2, r_1 = r_2$ とする。なぜなら与えられた初期条件

をもつ (2.4) の解は一意的に定まるからである。^{***)} 更に $11^{\circ} \times 9$ -ターに

関する解の連続性も考慮に入れれば, 実固有値の連続 $11^{\circ} \times 9$ -領域

*) $L(x_0 + \zeta' f_2, x_0) \equiv L[\{\vec{x}_0(t) + \zeta' \vec{f}_2(t); 0 \leq t < T\}, \{\vec{x}_0(t); 0 \leq t < T\}]$. 証明は付録Dを参照。

**) (2.2) の解は時間並進対称性を持つ。 $\vec{x}(t)$ が解なら, $s \in$ 任意の実数と

したとき $\vec{x}(t+s)$ も解。

***) 解の交差は, 固定点以外では生じない。

で、 $n_1 (= n_2)$ は一定に等しい。

2. 非自律系

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$ で定義する。 $\vec{x}_0(t)$ は、もはや (2.4) の解ではなく、 $\vec{v}_i(t)$ は $\vec{x}_0(t)$ と accidental に平行になり得る。もしある時刻 t_0 でそうならば n_i は定義できず。 λ_i が実数でも、このような事象の生じる 11° の X-ターの前後で n_i の値は変化し得る。

3 $\lambda_i \neq 0$

(2.11)

$\lambda_i \neq 0$ とする。 $\vec{w}_i(t) = dS^{(t_0+t, t_0)} \vec{e}_i$ であり、

$$\vec{w}_i(T) = dS^{(t_0+T, t_0)} \vec{e}_i = d\psi \vec{e}_i = 0$$

又 $\vec{w} \equiv 0$ は (2.4) の解、よって、解の一意性より $\vec{w}_i(t) \equiv 0$ 。

これは $\vec{w}_i(t_0) = \vec{e}_i$ が固有ベクトル ($\neq 0$) であることに矛盾。

4. 容易にわかるように、 n_i は n_i が定義できるときはいつでも定義でき

$2n_i, 2r_i$ ともに、 λ_i が正ならば偶数であり、負ならば奇数である。又、

$L(x_0 + \zeta f_2, x_0)$ は、 $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ が定義できる限りいつでも定義でき

$\zeta \rightarrow +0$ のとき一定値であり、 $L(x_0 + \zeta f_2, x_0)$ ($\zeta \ll 1$) に等しい。

簡単な場合の torsion number n_i を 図 39 に示す。

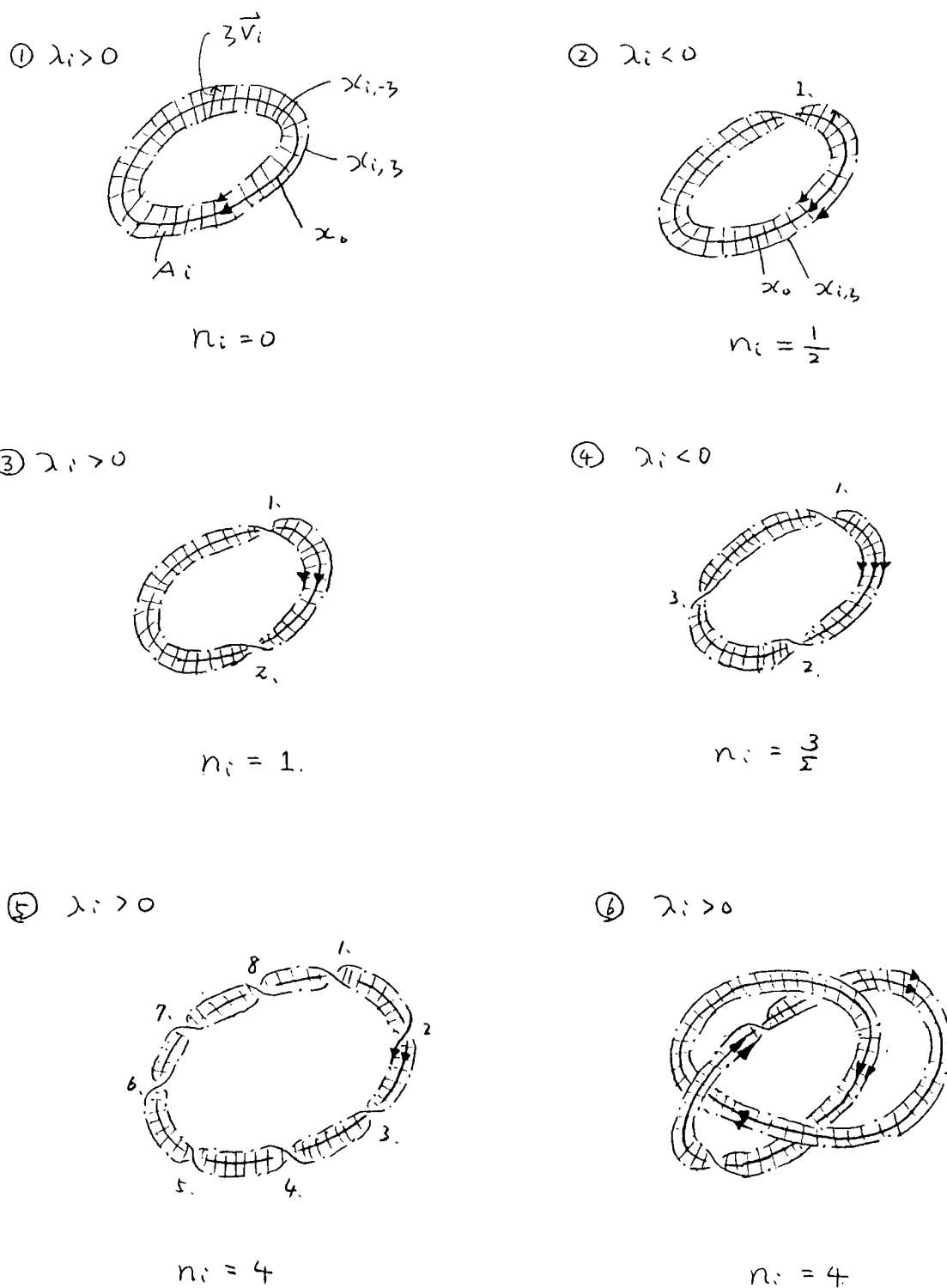


図 39. $\lambda_i > 0$ のとき, 軌道は $\alpha_{i,3}$ 上 に 2 周 する。

- ① ~ ⑤ α_0 は trivial knot
- ⑥ α_0 は $T_{2,3}$

周期解 $\vec{x}_0(t)$ は、その「結び目型」と「torsion number n_i 」を位相的に特徴づける。更に $\vec{x}_0(t)$ が分岐して $\vec{x}_1(t)$ に移行すると、 $\vec{x}_1(t)$ の「結び目型」と「torsion number n_i 」は、 $\vec{x}_0(t)$ の「結び目型」と「torsion number n_i 」で決まる。このことを次節で示す。

2-2 分岐過程における周期解の位相構造の変化

この節では、パラメータ μ を変えていったとき、周期解が不安定化して、新しい周期解が現れる分岐過程において、新旧の解の位相構造の関係について議論する。そのために、実固有値 λ_i に対して、周期解 $\vec{x}_0(t, \mu)$ のまわりのバンド A_i ^{*)} を次のように定義する。

$$A_i \equiv \{ \vec{x}_0(t) + s \vec{v}_i(t); 0 \leq t < T, -3 \leq s \leq 3 \} \quad (2.12)$$

バンド A_i は、自律系では、 $|\lambda_i| < 1$ のとき x_0 の安定多様体に、又 $|\lambda_i| > 1$ のときは、不安定多様体に接する。又、非自律系では、位相 t_0 のストロボ M, Γ^0 $M_{\mu}^{t_0}$ に対して、 $\vec{x}_0(t_0)$ は $(M_{\mu}^{t_0})^m$ の固定点に落ちているが、 A_i はその安定又は不安定多様体 (各々 $W^s(t_0), W^u(t_0)$ とする) を束ねたもの、即ち $\bigcup_{t_0 \in [0, T)} W(t_0)$ に接する。位相的にバンド A_i を特徴づける量は、その中心線、即ち x_0 の結び目型と、^{**)} ‘ねじれ数’ $2n_i$ である。従って、周期解の位相的性質は、結び目型と torsion number n_i で完全に規定される。 λ_i が正、即ち $2n_i, 2r_i$ が

*) n_i が定義できる場合を考慮。又、図39参照。

**) 数学的に、バンドの‘ねじれ数’というものが定義されている。これは、この論文での torsion number の2倍である。

偶数のとき A_i は向きづけ可能であり、 λ_i が負、 $2n_i, 2r_i$ が奇数のとき向きづけ不可能である。

さて μ を増加させていったとき、 $\mu = \mu_1$ で周期解が不安定になる。このとき generic に $|\lambda_1(\mu_1)| = 1$, $|\lambda_i(\mu_1)| < 1$ である。(但し $i \neq 0$)。つまり固有値が縮退しない ($\lambda_0 = 1$ は別に (2)) と仮定する。 λ_1 が a) 正, b) 負, c) 複素数に応じて分岐のタイプが異なる。以下で各場合について最初に系を論述し、その後バンド A の変化を議論することによって証明を行なう。

a) $\lambda_1 = 1$ ピッチフォーク分岐^{**)}

第 1 章でも述べたように、 $\lambda_1 = 1$ の分岐は、generic にはサドルノード分岐であるが、系に対称性があり、 $\vec{x}_0(t, \mu)$ が対称な解の場合には、ピッチフォーク分岐が可能である。つまり $\mu_1 < \mu$ で不安定化した $\vec{x}_0(t, \mu)$ の他に、新しい安定周期解 $\vec{x}'(t, \mu), \vec{x}''(t, \mu)$ が生じる。我々はこの場合を扱う。この時次の事が成立する。

a) 表と裏を区別できる。

***) 倍周期分岐のことではなく、新たに 2 つの解が生ずる分岐をここでは、

ピッチフォーク分岐とよぶ。

1. 解 x' , x'' の周期は x_0 の周期と同じであり、この3つのうち任意の2つの

対の linking number は n_1 に等しい。即ち、

$$L(x_0, x') = L(x_0, x'') = L(x', x'') = n_1 \quad (2.13)$$

2. torsion number, relative torsion number は次のようになる。

$$n_1' = n_1'' = n_1 \quad (2.14)$$

$$r_1' = r_1'' = r_1 \quad (2.15)$$

3. x' と x'' の結び目型は x_0 の結び目型と同じであり又 (2.14) より

torsion number も等しいので、バンド A_1', A_1'' は A_1 と同じである。

b) $\lambda_1 = -1$, 倍周期分岐

この場合は、 $\vec{x}_0(t, \mu)$ が不安定化して、周期が \vec{x}_0 の2倍の安定周期解

$\vec{x}'''(t, \mu)$ が生ずる。このとき 次の事が成り立つ。

$$1. L(x_0, x''') = 2n_1 \quad (2.16)$$

$$2. n_1''' = 2(n_1 + n_1) \quad (2.17)$$

$$r_1''' = 2r_1 \quad (2.18)$$

3. x''' の結び目型は x_{13} の結び目型に等しい。特に x_0 が trivial

knot のときは、 x''' は Torus knot $T_{2, 2n_1}$ と呼ぶ。又 A_1''' は向きづけ可能。

c) $\lambda_1 = e^{2\pi i \theta}$ ($\theta = \frac{n}{m}$, $m=1,2,3,4$)

この場合は、 $\vec{x}_0(t, \mu)$ が不安定となり、2次元トラス T^2 上の周期解、

*)
 又は概周期解が、適当な条件のもとで生成される。前節で n_1 は、

λ_1 が実数の場合にのみ定義したが、更に $\theta = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な

整数, $p > 0$) のとき、 n_1 を次のように定義する。

$$n_1 \equiv \frac{1}{p} L(x_0, \tilde{x}_{13})^{**}$$

$$\tilde{x}_{13} \equiv \{ \vec{x}_0(t) + 3 \vec{v}_1(t), 0 \leq t < pT \}$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{! dS^{(t_0+t, t_0)} \vec{e}_1}{\| dS^{(t_0+t, t_0)} \vec{e}_1 \|}$$

\vec{e}_1 , $dS^{(t_0+pT, t_0)}$ の固有値 $\lambda_1 = 1$ に属する

実固有ベクトル。

} (2.19)

すると、次の事が成立する。

1. トラスは x_0 と同じ '結び目型'

2. $\theta = \frac{q}{p}$ のとき、周期 pT の周期解 x''' が生成されるが、 x''' の

結び目型は、 \tilde{x}_{13} の結び目型と等しく、 x_0 が trivial knot のとき、

x''' は Torus knot T_{p, pn_1} 。

*) θ が有理数のときは周期解、無理数のときは概周期解。

** 後に一般の変分ベクトルに対して、定義を拡張する。

次に式(2.13)~(2.18)の証明を行なう。^{*})

flowの近傍のようすは、バンド A_i によって記述されているから、分岐がおこったとき
生じる新しい解のバンド A'_i も知ることがよい。 $\lambda_i = 1$ と $\lambda_i = 2$ 不安定化するの2"
バンド A_i に注目する。又、分岐は連続的におこる場合を考えているので、連続性
より次の命題が成立する。

「分岐によって生じた解のバンド A'_i は、 A_i を中心系より切り断して得られる
バンドに等しい」

この命題を前提として証明を行なう。

[証明]

バンド A_i が与えられたとき、torsion number n_i はバンドの系数($\lambda_i > 0$ のとき、
2つの閉曲線 $x_{i,2}, x_{i,3}$ であり、 $\lambda_i < 0$ のとき 1つの閉曲線 $x_{i,3}$ である)と、
中心系(即ち x_0)とのリンク数 $\frac{1}{2}$ である。系数と中心系との交差は、4つの
タイプに分けられ、それぞれ n_i への寄与は、次のようになる。図40。

* Cの結果は、殆ど明らかなので、特に証明は行われないう。

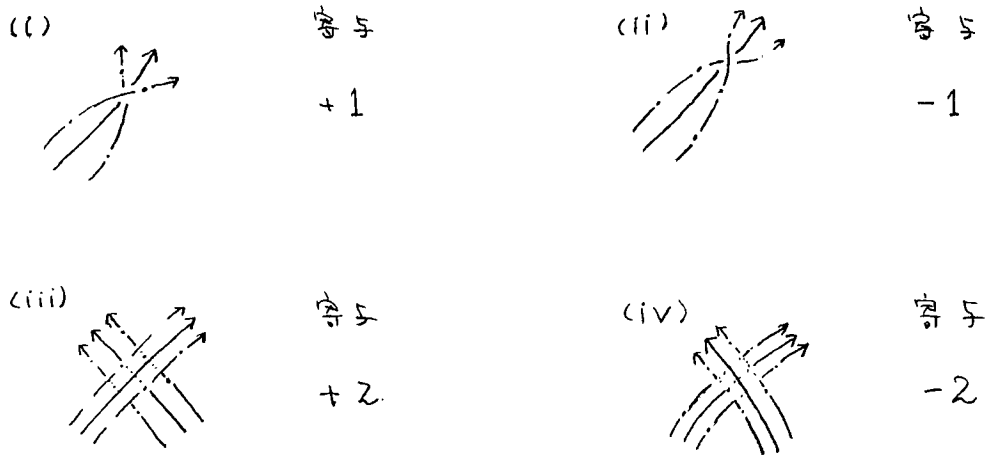


図40 交差の4つのタイプと、 n_i への寄与.

タイプ (i) ~ (iv) の個数を、それぞれ、 $l^+(i)$, $l^-(i)$, $m^+(i)$, $m^-(i)$ とすると、

$$n_i = \frac{1}{2} (l^+(i) - l^-(i) + m^+(i) - m^-(i)) \quad (2.20)$$

A_i が向き付け可能な場合は、更に次のようにする。タイプ (i), (ii) の交差で

線 α_{i-3} が α_i の下にくる場合の個数を $l_1^+(i)$, $l_1^-(i)$, α_{i-3} が下にくる場合の

個数を $l_2^+(i)$, $l_2^-(i)$ とすると、

$$l^+(i) = l_1^+(i) + l_2^+(i), \quad l^-(i) = l_1^-(i) + l_2^-(i) \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} n_i &= l^+(i) - l^-(i) + m^+(i) - m^-(i) \\ &= l_1^+(i) - l_1^-(i) + m^+(i) - m^-(i) \end{aligned} \right\} (2.21)$$

* 例えは" p56 図39の⑥の例"は、 $l^+(i)=2$, $m^+(i)=3$ であるから

$$n_i = \frac{2}{2} + 3 = 4.$$

又 (2.20) ~ (2.21) より

$$e_1^+(i) - e_1^-(i) = e_2^+(i) - e_2^-(i) = \frac{1}{2}(e^+(i) - e^-(i)) \quad (2.22)$$

となる。

さて、 A_i と A_i' の関係について、まず $i=1$ の場合、次に $i \neq 1$ の場合を考察する。

I. A_1 と分岐後のバンド A_1' との関係

A_1 をその中心系に $\epsilon, 2$ を切断すると (i), (iii) はそれぞれ次のようになる。^{*} 図4。

a) の場合

新たに2つの周期解 x', x'' , 従って2

バンド A_1', A_1'' が生じ (i)' の各々は、 A_1'

A_1'' である。(ii)' も同様。(iii)', (iv)' につい

ては (iii), (iv) のタイプが各々 A_1, A_1'' に

属する。(例えは、図4 (iii)' で太線で囲

んだものと他方)。従って、

$$\left. \begin{aligned} e^{\pm'}(1) - e^{\pm''}(1) &= e^{\pm}(1) \\ m^{\pm'}(1) &= m^{\pm''}(1) = m^{\pm}(1) \end{aligned} \right\} (2.23)$$

^{*} ii), iv) も同様。

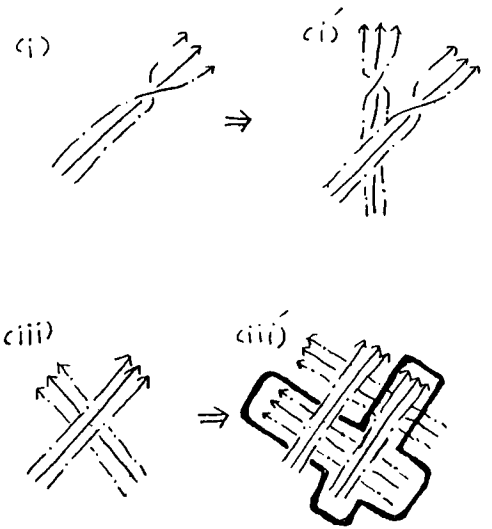


図 41

であり、 $n_1' = n_1'' = n_1$ でバンド A_1', A_1'' は A_1 と同じである。

次にリンク数も考える。 x' に注目する。(i) ~ (iv) で x' が x'' の下にくる場合の数を

$l_i^{\pm}(1), m_i^{\pm}(1)$ とすると、これらは各々リンク数は $(\pm 1), (\pm 1)$ の寄与をするから

$$\begin{aligned} L(x', x'') &= l_i^+(1) - l_i^-(1) + m_i^+(1) - m_i^-(1) \\ &= n_1 \quad (\text{(2.21), (2.22) より}). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L(x', x'') \\ = n_1 \end{aligned}} \right\} (2.24)$$

他のバンドについても同様である。^{*}

b) の場合

図4より、 $e^{\pm''}(1) = 2e^{\pm}(1), m^{\pm''}(1) = 4m^{\pm}(1) + e^{\pm}(1)$ であるから

$$\begin{aligned} n_1'' &= \frac{1}{2} \{ e^{+''}(1) - e^{-''}(1) \} + m^{+''}(1) - m^{-''}(1) \\ &= e^+(1) - e^-(1) + 4 \{ m^+(1) - m^-(1) \} + e^+(1) - e^-(1) \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \{ e^+(1) - e^-(1) \} + m^+(1) - m^-(1) \right] = 4n_1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} n_1'' \\ = e^+(1) - e^-(1) + 4 \{ m^+(1) - m^-(1) \} + e^+(1) - e^-(1) \\ = 4 \left[\frac{1}{2} \{ e^+(1) - e^-(1) \} + m^+(1) - m^-(1) \right] = 4n_1 \end{aligned}} \right\} (2.25)$$

又、リンク数については、 $e^{\pm}(1)$ 個から $(\pm 1), m^{\pm}(1)$ 個から (± 2) の寄与があるから、

$$L(x_0, x''') = e^+(1) - e^-(1) + 2 \{ m^+(1) - m^-(1) \} = 2n_1 \quad (2.26)$$

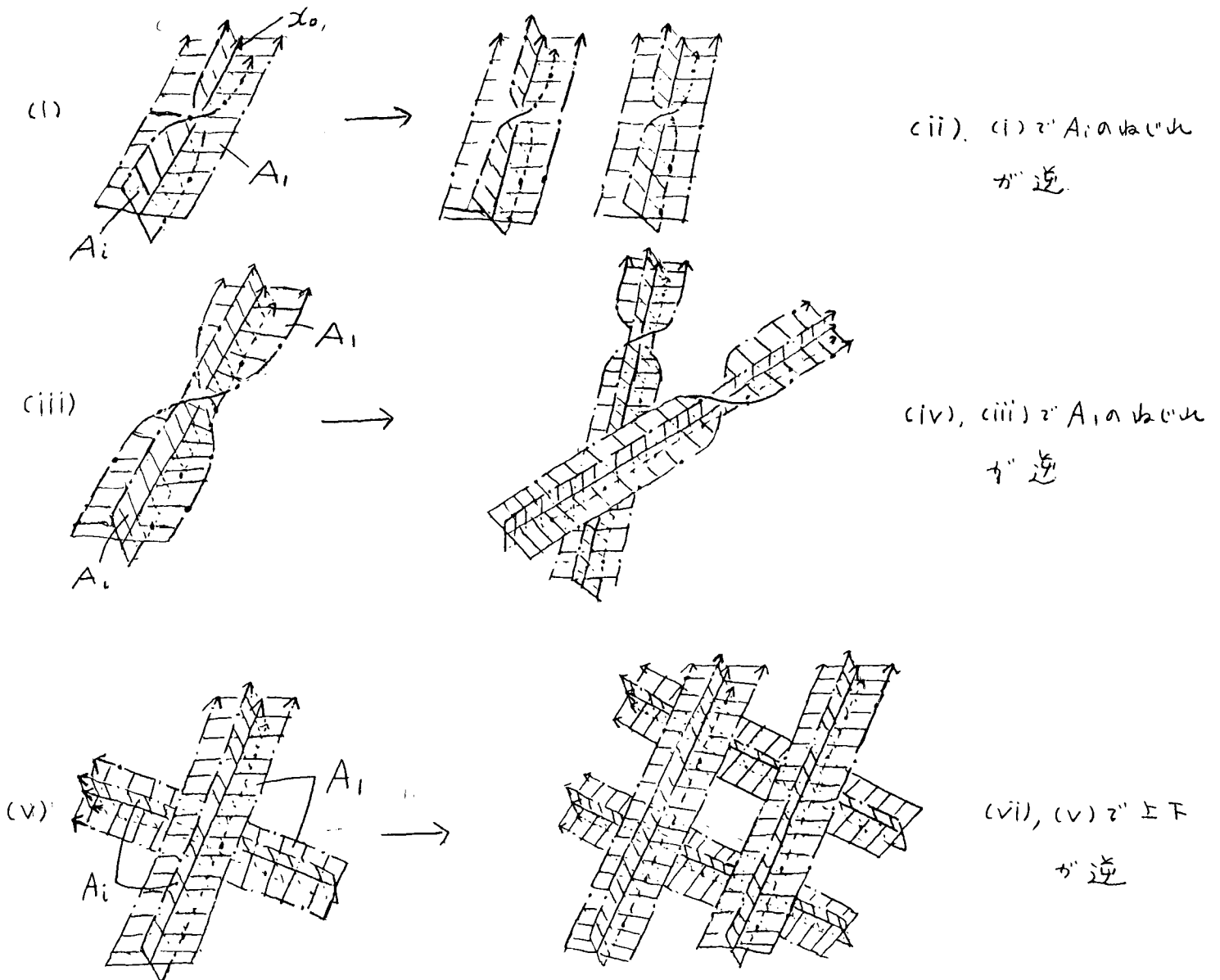
となる。

* n_i の変化については最後にまとめて証明する。

II. A_i と分岐後のパルド A_i' との関係 ($i \neq 1$)

この場合には、 A_1 と A_i との位置関係を考慮しなければならぬ。それについて

は、図42の6つの場合が考えらる。^{*} 各々は、分岐後、矢印で示した図になる。



(ii), (i) での A_i の向きが逆

(iv), (iii) での A_1 の向きが逆

(vi), (v) での上下が逆

図42

* 適当な方向からみれば、他の組み合わせを避けることが出来る。

要するにバンド A_i は、2枚に「ひきはがされる」。図 42 で $(i) \sim (i')$ の場合の個数はそれぞれ $e^{\pm(i)}, e^{\pm(i')}, m^{\pm(i)} = m^{\pm(i')}$ である。さて a), b) の場合を別々に調べる。

(a) の場合

A_i と全く同じバンド A_i', A_i'' ができるのは明らか。従って $n_i' = n_i'' = n_i$ 。

(b) の場合

図 42 より $e^{\pm(i')} = 2e^{\pm(i)}, m^{\pm(i')} = 4m^{\pm(i)} + e^{\pm(i)}$ であるから、

$$\begin{aligned}
 n_i''' &= \frac{1}{2} \{ e^{+i'} - e^{-i'} \} + m^{+i'} - m^{-i'} \\
 &= e^{+i} - e^{-i} + 4 \{ m^{+i} - m^{-i} \} + e^{+i} - e^{-i} \\
 &= e^{+i} - e^{-i} + 2 \{ m^{+i} - m^{-i} \} + e^{+i} - e^{-i} + 2 \{ m^{+i} - m^{-i} \} \\
 &= 2n_i + 2n_i = 2(n_i + n_i)
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

さて次に n_i の変化を調べる。(i は何でもよい)。

(a) の場合

$$n_i = n_i + L, n_i' = n_i' + L', n_i = n_i' \tag{2.28}$$

が成立して 11) が 12) へは連続的に生じるので $L = L'$ である。

従って (2.28) より $r_i = r_i'$ 。

(b) の場合

$$n_i = n_i + L, \quad n_i''' = n_i''' + L''', \quad n_i''' = 2(n_i + n_i) \quad (2.29)$$

が成立している。又、 $L-L(x_0 + \zeta' f_2, x_0)$ であり、分岐は連続的におこりから、

バンド B_2

$$B_2 = \{ \vec{x}_0(t) + s \vec{f}_2(t); 0 \leq t < T, -\zeta' \leq s \leq \zeta' \} \quad (2.30)$$

に対しても、 A_i と同じ議論が成り立つ。つまり \vec{f}_2 に対応する torsion number

を \tilde{n} とすれば定義より $\tilde{n} = L$ である。又、分岐後のバンド B_2''' についても

同様に、 $\tilde{n}''' = L'''$ 。従って n_i''' を導いたときと同様の議論より

$$\tilde{n}''' = 2(\tilde{n} + n_i) \quad \text{つまり} \quad L''' = 2(n_i + L) \quad (2.31)$$

(2.29), (2.31) より

$$\left. \begin{aligned} r_i''' - r_i &= n_i''' - L''' - (n_i - L) = 2(n_i + n_i) - 2(n_i + L) - (n_i - L) \\ &= n_i - L = r_i \end{aligned} \right\} (2.32)$$

即ち $r_i''' = 2r_i$..

以上で証明を終る。

コメント 自律系の場合は, $n_1 = n_2, r_1 = r_2$ であるから

$$\left. \begin{aligned} a) \quad n_i' = n_i'' = n_i = n_1 \\ r_i' = r_i'' = r_i = r_1 \end{aligned} \right\} (2.33)$$

$$\left. \begin{aligned} b) \quad n_i''' = 2(n_1 + n_i) = 4n_1 \\ r_i''' = 2r_1 = 2r_i \end{aligned} \right\} (2.34)$$

とある。

図43に 簡単結 例を示す。

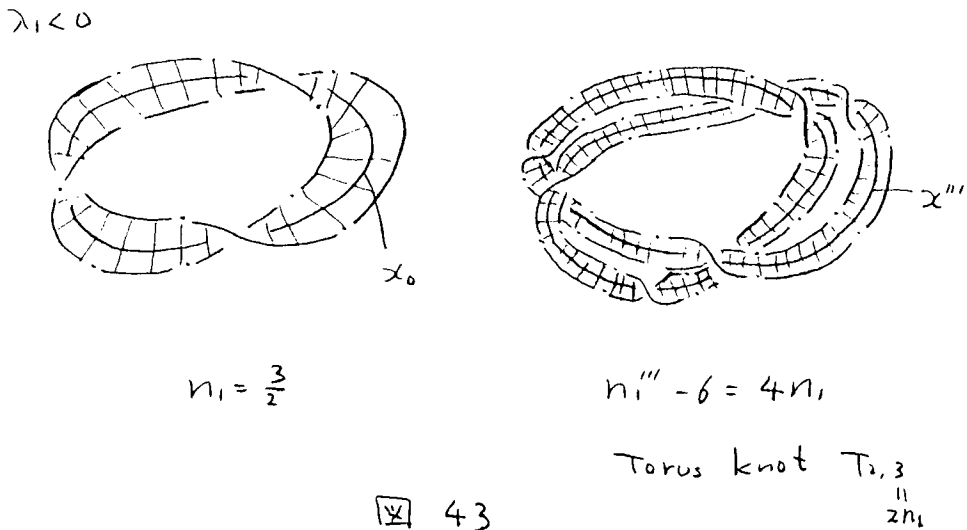
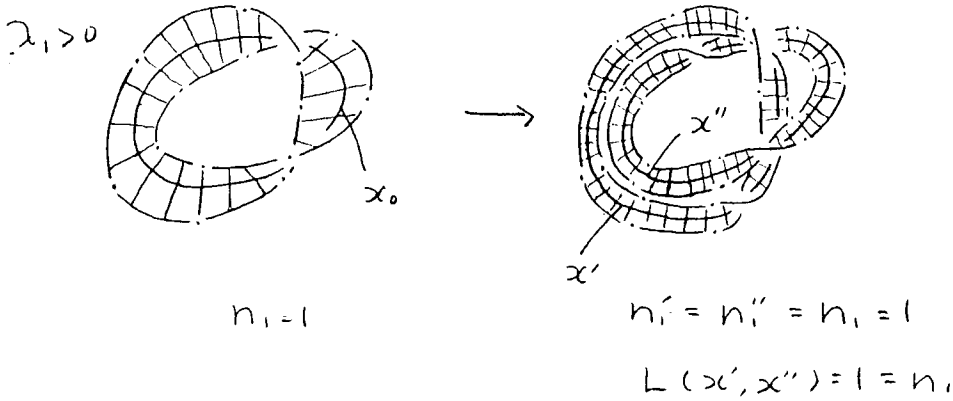


図 43

又、表 4 に 強制ローレンツ モデル $(0.5, (1.1))$ の 数値計算の結果を

示す。これは、これまでの結論を例証している。

period	$1T_0$		$2T_0$		$4T_0$		$8T_0$		$16T_0$
A: parameter	114.9	115.0	116.16	116.19	116.368	116.376	116.41	116.412	
r_1	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	
Δr_1		$-\frac{3}{2}$		$+\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$			
r_2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	-3	
Δr_2		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$			
n_1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	14	$\frac{25}{2}$	50	$\frac{101}{2}$	202	
n_2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	12	$\frac{23}{2}$	48	$\frac{99}{2}$	200	
$L(x_0 + \xi' f_2, x_0)$	1	3	3	13	13	51	51	203	
Knot type	trivial	trivial		$T_{2,2}$		*		*	

表 4. $T_0 = \frac{2\pi}{B}$ ($=T_F$), $\Delta r_i = r_i(i) - r_i(f)$

$r_i(i), r_i(f)$ は、固有値が正、負のときの r_i の値

イタリック体の部分は、 $n_i = n_i + L$ より計算。

* 部分は 1 周毎 2 回計算。

2-3. 倍周期分岐のカスケード現象(2^n分岐)の領域における周期解の位相

構造の successive な変化

この節では 2^n 分岐が生じている 110 x-タ-領域での torsion number n_i, relative torsion number r_i の変化について議論する。3次元 flow 系において、

1次元写像 $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$ の場合の 2^n 分岐のメカニズムと同様な現象が

生じるので、まず 1次元写像について考える。*) 2^k 周期解の onset point を

$\tilde{\lambda}_k < \lambda$, critical point \bar{x} が 2^k 周期解に一致する場合 (super stable point) を

λ_k とすれば、写像 f^{2^k} は、図 44 のように変化して行く。

\bar{x} に一番近い 2^k 周期点を

$x_0^{(k)}$ とすれば、①~③ については、

$x_0^{(k)}$ は左向きに動き、 \bar{x} を、

横切ることにより、傾きは $\frac{d}{dx} f^{2^k}(x_0^{(k)}, \lambda)$

が正から負に変化し、 $\lambda = \tilde{\lambda}_{k+1}$

で 2^{k+1} 周期解が安定な解

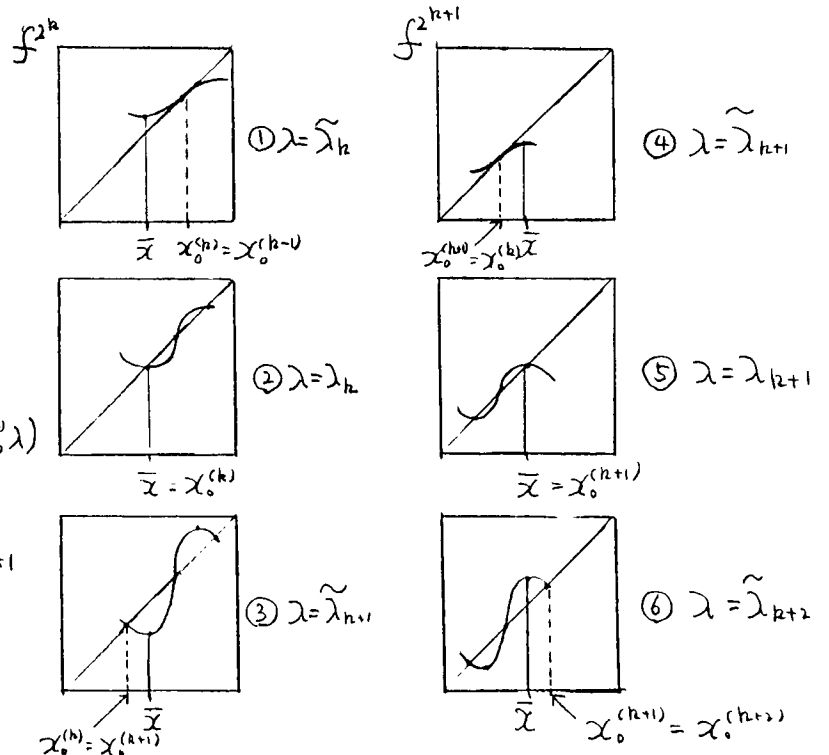


図 44

*) P13 参照。

として現われる。次に④~⑥では、 $\lambda_0^{(h)}$ は、今度は右向きに動き、 \bar{x} を横切

*)
 る。このプロセスが繰り返されることにより、 2^k 分岐が生じる。図45。

次に3次元flow系を考える。 μ_k を

周期 $T^{(k)}$ の周期解の onset point

とする。このとき、 $dS^{(t_0+T^{(k)}, t_0)} \equiv dM^{(k)}$ **)

の固有値 $\lambda_1^{(k)}$ は、 $\lambda_1^{(k)}(\mu_k) = +1$ で

あり torsion number $n_1^{(k)}(\mu_k)$ は 整数

である。この解が倍周期分岐を生ずる

ためには、 $\lambda_1^{(k)}(\mu_{k+1}) = -1$ と仮定する

ならば (2.11) の如く $\lambda_i \neq 0$ であるから、 $\lambda_1^{(k)}(\mu)$ は μ の $10^3 \times 10^{-2}$ 領域

で複素数になり、実部が $正 \rightarrow 0 \rightarrow 負$ と変化することにより、 $\lambda_1^{(k)}$ は負の

実数となる。(図16, 17 参照)。 $2n_1^{(k)}(\mu_{k+1} - 0)$ は奇数である。さてこれから

は 3次元自律系 又は 2次元非自律系 (但し時間に関して周期的とする)。

*) スケール因子 α が負であることと関連する。

***) 2^k 周期解が安定な領域での量は全て文字 (k) をつける。

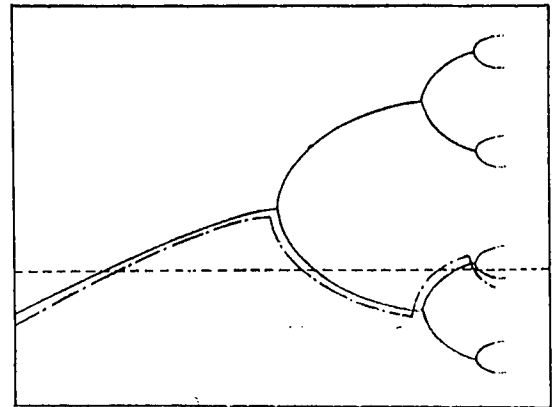


図45. 1点全真系, $\lambda_0^{(k)}$
 実線, $\lambda_i^{(k)}$
 点線, critical point \bar{x}
 縦軸, 座標 x
 横軸 $10^3 \times 10^{-2}$

これは、3次元空間 $T^1 \times R^2$ 上の自律系とみなせる) に話を限る ^{*)}

$\lambda_1^{(k)}$ が複素数になるパラメータ領域では軌道のまわりのベクトル場は回転的 (即ち $M^{(k)}$ のみでフォーカス) である。このとき固有ベクトルの実部

或は虚部は $T^{(k)}$ 時間後にもとに戻るとある角度だけ回転する。そして、

$\lambda_1^{(k)} < 0$ の領域で半転する。この変化を記述するために、rewinding number

$\Delta n_1^{(k)}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \Delta n_1^{(k)} &= n_1^{(k)}(i) - n_1^{(k)}(f) \quad ***) \\ &= r_1^{(k)}(\mu_{k+0}) - r_1^{(k)}(\mu_{k+1}-0) + L^{(k)}(\mu_{k+0}) - L^{(k)}(\mu_{k+1}-0) \quad (2.35) \\ &\equiv \Delta r_1^{(k)} + \Delta L^{(k)} \end{aligned}$$

このとき、次式が成立する。

$$\Delta n_1^{(k)} = (-1)^k \frac{l}{2} \quad \text{これはある整数} \quad (2.36)$$

これは、次のように考えることができる。

*) 3次元非自律系は本質的に4次元であり、今のところ3次元以上

の系では位相的性質を記述する適当な量を見出してはいない。但し

3次元非自律系でも、ここまでの議論は妥当である。

**) $\lambda_1^{(k)} > 0$ のとき $n_1^{(k)}(i)$, $\lambda_1^{(k)} < 0$ のとき $n_1^{(k)}(f)$ とする。P54 注意1 参照。

2nd order bifurcationが生じているパラメータ領域では flow のようすは、近似的に
'Paper Sheet Model'⁵⁷⁾ で記述することができる。図46。

線分 AB は 引き伸ばされて折りたたまれ
もとの線分上に重ねられる。従ってこれは一枚の
Sheet ではなく無限個の Sheet が重なっている。
重なりを無視すれば AB から AB への写像は、

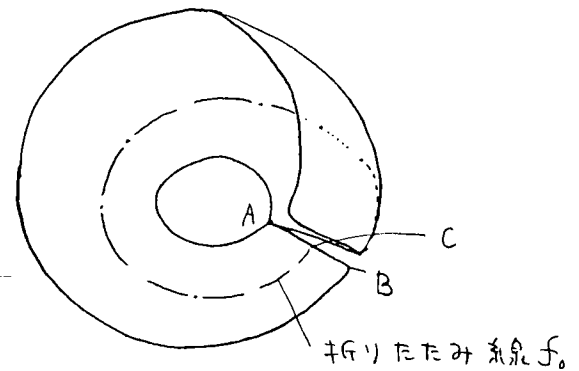


図46. Paper Sheet Model

図47のようになる。control point C が

折りたたみ線 f_0 に対応する。1次元の場合
と同様に 周期解 $x^{(k)}$ と f_0 との位置関係
が相空間の様子。即ち固有値 $\lambda^{(k)}$ の

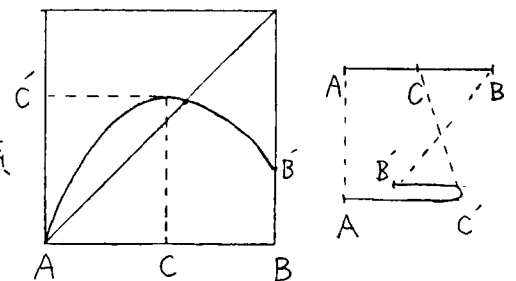


図47

タイプを決める。1次元の場合の山の高さの変化は 折りたたむ位置の変化
に対応し それにより 周期解と折りたたみ線 f_0 の位置関係が変化して、

*) 安定性が変化する。例えば 図48の左上から右上へ変化する途中で
周期解が f_0 を横切るか そのとき 完全な折りたたみではないことを反映

*) 或いは、周期解の半径が単調に増大していくと考えられることもできる。従って

周期はのびる。数値計算では、確かにそうなる。

して、これに対応するパラメータの近傍では
 $\lambda_1^{(k)}$ は複素数になり local な flow は
 回転的になる。この領域の前後で、固有
 ベクトルは sheet に対して $2\pi \frac{l}{2}$ だけ
 回転する。分岐がおこった後 新しい解

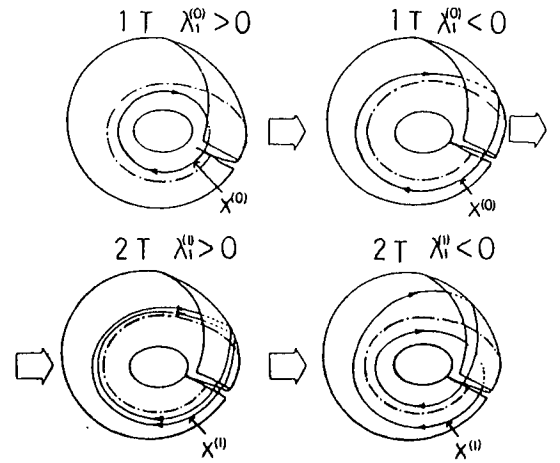


図 48

$x^{(k+1)}$ と f_0 との相対間隔は狭まり、図 48

の下半分から明くかのように 上半分とは逆向きに f_0 を通過し、その前後で、

$e_1^{(k+1)}$ は $-2\pi \frac{l}{2}$ だけ回転する。図 49。この繰り返り返しにより、rewinding

number の符号変化 (2.36) が実現される。

l の値は系の大域的構造を反映している、

即ち折りたたみ構造の正味の数(つまり、

Sheet の折りたたみか 運動方向に対して、右側

のとき正、左側の場合と相反としたとき、それら

の総和) に等しい。generic には $|l|=1$ である。

さて、 $n_1^{(k)}(i)$ と $n_1^{(k-1)}(f)$ の関係は (2.34) より、

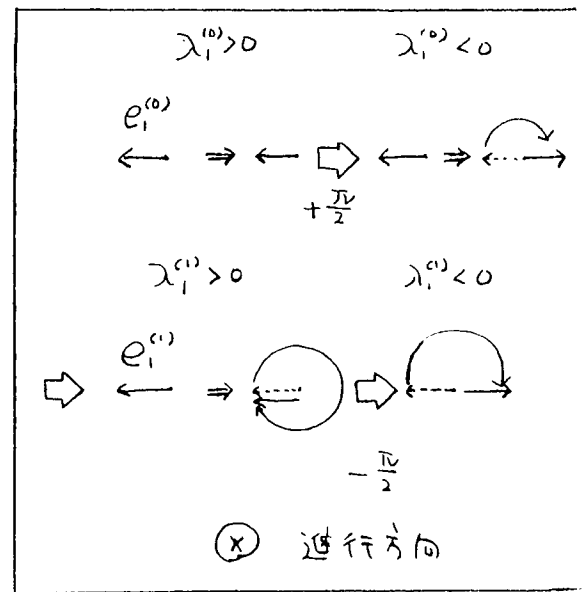


図 49

$$n_i^{(h)}(f) = 4 n_i^{(h-1)}(f) \quad (2.37)$$

(2.36), (2.37) を解くと一般解が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} n_i^{(h)}(f) &= T_h^2 \left[n_i^{(0)}(f) - \frac{2\ell}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{2\ell}{5} \right] \\ n_i^{(h)}(f) &= T_h^2 \left[n_i^{(0)}(f) - \frac{2\ell}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{\ell}{10} \right] \end{aligned} \right\} (2.38)$$

更に $\Delta L^{(h)} = 0$ を仮定すれば*)

$$\left. \begin{aligned} r_i^{(h)}(i) &= T_h \left[r_i^{(0)}(i) - \frac{\ell}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\ell}{3} \right] \\ r_i^{(h)}(f) &= T_h \left[r_i^{(0)}(i) - \frac{\ell}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\ell}{6} \right] \\ L^{(h)} &= T_h \left[T_h \left(n_i^{(0)}(i) - \frac{2\ell}{5} \right) - r_i^{(0)}(f) + \frac{\ell}{3} \right] + (-1)^k \frac{\ell}{15} \end{aligned} \right\} (2.39)$$

と得る。ここで $T_h = 2^h$ 。(2.38), (2.39) から 2^h 分岐の際の n_i, r_i の一般規則で

ある。次に mean relative torsion number $\langle r_i \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle r_i \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_h} r_i^{(h)}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_h} r_i^{(h)}(f) = r_i^{(0)}(i) - \frac{\ell}{3} \quad (2.40)$$

又 mean torsion number $\langle n \rangle$ は

*) 2^k 周期解と 2^{k-1} 周期解の安定領域の比は $1/\delta$ で $\delta \approx 4.669$ である

から倍周期分岐が進んでゆくと、 2^k 周期解の安定領域は著しく小さく

なり、2倍く。又、 2^h 分岐のとき、系の大域的方向位相構造は Paper Sheet Model

で近似され、 $1/\delta > \delta - 1$ を変えても殆んど変化しない。以上より、ある k_0 以上

で $n^{(h)}$ の形状変化は殆んどなく従って $L^{(h)}$ は変化しない。簡単のため $k_0 = 0$ とした。

$$\langle n \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} n_i^{(k)}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} n_i^{(k)}(f) = n_i^{(0)}(i) - \frac{2\ell}{5} \quad (2.41)$$

で定義される。2ⁿ分岐集積後はカオスになると考えられ、従って $\langle n \rangle$ は、アトラクター上の軌道が、アトラクターを1周する間にその接ベクトルの軌道に相対的な平均回転数を与える。又 $\langle n \rangle$ は、軌道とその接ベクトルのつくる軌道との平均周期当りの平均のリンク数である。これらの量はより一般的に定義されるがそれは後の節(2-5)で行おう。

2-4. 数値計算 その1 (周期解領域)

この節では、2次元非自律系、3次元自律系における数値計算の結果を示す。

具体的には a) 強制ブラッセレイター⁵³⁾ b) オリジナルローレンツモデル

c) Rössler モデル⁵⁸⁾ において、2次元分岐の生じるパラメータ領域⁵⁷⁾を、 n_i , r_i , L を調べた。

a) 強制ブラッセレイター 表5

方程式は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = x^2 y - (1+B)x + A + a \cos \omega t \\ \frac{d}{dt} y = -x^2 y + Bx \end{cases} \quad (2.42)$$

であり、 $a=0.05$, $A=0.4$, $B=1.2$ とし、 ω をパラメータに選んだ。

又 $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 0, 1)$ とした。^{*} 表5でイタリ...7体の

の数字は、関係式 $n_i = r_i + L$ から計算された値である。^{**)}

$\omega = 0.7$ では、 $n_1 = -\frac{3}{2}$ であるので倍周期分岐で Torus knot $T_{2,3}$

が生ずる。図50。 ω を上げると $\omega \approx 0.7878$ でカオスになる。

*) 座標は (t, x, y) 。

**) b), c) においても同様。

この場合は、 $\ell=1$, $n_1^{(0)}(i)=-1$, $n_1^{(0)}(f)=-2$ であり, $\langle n_1 \rangle = -\frac{1}{3}$, $\langle n_1 \rangle = -\frac{2}{5}$ となる。つまり アトラクタ上での軌道のまわりの周期 ($T_F \frac{2\pi}{\omega}$) 当りの平均回転角は $-2\pi \cdot \frac{1}{3}$ (ラジアン) であり, 接ベクトルとの平均リンク数は $-\frac{2}{5}$ である。又, 正味の折りたためみの回数は 1 回である。 ($\ell=1$)

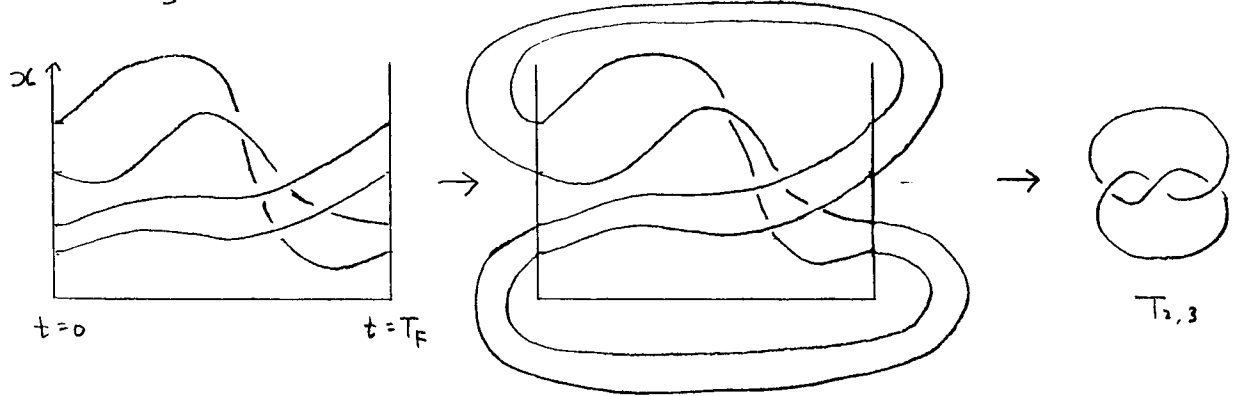


図 50 $\omega = 0.72$

	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$	
	$\omega = 0.6(i) \omega = 0.7(f)$		$\omega = 0.72(i) \omega = 0.76(f)$		$\omega = 0.772(i) \omega = 0.782(f)$		$\omega = 0.7847(i) \omega = 0.7866(f)$	
$n_1^{(k)}$	-2	-3/2	-6	-13/2	-26	-51/2	-102	-205/2
$r_1^{(k)}$	-1	-1/2	-1	-3/2	-3	-5/2	-5	-11/2
$\Delta r_1^{(k)}$		-1/2		1/2		-1/2		1/2
$L^{(k)}$	-1	-1	-5	-5	-23	-23	-97	-97
knot type	trivial		$T_{2,3} = \text{trefoil}$					
	$k=5$		$k=6$		$k=7$			
	$\omega = 0.787(i) \omega = 0.7874(f)$		$\omega = 0.7876(i) \omega = 0.78767(f)$		$\omega = 0.787705(i) \omega = 0.78772(f)$			
$n_1^{(k)}$	-410	-819/2	-1638	-3277/2	-6554	-13107/2		
$r_1^{(k)}$	-11	-21/2	-21	-43/2		-85/2		
$\Delta r_1^{(k)}$		-1/2		1/2		-1/2		
$L^{(k)}$	-399	-399	-1617	-1617	-6511	-6511		

表 5 $\Delta r_1^{(k)} \equiv r_1^{(k)}(i) - r_1^{(k)}(f)$

b) オリジナル・ローレンツ・モデル 表6

方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -\sigma(x-y) \\ \frac{d}{dt}y &= rx - y - xz \\ \frac{d}{dt}z &= xy - bz \end{aligned} \right\} (2.43)$$

である。 $\sigma=16$, $b=4$ とし, r はパラメータと選んだ。この系は $r=\infty$ で

保存系である。 $r \approx 493$ では 対称なリミットサイクルが安定であり

それは trivial knot で $n_1=1$, $r_1=1$, $L=0$ である。 $r \approx 493$ で

ピッチfork分岐を おこして 2つの解が生じ、各々は互いに他の

対称解に対応する。 $n'_1=1$, $r'_1=1$, $L'=0$ であり、分岐後も

trivial knot. 互いのリンク数は 1 である。パラメータを下げて

ゆくと $r \approx 420$ で 周期解の形状が 対称な形からかなりはずれ

L が 0 から 1 に変わる。ここで n_1 は固有値が実数の間は不変で

あるから 1 のまま、従って $n_1=r_1+L$ より $r_1=0$ となる。 r が

420 以下で 2分岐が生じ $L^{(2)}$ は 2^k 周期令復域で一定になる。

$r \approx 400$ で rewinding が生じて $n_1=\frac{1}{2}$, $r_1=-\frac{1}{2}$, $L=1$ とおき $\Delta n_1=\Delta r_1$

$=\frac{1}{2}$ である。 $r \approx 360$ で 最初の倍周期分岐が生じるが、2周期解

は $T_{2,1}$ 即ち trivial knot である。 $r = 340$ では $n_1 = \frac{5}{2}$ となるため 2 回目
の倍周期分岐後始めに trivial ではない結び目を持つ周期解が生
じる。 その結び目型は Torus knot $T_{2,5}$ (図 51) である。 それ以後、
ますます複雑な結び目になる。 r を更に減少させると $r \approx 333.0$
で非対称カオスになる。^{*} 今の場合、 $\ell = 1$, $r_1^{(0)}(i) = 0$, $n_1^{(0)}(i) = 1$ であ
るから $\langle r_1 \rangle = -\frac{1}{3}$, $\langle n_1 \rangle = \frac{3}{5}$ となる。 正味の折りた戻し数は 1。

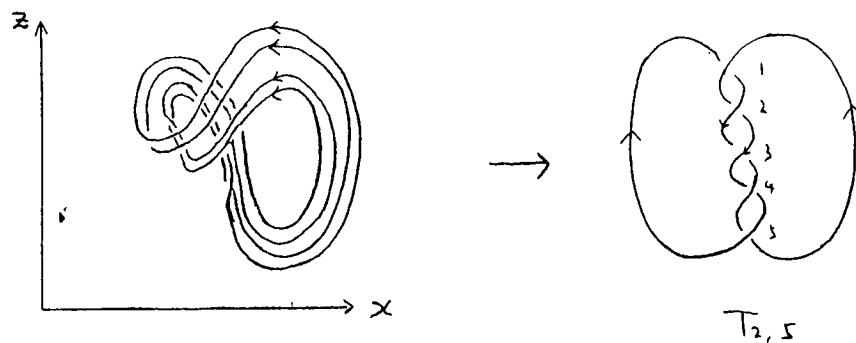


図 51 $r = 334.5$ (4 周期解)

	(s)		(a)	k = 0 (a)			k = 1 (a)		k = 2 (a)	
	r = 600	r = 500	r = 480	r = 420 (l)	r = 400 (f)	r = 360 (f)	r = 356 (l)	r = 340 (f)	r = 388 (l)	r = 334.5 (f)
$n_1^{(k)}$	1	1	1	1	1/2	1/2	2	5/2	10	19/2
$r_1^{(k)}$	1	1	1	0	-1/2	-1/2	-1	-1/2	-1	-3/2
$\Delta r_1^{(k)}$					1/2			-1/2		1/2
$L(k)$	0	0	0	1	1	1	3	3	11	11
knot type	trivial			trivial			trivial			$T_{2,5}$
	k = 3 (a)		k = 4 (a)							
	r = 334 (l)	r = 333.5 (f)	r = 333.4 (l) r = 333.3 (f)							
$n_1^{(k)}$	38	77/2	154	307/2						
$r_1^{(k)}$	-3	-5/2	-5	-11/2						
$\Delta r_1^{(k)}$		-1/2		1/2						
$L(k)$	41	41	159	159						

表 6 (s): 対称解 (a): 非対称解

*). これについては 2-7 節で再びとりあつた。

(c) Rössler モデル 表 7

方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= -(y+z) \\ \frac{d}{dt} y &= x+ey \\ \frac{d}{dt} z &= f+(x-\mu)z \end{aligned} \right\} (2.44)$$

但し $e=f=0.2$ $\mu=0.5$ $\mu < 1$ $x=0$ 。表 7 より、 $l=1$, $n_1^{(0)}(i)=0$,

$n_2^{(0)}(i)=0$ であるから $\langle n_1 \rangle = -\frac{1}{3}$, $\langle n_2 \rangle = -\frac{2}{5}$ となり、正味の折りたた

み数は 1。この系は 始め n_1, n_2, L が全 20 であり、最も '簡単な'

位相構造を持つと見えこの事実。S.A の phase portrait

も単純であり、Paper Sheet Model (図 46, 48) と殆ど同じである。

図 52.

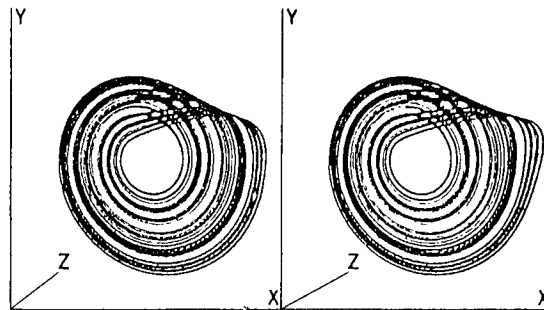


図 52. Stereoscopic Phase Portrait
 $\mu=5.7$ (文献 58 より).

k	0		1		2		3		4	
μ	1.0	2.6	3.0	3.5	3.9	4.1	4.15	4.18	4.19	4.2
$n_1^{(k)}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-6	$-\frac{13}{2}$	-26	$-\frac{57}{2}$	-102	$-\frac{205}{2}$
$r_1^{(k)}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-5	$-\frac{11}{2}$
$\Delta n_1^{(k)}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\Delta r_1^{(k)}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$L^{(k)}$	0	0	-1	-1	-5	-5	-23	-23	-99	-99
knot type	trivial		trivial		$T_{2,3}$		*		*	

表7

以上 a), b), c) の計算結果は、全2 前節までの結論を例証している。

2-5. ストレージ アトラクターの位相的特徴づけ

ここでは、3次元非自律系の場合も含めて議論する。

まず、アトラクター上の2つの軌道のかみあいを記述するために Gauss formula

を閉じていた2軌道にまで拡張し、時刻 T_1, T_2 までの total linking number $n(T_1, T_2)$ を次のように定義する。

$$n(T_1, T_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{T_1} dt_1 \int_0^{T_2} dt_2 \frac{(\vec{x}_2(t_2) - \vec{x}_1(t_1), \dot{\vec{x}}_1(t_1) \times \dot{\vec{x}}_2(t_2))}{\|\vec{x}_1(t_1) - \vec{x}_2(t_2)\|^3} \quad (2.45)$$

$T_1, T_2 \rightarrow \infty$ での漸近的振舞と

$$n(T_1, T_2) \approx \bar{n} T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2} \quad (T_1, T_2 \gg 1) \quad (2.46)$$

とすると $n(T, T) \approx \bar{n} T^{\nu_1 + \nu_2} \equiv \bar{n}_L T^{\nu_L}$, かつ $\nu_L = \nu_1 + \nu_2$ となり、

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &\approx \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T_1, T_2)|}{\ln T_1} && (T_2 \gg 1) \\ \nu_2 &\approx \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T_1, T_2)|}{\ln T_2} && (T_1 \gg 1) \\ \bar{n} &\equiv \lim_{\substack{T_1 \rightarrow \infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \frac{n(T_1, T_2)}{T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2}} \\ \nu_L &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T, T)|}{\ln T} \\ \bar{n}_L &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T, T)}{T^{\nu_L}} \end{aligned} \right\} (2.47)$$

と定義する。 \bar{n}_L は linking coefficient, ν_L は linking index とする。

* x_1, x_2 は S.A.F. の 2つの軌道

更に時刻 T までの relative torsion number $r(T)$ を次式で定義する。

$$r(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\alpha_2 \alpha_3 - \dot{\alpha}_2 \alpha_3}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} dt \quad (2.48)$$

notation は (2.8) と同じ。更に、 $r(T) \approx \bar{r} T$ ($T \rightarrow \infty$) とおく。

$$\bar{r} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{r(T)}{T} \quad (2.49)$$

と定義する。これは、(2.40) 式の $\langle r_i \rangle$ の拡張であり、 $\bar{r} = \frac{\langle r_i \rangle}{\langle T \rangle}$ とする。

$\langle T \rangle$ は、3-トポクターを 1 周する平均の周期。Lyapunov 数は、接ベクトルの長さの指数関数的変化を測る量であるのに対し、 \bar{r} は軌道に相対的に、

接ベクトルの 回転 に関する情報を与える。時刻 T までの total torsion number $n(T)$ は、

$$n(T) = - \frac{1}{4\pi} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \frac{(\vec{y}_2(t_2) \cdot \vec{x}_1(t_1), \dot{\vec{x}}_1(t_1) \times \dot{\vec{y}}_2(t_2))}{\|\vec{x}_1(t_1) - \vec{y}_2(t_2)\|} \quad (2.50)$$

で定義される。但し $\vec{y}_2(t_2) \cdot \vec{x}_1(t_2) + \frac{\vec{w}_2(t_2)}{\|\vec{w}_2(t_2)\|}$ であり、 x_1 は S.A 上の軌道

$\vec{w}(t)$ は reference state $\vec{x}_1(t)$ とした (2.4) 式の解。 $n(T) \approx \bar{n}_t T^\eta$ ($T \rightarrow \infty$)、つまり

$$\left. \begin{aligned} \eta &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T)|}{\ln T} \\ \bar{n}_t &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T)}{T^\eta} \end{aligned} \right\} (2.51)$$

と定義し、 η を torsion index, \bar{n}_t を torsion coefficient とする。

\bar{n}_t は $\langle n \rangle$ ((2.41)式) の拡張であり、後でみるように $n=2$ と思われるので、

$\bar{n}_t = \frac{\langle n \rangle}{\langle T \rangle^2}$ の関係が成立する。つまり \bar{n}_t は軌道と変分ベクトルのつくる軌道との

かゝりあり、いかにいへば、S.A.上の軌道の近傍の平均的値として記述する。

以上種々の量を定義したが、その定義の仕方の‘極限の存在’や、

‘初期条件へ依存しないこと’等については、数学的に証明していない。

しかし、次節で述べる数値計算の結果は、それらについて、傍証を与える。

2-6. 数値計算その2 (カオス領域)

カオス領域での位相的諸量の数値計算はかなり困難があり、数値積分の積分範囲もまともにやると大きくとることができ^{*}ない。以下での結果は、アトラクター上を約50周する時間範囲での計算に基づくものである。

① $\overline{\nu}_L$, $\overline{\nu}_R$ の計算

これらの量はオリジナルローレンツモデル、強制ローレンツモデルで

いくつかのパラメータの値に対して計算された。まずオリジナルローレンツ

モデルでは次の3つのパラメータで計算が行われた。

(i) $\sigma=10$, $b=2.6667$, $r=28$, (いわゆるローレンツ) アトラクター

(ii) $\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$, $r=116.3$, Manneville Pomeau の Intermittency

(iii) $\sigma=16$, $b=4$, $r=300$, 2分岐が集積した後の非対称カオスが

合体したタイプBの対称カオスに属した領域

図53の(a)~(c)に数値計算の結果を示す。図より得られた $\overline{\nu}_L$, $\overline{\nu}_R$ はそれぞれ

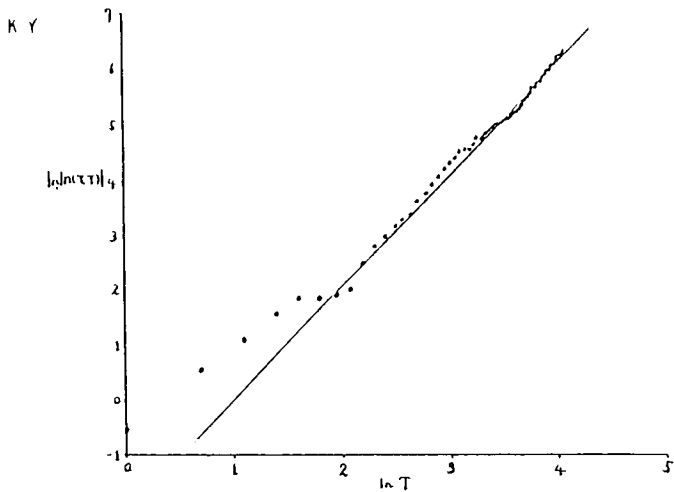
次のようになる。

*)(2.45), (2.50)の積分をモンテカルロ法で行えば積分範囲を大きくできる。

(i) $\sigma=10, b=2.6667, r=28$

$\gamma_L = 2.05, \bar{n}_L = 0.13$

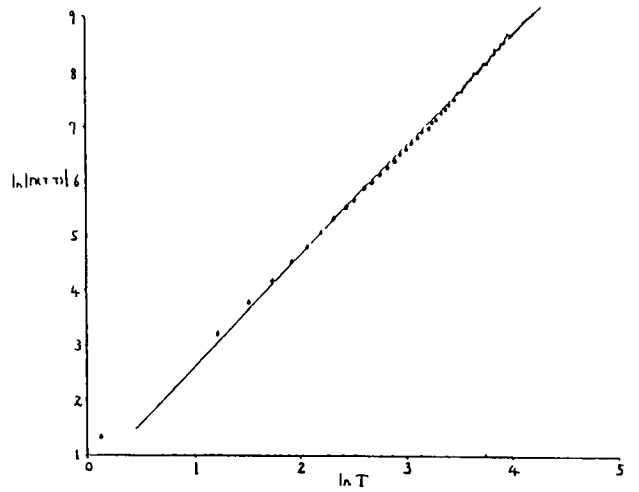
DEP



(a)

(ii) $\sigma=10, b=\frac{8}{3}, r=166.3$ 88

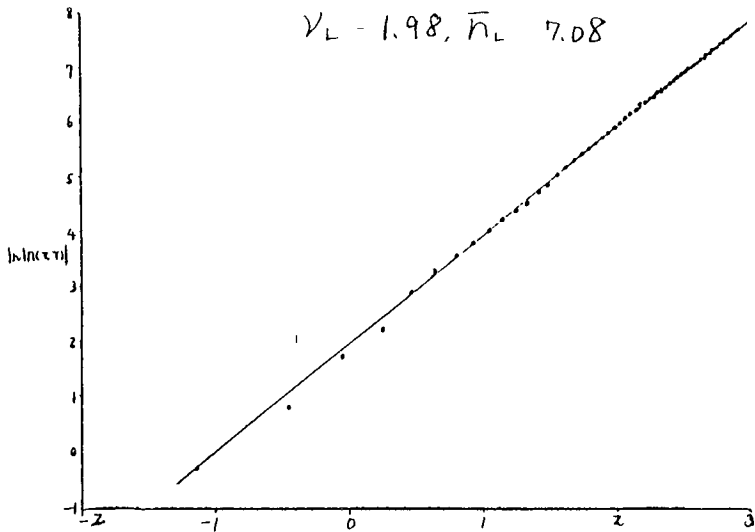
$\gamma_L = 2.02, \bar{n}_L = 1.79$



(b)

(iii) $\sigma=16, b=4, r=300$

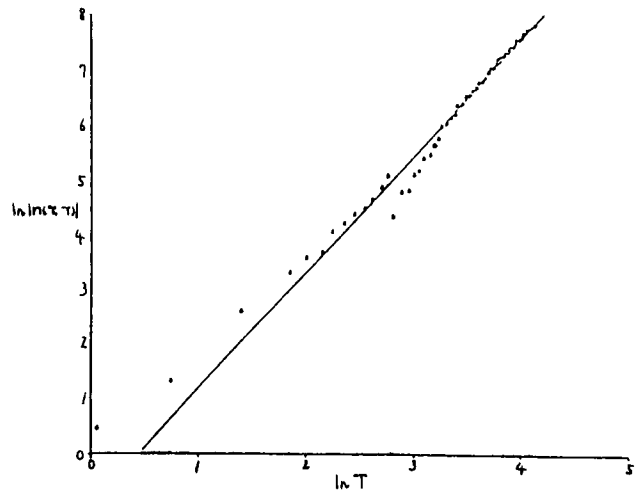
$\gamma_L = 1.98, \bar{n}_L = 7.08$



(c)

(iv) $A=116.45, B=6, \sigma=10, b=2.6667, r=28$

$\gamma_L = 2.15, \bar{n}_L = 0.38$

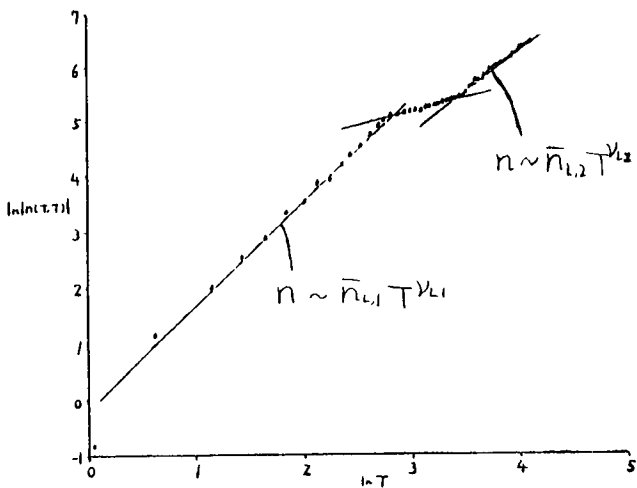


(d)

(v) $A=61, B=6, \sigma=10, b=2.6667, r=28$

$\gamma_{L1} = 1.85, \bar{n}_{L1} = 0.84$

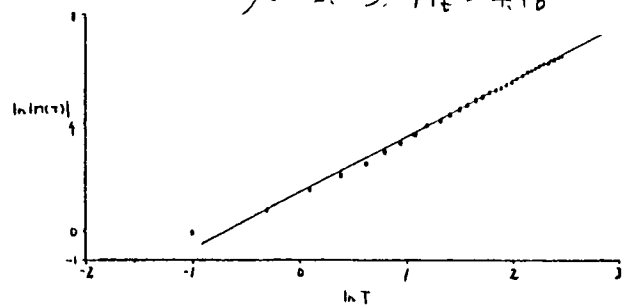
$\gamma_{L2} = 1.52, \bar{n}_{L2} = 1.22$



(e)

(vi-a) $\sigma=16, b=4, r=250$

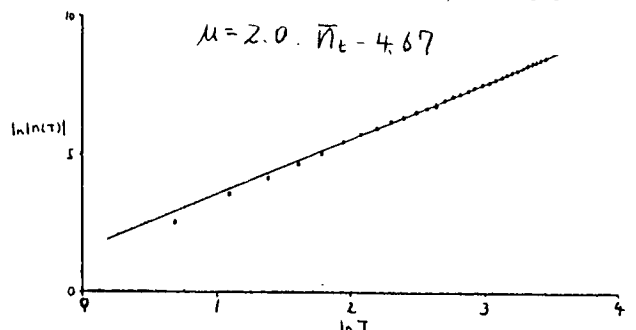
$\mu = 2.03, \bar{n}_t = 4.16$



(f)

(vi-b) $\sigma=16, b=4, r=250$

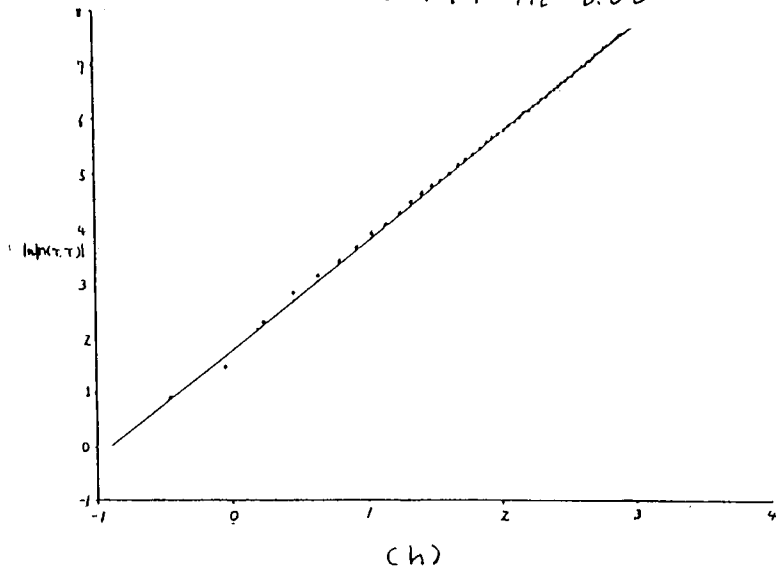
$\mu = 2.0, \bar{n}_t = 4.67$



(g)

(vii-a) $\sigma = 16, b = 4, r = 330$

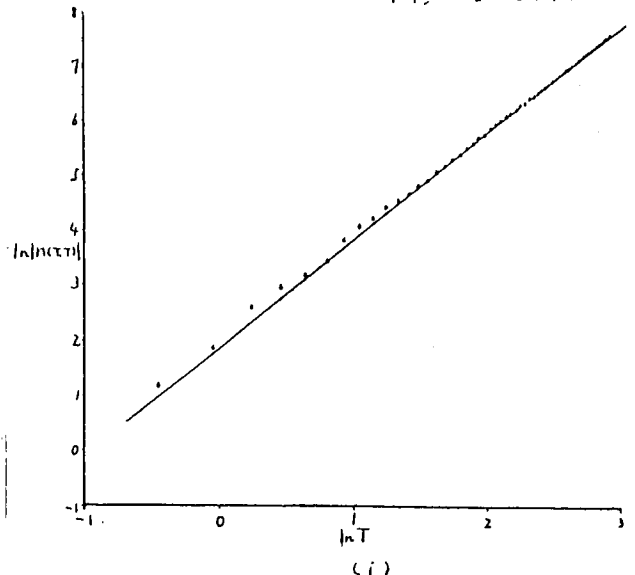
$\chi_L = 1.99, \bar{n}_L = 6.00$



(h)

(vii-b) $\sigma = 16, b = 4, r = 330$

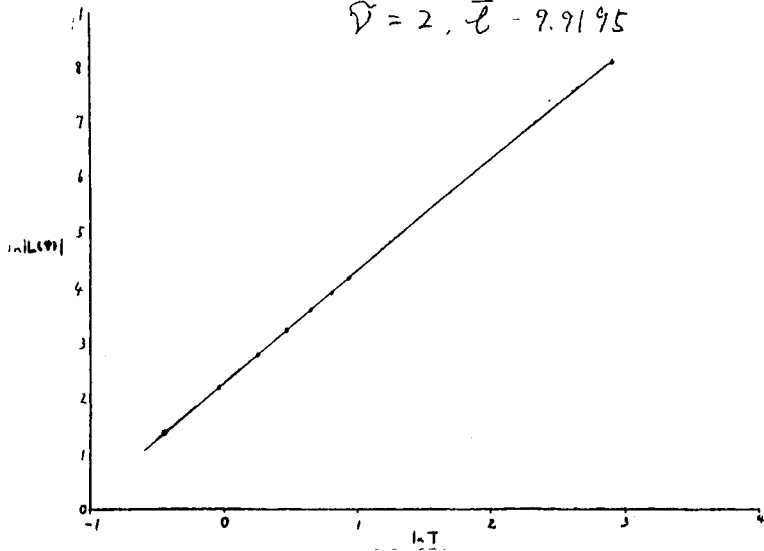
$\chi_L = 1.97, \bar{n}_L = 6.40$



(i)

(viii-a) $\sigma = 16, b = 4, r = 333.0$

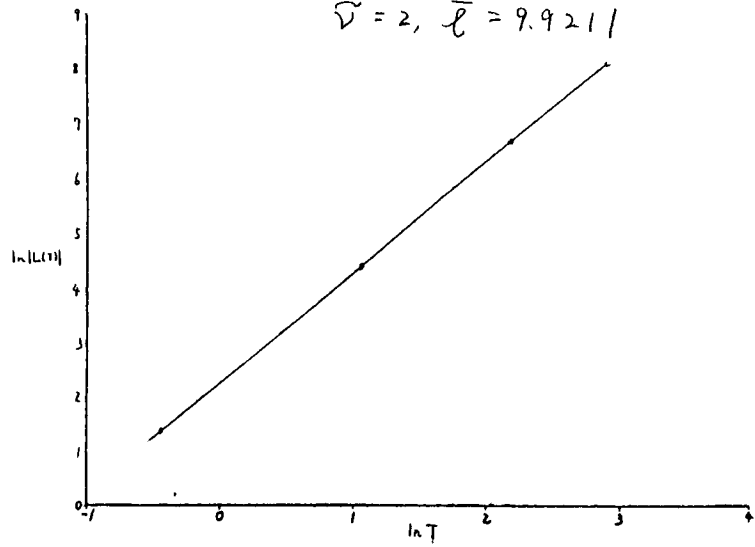
$\bar{D} = 2, \bar{\ell} = 9.9195$



(j)

(viii b) $\sigma = 16, b = 4, r = 333.0$

$\bar{D} = 2, \bar{\ell} = 9.9211$



(k)

この図では、散点しか plot してないが
 58個 a 点が全て直線上にのる。(k)も同様。

(i) $\nu_L = 2.05, \bar{n}_L = 0.13$

(ii) $\nu_L = 2.02, \bar{n}_L = 1.79$

(iii) $\nu_L = 1.98, \bar{n}_L = 7.08$

一から、 $\nu_L \approx 2$ と期待される。 (ii) の場合、 r が少し小さい値では 対称

リミットサイクルが安定であり、(図54) $n_1 = 2, r_1 = 0, L = 2$ である。単位時間

当たりの torsion number $\frac{n_1}{T_0^2}$ ($T_0 = 1.132864$ リミットサイクルの周期) と、 \bar{n}_L とが

比較されるべきであるが、Intermittency の場合は $\bar{n}_L \approx \bar{n}_L$ と考えられ、

$\frac{n_1}{T_0^2} = 1.56, \bar{n}_L = 1.79$ であるから、両者は連続的につながると期待される。

次に、強制ロレンツモデルでは、 $\sigma = 10, b = 2.6667,$

$r = 28$ として 次の 2 つの 1103 x 9 - 2" 計算された。

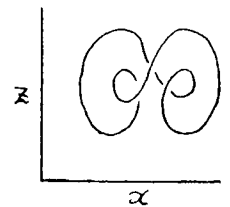


図 54

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 166$

(iv) $A = 116.45, B = 6.0,$ 2" 分岐集積後の

非対称カオス領域

(v) $A = 61.0, B = 6.0,$ 2次元 Lyapunov 数 L_2 が A の増加とともに

正から負に変化するときは、従って Kaplan-Yorke の公式によれば

Hausdorff 次元 D_H が減少して、 $D_H < 2$ に落ちる点。

図 53 の (d), (e) に示さぬように、data は必ずしも直線上に

のらぬから ν_L, \bar{n}_L を評価すると。

$$(iv) \nu_L = 2.15, \bar{n}_L = 0.38$$

$$(v) \nu_{L1} = 1.85, \bar{n}_{L1} = 0.84, \nu_{L2} = 1.52, \bar{n}_{L2} = 1.22$$

と成る。(v)の場合は, dataの最初の部分と最後の部分を各々評価した。

これは いずれも ν_L とは異なるであり (v)においては収束性さえ

確かでない。強制ローレンツ系が本質的に4次元の系であり、

高次元系で系び目ヤリシクが well-defined ではないせいも

*)
 して成る。

② μ, \bar{n}_0 の計算

定義から $\mu = 2$ と期待されるが 計算の結果も そう成っている。

$$(vi-a) \text{ デジタル ローレンツ モデル } a=16, b=4, r=250,$$

この値は 対称リミットサイクル(図55)から Intermittency

**)
 へ 遷移した後に 対応する。

$$(vi-b) (vi-a) \text{ と同じパラメーター 初期値が異なる。}$$

結果は 次のようになる。図53, (f), (g)。

*) 積分時間が十分長く 収束しているとも考えられる。

**) $r=248.4$ は周期 $2T_0$ ($T_0=0.36699866$) のリミットサイクルで, $\nu_1=0.81$, $r=248.5$

... は Intermittency.

(vi-a) $\mu = 2.03, \bar{n}_c = 4.16$

(vi-b) $\mu = 2.0, \bar{n}_c = 4.67$

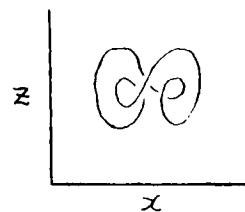


図 55

対称リミット・サイクルは $n_c = 3, r_1 = 1, L = 2$ であり.

$\frac{n_c}{T_c} \approx 5.57$. \bar{n}_c の差は 小さいとは言えず” 1103x-ター 変化とともに

急激にリンク数が減少すると考えられる。

③ 初期値依存性

これについては、既に (vi-a) (vi-b) のみならず、 μ に関しては 依存しない

ことが結論できる。 \bar{n}_c については、誤差が exponential で拡大するため、

大きい差にたどり着くと考えられ 誤差の範囲で一定だとみられる。 \bar{n}_L, \bar{n}_R に

については、次の系で計算を行った。

(vii-a) オリジナル・ローレンツ・エタール, $a=16, b=4, r=333.0, 2$ 分岐

集積直後のカオス領域

(vii-b) (vii-a) と同じ 1103x-ター 初期値が異なる。

結果は 次のようになる。 図 53, (h), (i)。

(vii-a) $\bar{n}_L = 1.99, \bar{n}_R = 6.00$

(vii-b) $\bar{n}_L = 1.97, \bar{n}_R = 6.40$

誤差の範囲で $\nu_L = 2$, 又 \bar{n}_L も一定とみられる。又 2^n 分岐の極限值

$$\text{として } \langle n_i \rangle \text{ は, } \langle n_i \rangle = \frac{3}{5} \text{ であり, } \frac{\langle n_i \rangle}{\langle T \rangle^2} \approx \frac{\langle n_i \rangle^*}{T_0^2} = 5.96 \text{ であり, } \bar{n}_L \text{ と } \frac{3}{5} \text{ と}$$

一致している。

④ リンク数

2つの S.A のリンク数を次のように定義する。

$$L(T_1, T_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{T_1} dt_1 \int_0^{T_2} dt_2 \frac{(\vec{x}_2(t_2) - \vec{x}_1(t_1)) \cdot \dot{\vec{x}}_1(t_1) \times \dot{\vec{x}}_2(t_2)}{\|\dot{\vec{x}}_1(t_1) - \dot{\vec{x}}_2(t_2)\|} \quad (2.52)$$

ここで x_1, x_2 は、それぞれ S.A. 上の軌道。 $L(T_1, T_2) \approx \bar{e} T_1^{\tilde{\nu}_1} T_2^{\tilde{\nu}_2}$ ($T_1, T_2 \gg 1$)

とすると、 $L(T, T) \approx \bar{e} T^{\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2} \equiv \bar{e} T^{\tilde{\nu}}$, 且つ $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2$ 。

$\bar{e}, \tilde{\nu}$ を次の系で計算した。

(viii-a) オリジナル・ローレンツ モデル, $\sigma=16, b=4, r=333.0$

(viii) と同じ値。

(viii-b), (viii-a) と同じ系で初期値が異なる。

系結果は次のようになる。図 53. (j), (k)。

$$(viii-a) \quad \tilde{\nu} = 2, \quad \bar{e} = 9.9195$$

$$(viii-b) \quad \tilde{\nu} = 2, \quad \bar{e} = 9.9211$$

*). T_0 として、 $r=333.3$ ($16T_0$) の周期の $\frac{1}{16}$ 倍を用いた。 $T_0 = 0.3173540$ 。 $\frac{\langle n_i \rangle}{\langle T \rangle^2}$ と

比較されるべき量は、 \bar{n}_L であるか。 上記の結果より $\frac{\langle n_i \rangle}{\langle T \rangle^2} \approx \bar{n}_L \approx \bar{n}_L$ と予想される。

収束性は明らかであり、初期値依存性が無いこともわかる。平均周期
 当りのリンク数は $\bar{e} \langle T \rangle^2 \approx \bar{e} T_0^2 = 0.9371$ (aの場合), 0.9372 (bの場合)

で約1回である。これは、図56より明らかである。

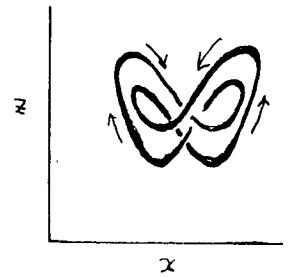


図56.

以上の結果をまとめると次のようになる。

1. 自律系の場合 $\nu_L = 2, \nu = 2$, 非自律系の場合は、収束性が不明。

2. ^{*} z^n 分岐集積直後のカオスでは, $\bar{n}_L \approx \bar{n}_t \approx \frac{\langle n_1 \rangle}{\langle T \rangle^2}$, 即ち, 周期解

領域の位相構造を反映している。Intermittency 生成直後については

同様。

3. $\tilde{\nu} = 2$.

4. $\bar{n}_L, \bar{n}_t, \bar{e}$ の初期値依存性は無い。(有意の相異が認められない)。

3については、解の一貫性、flowの連続性より殆ど明らかであり、4は誤差の

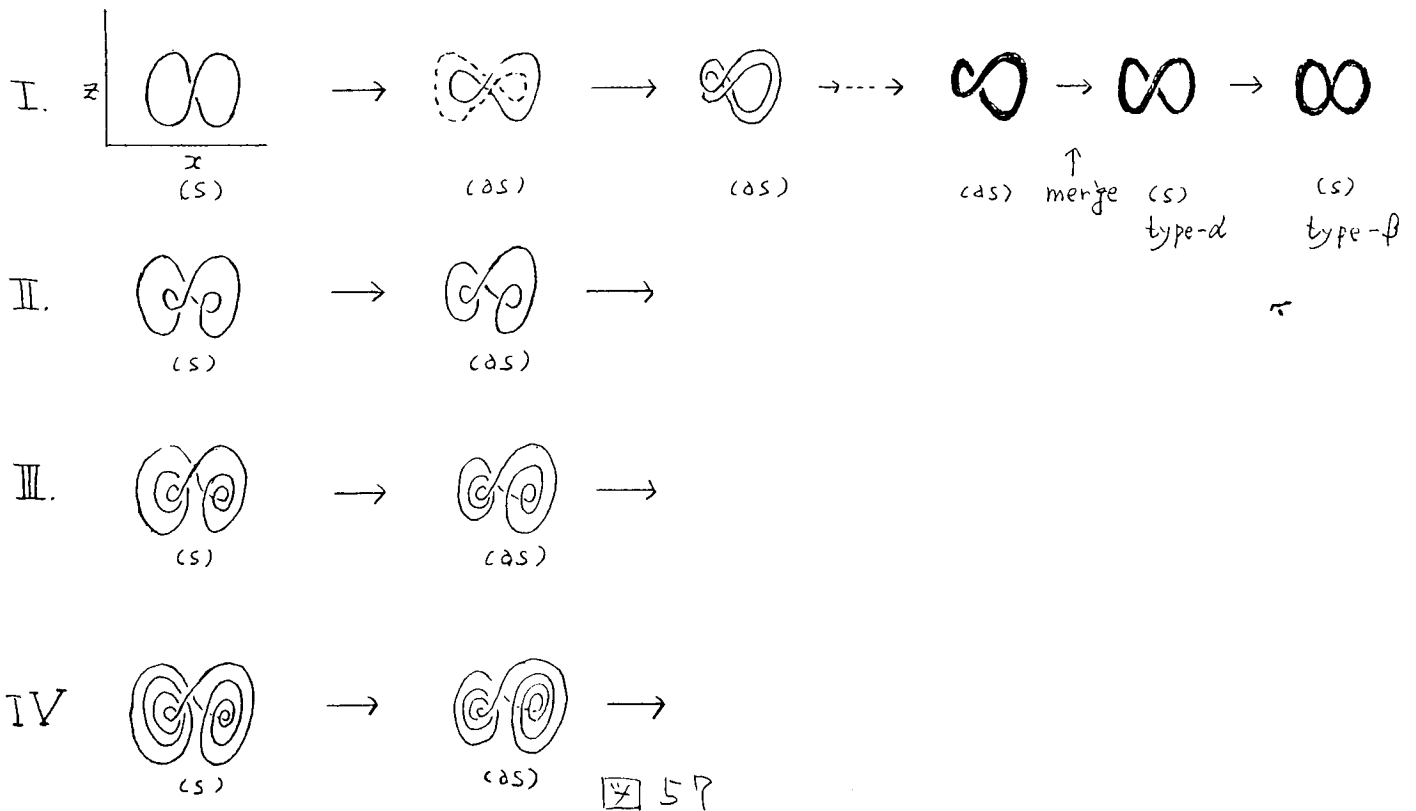
範囲に差が収まっているという一である。

*) 以下自律系の場合についての記述である。

ス-7. オリジナル・ローレンツ モデルの大域的分岐過程における位相構造の変化

オリジナル・ローレンツ モデル (2.43) において $\sigma=16, b=4$ なる値で r を下げていくと、
 マトラクターは、図 57 のように分岐していく。⁵⁹⁾ 各系列で, trivial knot を持つ
 対称リミット サイクル が Intermittent 遷移の逆過程で生成し、^{*} ピンチフォーク分岐を
 起こして非対称になり、それぞれが 2 つ分岐を生じて非対称カオスになる。その後
 逆カスケードが生じ、更に 2 つの非対称カオスが合体して対称カオスに
 なる。ここで 1 つの系列がおわり、次の系列に続く。^{**)}

系列



* 系列 I の場合は $r=\infty$ で保存系で、 $r<\infty$ で対称リミット サイクルが 1 個安定にある。

** ここでは、I~IV の系列をみていくが、カオス領域内に窓構造のある可能性も無視できない。

このときの位相的諸量の値を表8に示す。対称リミットサイクルに \rightarrow 12の量に注目するとその値の変化には規則性があり、 $n_1^{(0)}$ は $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ と変化する。バンドをみると図58のように変化する。この変化は周期倍分岐やピッチフォーク分岐又2 n 分岐で実現する \rightarrow とはできない(各々がtrivial knotという条件も加わるので)。位相的諸量はカオスの存在についての判定基準として用いることもできよう。周期解及びS.A.の構造は、 r が小さくなるに従って複雑になり、かつ空間を占める規模、つまりアトラクターの大きさが、大きくなる。

系列	I (s)	I (a)	II (s)(a)	III (s)(a)	IV (s)(a)
$n_1^{(0)}$	1	1	3	5	7
$r_1^{(0)}$	1	0	1	1	1
$L^{(0)}$	0	1	2	4	6
l	1		1	1	*
$\langle n \rangle$	$\frac{3}{5}$		0.65	0.2875	*
$\frac{\langle n \rangle}{\langle T \rangle^2}$	5.96		4.27	2.07	*
$\langle r \rangle$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	*
$\frac{\langle r \rangle}{\langle T \rangle}$	-1.05		0.85	0.45	*

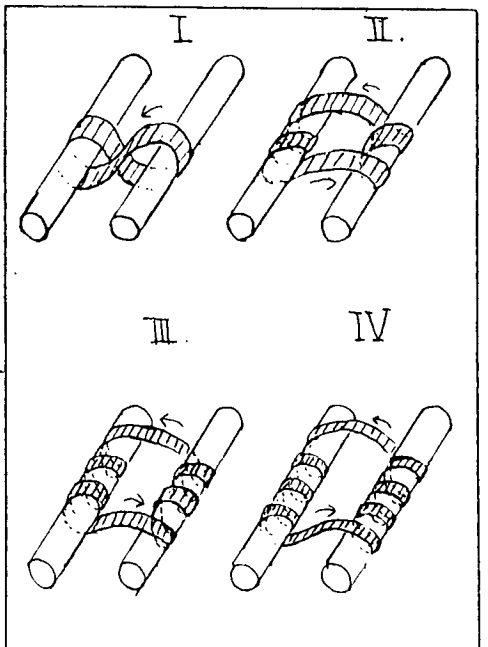


表 8 *)

図 58

*) 系列 I は 対称リミットサイクル (s) を 1 周期解として 16 周期まで II は、(s) を 2 周期として 4 周期まで、III は、(s) を 4 周期として 16 周期まで、IV は (s) を 4 周期として 8 周期までみつかっている。

最終的には Lorenz の見出した構造に至ると思われ。図 59。 51)†)

図 59 のような位相構造が r が大きい

領域でも存在すると仮定すれば

I \rightarrow IV の変化は次のように考えることが

できる。まず 対称な

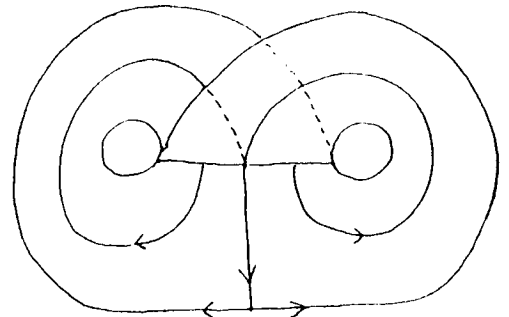


図 59

リミットサイクルのピッチフォーク

分岐で 2 つの basin に分れる。

図 60-(a) \rightarrow (b), 次に各々の領域

で 2 分岐をおこして S.A. になる。

図 60-(c), その後、2 つの非対称

S.A. が合体して、1 つの対称 S.A.

になる。図 60-(d), このとき、

原点のサドルは、S.A. に含まれ

ておらず type α である。

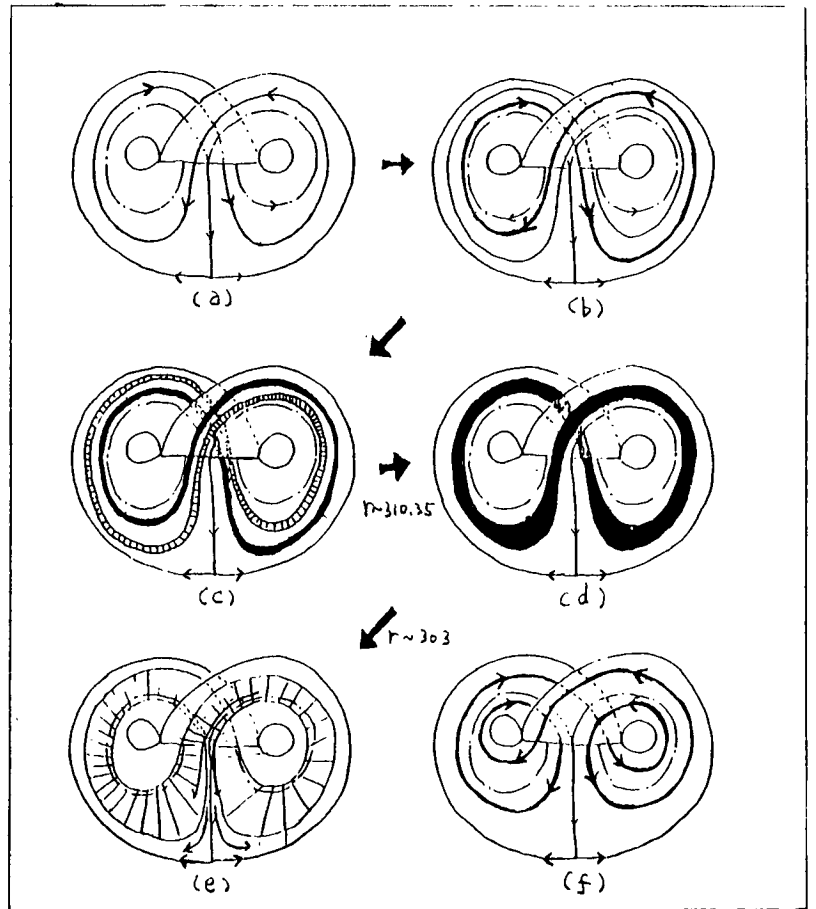


図 60

* ロレンツ・アトラクターは, $\sigma=10, b=\frac{8}{3}, r=28$ だが, 今の場合 $\sigma=16, b=4$ だ

があるが アトラクターの構造は同じであると考えられる。

$r \approx 303$ で type $\alpha \rightarrow$ type β の遷移が生じる。図 60-(e)。この遷移は原点の安定多様体が 対称 S.A. と「接触」*^{*)} することにより、原点が S.A. の 1 部分になるため生じる。図 60-(e) の 斜線に施した部分に滞在する時間が長いから、S.A. としては、原点を含む、図 59 の 全領域である。更に r が下がると 図 60-(f) の リミットサイクルが Intermittent 遷移の逆過程で生成する。以上のプロセスが、繰り返される。^{***)} 最後に、以上の遷移を 図 61 にまとめる。

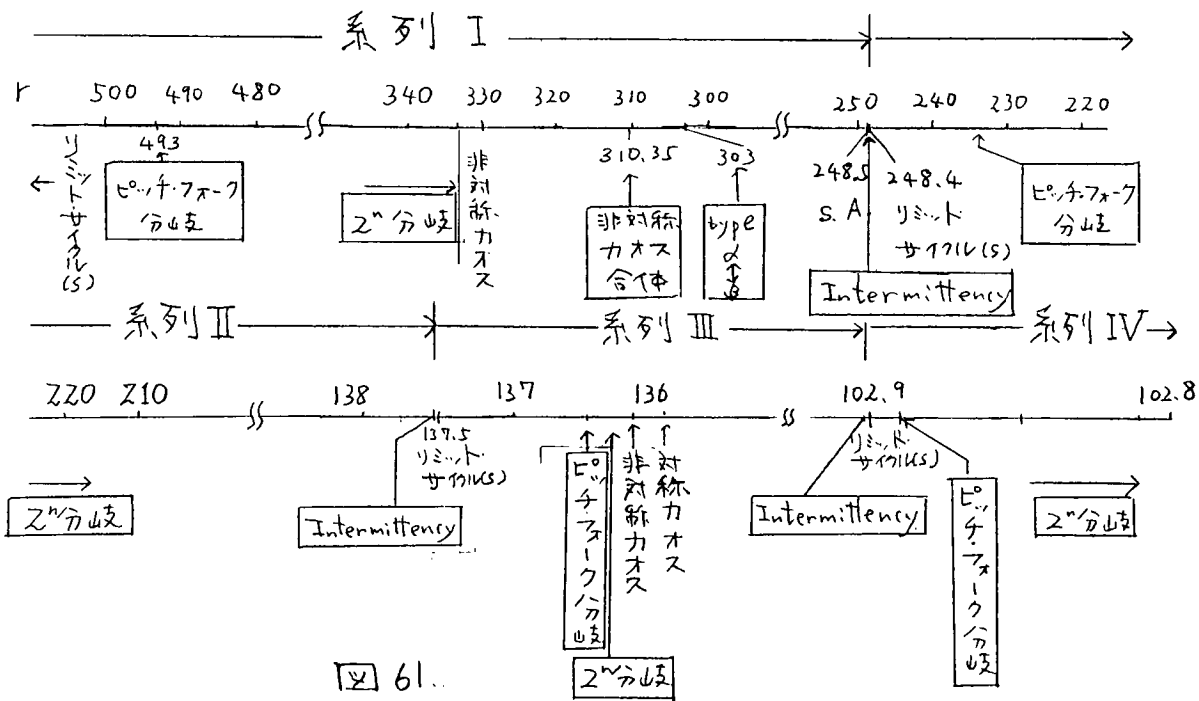


図 61.

^{)} $t \rightarrow -\infty$ で S.A. の basin に 接触すると考えられる。

***) 全 2 の系列で確認したわけではない。異なる異なるリミットサイクルが Intermittent 遷移の逆過程で生成するためには type β が 必要である。

****) r の計算については、省略する。

ス-8. まとめと議論

この章では、まず3次元常微分方程式の周期解を位相的に特徴づけ、分岐の前後での位相的諸量の変化について調べた。又、2分岐が flow 系でいかにして生ずるかについての議論がなされた。いくつかのモデルにおける数値計算は理論の正しさを示持っている。次に S.A. を位相的に特徴づける諸量が定義され、それについての数値計算が行なわれた。アトラクター上の2つの軌道の絡み合いが時間について増大する程度を示すリンク指数 L は、カオスを特徴づける最も適当な量と予想されたが、少なくとも自律系の場合には $L = 2$ という結論を得た。これは、リミットサイクルの場合と同じ値であり、他の事実例えは、2分岐集積後のカオスの位相構造が「リミットサイクル領域」の位相構造の極限として理解できる事や、Intermittency の場合 層流状態に対応するリミットサイクルの位相構造を反映している事等とともに、カオスの位相構造がその中に稠密にあると考えられる周期解の位相構造によって理解できるということが結論される。又、ローレンツモデルを例にとり、2.10パラメータをかなり広い範囲で変化させたとき現われるカオス、リミットサイクルの位相構造の

変化を調べた。その際、Intermittent 遷移の逆過程で生じる一連の対称リミット・サイクルの torsion number n_i には、ある規則性があり、又、その規則はリミット・サイクル間の分岐の際の torsion number の変化の規則と異なることがわかる。対称リミット・サイクル間にはカオス領域がある。一般に、次の命題が成立すると結論できる。「種々の分岐による『結び目型』、『torsion number』の変化で関係づけることのできない位相構造を持つ二つの周期解の中間領域にカオスが^{*}存在する」。これは前半の理論からの必然的な帰結である。^{**)}

トラスの分岐^{***)}についての議論はあまりなされなかったが、保存系の場合の議論とともに、将来の課題である。

我々は 3次元系に話を限ったが、4次元以上の系への拡張については、未だ適切な位相的量が定義できないうえ、なされてはいない。例えば、強制ローレンツ系では、2分岐における n_i, r_i の変化についての規則性が見出されてはいない。

*) 勿論逆については何も述べていない。

**) basin が 1個の場合、但し対称性による複数の basin は、含まない。

***) 3次元自律系で、Hopf分岐が生ずるためにはストロボマップの微分の行列式が 1、つまり少なくとも local に保存的になり得ることが必要であり、ローレンツモデルでは不可能である。

(表4)。空間の次元を n としたとき 閉いた (closed) r 次元多様体と S 次元多様体
が $n-r+S+1$ なる関係を満たすときには リンク数を一般的に定義できる。⁶⁰⁾
($0 \leq r \leq n-1$)。従って $n=4$ の場合には 閉曲面と閉軌道のリンクを考えべきで
あり、閉軌道 どうしたと、残された自由度で '取り替ける' 事ができてリンクの
意味をなす。^{*}

偏微分方程式を近似して、3次元常微分方程式にした場合に -の論文で
述べたような位相構造による分岐の制限がどの程度 もとの偏微分方程式
の解の制限になるかは明らかではないが、何かしらの性質を反映している
ことは予想される。これは 将来の研究に俟たなければならぬ。

* 力学系の解はその位置が 決まってしまうので 解を移動させるという
操作は 意味がないが、パラメーターの変化による移動は あり、その
ような状況下で、リンクという概念が 力学系においても重要であると
考えられる。

謝辞

第1章の研究テーマを与えて下さり御指導していただいた富田和久教授に心から感謝致します。又、第2章の研究は相沢洋二博士との共同研究及びdiscussionに負うところがあり、相沢博士に感謝致します。更に富田研究室の方々や諸先輩方、又蔵本由紀教授、そして物性理論の方々にはセミナー及び大学院生活を通じていろいろ教えていただきました。ここに感謝の意を表したいと思います。

A Hénon マップと二次まわりの非線形性を持つ散逸率一定($\neq 0$)の二次元写像との

同値性 (decouple しない場合).

次のような写像を考えよ。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_n^2 + a_2 x_n y_n + a_3 y_n^2 + a_4 x_n + a_5 y_n \\ b_1 x_n^2 + b_2 x_n y_n + b_3 y_n^2 + b_4 x_n + b_5 y_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

散逸率一定の条件より,

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ 2 a_1 b_5 + a_4 b_2 - a_2 b_4 + 2 a_5 b_1 \\ a_2 b_5 + 2 a_4 b_3 - 2 a_3 b_4 + a_5 b_2 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_4 b_5 - a_5 b_4 \quad (\text{const.} \equiv B (\neq 0) \quad : \text{散逸率} \end{aligned} \right\} (\text{A.2})$$

f は非線形 即ち $|a_1| + |a_2| + |a_3| > 0$ と仮定する。

1. g が線形の場合, i.e., $b_1 = b_2 = b_3 = 0$

$b_4 = 0$ だと decouple するから, $b_4 \neq 0$, 又座標変換により $b_4 = 1, b_5 = 0$ とおいた。

すると, $a_2 = a_3 = 0, B = -a_5$ となる。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_n^2 + a_4 x_n + a_5 y_n \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

そこで $\tilde{x} = \frac{a_1}{2} x, \tilde{y} = \frac{a_1}{2} y$ とおけば $C = \frac{a_4}{2}$ となる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C\tilde{x}_n - B\tilde{y}_n + 2\tilde{x}_n^2 \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

2. \tilde{y} が非線形 i.e., $|b_1| + |b_2| + |b_3| > 0$

$b_2 = 0$ とおいてよい (A.2) より $\frac{1}{B}$ 乗除約して次の形に持来 (x と y の λ が \tilde{x} と \tilde{y})

$$\begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x^2 + a_4 x + a_1 k_1 y \\ b_1 x^2 + b_4 x + b_1 k_1 y \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix}} \right\} (\text{A.5})$$

$$B = k_1 (a_4 b_1 - a_1 b_4), \quad a_1 b_1 \neq 0, \quad k_1 \equiv \frac{a_5}{a_1} = \frac{b_5}{b_1} \neq 0$$

$$\tilde{x} = \frac{a_1}{2} x, \quad \tilde{y} = \frac{k_1 a_1}{2B} (b_1 x - a_1 y) \quad \text{とおけば}, \quad C = \frac{a_4 + k_1 b_1}{2} \quad \text{と}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C\tilde{x}_n + 2\tilde{x}_n^2 - B\tilde{y}_n \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

B. 対称性のある系での対称リミットサイクルの倍周期分岐の禁止について

次の命題を証明する。

命題 1

微分方程式 (B.1) を考えよ。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}, \vec{F}(\vec{x}, t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \right\} \text{(B.1)}$$

S は \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への線形写像で $S^2 = I$ とする。又 $S S^t = S^t S^*$ とする。

仮定 1) $\vec{F} \in C^1$ in \mathbb{R}^{n+1} (\mathbb{R}^{n+1} は (\vec{x}, t) の空間)

$$2) S \vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{F}(S\vec{x}, t) \quad (\text{対称性}) \quad \text{(B.2)}$$

$$3) \vec{F}(\vec{x}, t + T) = \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (\text{周期性}) \quad (T < \infty) \quad \text{(B.3)}$$

4) $\vec{x}_0(t)$ は (B.1) の周期解でその周期を T とする。そして

自らと交差せず^{**)} 対称であるとする。即ち、

$$\{ \vec{x}_0(t); 0 \leq t < T \} \quad \{ S\vec{x}_0(t), 0 \leq t < T \}$$

$$5) S\vec{x}_0(t) \neq \vec{x}_0(t) \quad \text{***)}$$

$$6) \vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{F}_0(\vec{x}) + \vec{g}(t)$$

*) S^t は S の転置行列。

**) 自律系では $T < \infty$ の限り自動的にみたす。

***) 解の一意性から、ある時刻 t_0 で $S\vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0(t_0)$ ならば、任意の時刻で $S\vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(t)$ 。

このとき $\vec{x}_0(t)$ のまわりの変分方程式 (B-4) を考えよ。

$$\frac{d}{dt} \vec{w}(t) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0(t), t) \vec{w}(t) = \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0(t)) \cdot \vec{w}(t) \quad \left. \vphantom{\frac{d}{dt} \vec{w}(t)} \right\} \text{(B-4)}$$

$$A(\vec{x}_0(t)) \vec{w}(t)$$

$$A_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial F_{0i}}{\partial x_j}(\vec{x}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{(B-5)}$$

このとき 次の事が成り立つ。

「 $\text{Exp} \left[\int_0^T A(\vec{x}_0(t)) dt \right] \equiv dM(\vec{x}_0(0))$ の非縮退実固有値は正である。

又非自律系の場合、対称リリット・サイクルの周期は外力の周期の

偶数倍である。」

[証明] 条件より、直交行列 U が存在して $S = USU^t = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}_{(n-k)}$

とできる。 $\vec{F}(\vec{x}, t) \equiv UF(U^t U \vec{x}, t)$, $\vec{S} \vec{x} = U \vec{x}$ とおくと (7) は

そのまま成り立つのでこれを改めて S, \vec{F}, \vec{x} と考えよ。従って

$$S^t = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}, \quad SS^t = I, \quad S^t = -S \quad \text{(B-6)}$$

(B-1), (B-2) より

$$\frac{d}{dt} S \vec{x}(t) = \vec{F}(S \vec{x}(t), t) \quad \text{(B-7)}$$

即ち、 $\vec{x}(t)$ が (B-1) の解ならば $S \vec{x}(t)$ も解である。条件 4) より次のように

時刻 $u(t)$ が一意的に存在する。

$$S \vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(u(t)), \quad t < u(t) < t + T \quad \text{(B-8)}$$

一よ))

$$u(u(t)) = t + T \quad (B.9)$$

従、2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S \vec{x}_0(t) &= \left. \frac{d}{du} \vec{x}_0(u) \right|_{u=u(t)} \cdot \frac{d}{dt} u(t) \stackrel{*}{=} \vec{F}(\vec{x}_0(u(t)), u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \\ &= \vec{F}(S \vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(\vec{x}_0(t), t) \end{aligned}$$

即ち

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(\vec{x}_0(t), u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \quad (B.10)$$

二よ)) $u(t) = t + \frac{T}{2}$ を証明する。

① 自律系の場合

(B.1) の任意の解 $\vec{x}(t)$ に対し、任意の定数 C としたとき、 $\vec{x}(t+C)$ も解。

$\vec{y}(t) = S \vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(u(t))$ とおいたとき、これは初期値 $\vec{x}_0(T_1)$ なる (B.1)

の解、但し $T_1 = u(0)$ 。 $\vec{z}(t) = \vec{x}_0(t+T_1)$ とおくと これは初期値 $\vec{x}_0(T_1)$

なる (B.1) の解。よ、2 解の一意性より $\vec{y}(t) = \vec{z}(t)$, i.e., $\vec{x}_0(u(t)) = \vec{x}_0(t+T_1)$ 。

$0 < t < T_1$ であり、 $u(t) = t + T_1$ 。 (B.9) より $u(t) = t + \frac{1}{2}$ 。

② 非自律系の場合

(B.10) の t のかわりに $u(t)$ を代入すると

$$\vec{F}(S \vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(\vec{x}_0(u(t)), u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \quad (B.11)$$

*) $u(t)$ の連続性、微分可能性は 附録 C で証明される。

(B.10) が (B.11) を引くと、

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) - \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t) = \left\{ \vec{F}(\vec{x}_0(t), u(t)) - \vec{F}(S\vec{x}_0(t), u(t)) \right\} \frac{d}{dt} u(t) \quad (B.12)$$

上の仮定のもとで $k = n-1$ のとき、 $\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) \neq \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t)$ を証明する。

そのために背理法を使う。つまり t_0 が存在して

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t_0), t_0) = \vec{F}(S\vec{x}_0(t_0), t_0) \quad (B.13)$$

と仮定する。これから $\vec{x}_0(t_0) = S\vec{x}_0(t_0)$ が従う。

$\vec{v}(t) = S\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t)$ とおく。

$$\left. \begin{aligned} S\dot{\vec{v}}(t) &= -\dot{\vec{v}}(t) \\ S\dot{\vec{v}}(t) &= -\dot{\vec{v}}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t_0) &= \dot{\vec{v}}(u(t_0)) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (B.14)$$

もし $\dot{\vec{v}}(t_1) \neq 0$ なる t_1 があれば、そのとき $\dot{\vec{v}}(t) = \beta(t) \dot{\vec{v}}(t_1)$ とする。

何故か S の固有値 -1 の固有空間は、1次元であるから。

$\beta(t)$ は連続関数で

$$\left. \begin{aligned} \beta(t_1) &= 1, \beta(t_0) = 0, \beta(u(t_0)) = 0 \\ S\dot{\vec{v}}(t) &= -\beta(t) \dot{\vec{v}}(t_1) \\ S\dot{\vec{v}}(t_1) &= -\dot{\vec{v}}(t_1) \end{aligned} \right\} \quad (B.15)$$

(B.15) より

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{v}}(t) &= (\gamma(t) - \frac{1}{2} \gamma(u(t_1))) \dot{\vec{v}}(t_1) \\ \gamma(t) &= \int_{t_1}^t \beta(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (B.16)$$

つまり

$$\left. \begin{aligned} S\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t) &= \alpha(t) \vec{v}(t) \\ \alpha(t) &= \gamma(t) - \frac{1}{2}\delta(u(t)) \end{aligned} \right\} \text{(B.17)}$$

とつり、 α より $\alpha(t_1) = -\frac{1}{2}\delta(u(t_1))$, $\alpha(u(t_1)) = \frac{1}{2}\delta(u(t_1))$ が従う。

$\alpha(t)$ は連続関数から、 t_2 があ、 $\alpha(t_2) = 0$, つまり $S\vec{x}_0(t_2) - \vec{x}_0(t_2) = 0$

これは仮定 5) に矛盾。従って

$$\vec{v}(t) = 0 \quad \text{for } \forall t \quad \text{(B.18)}$$

つまり

$$\vec{v}(t) = \vec{V} = S\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t) \quad \text{(B.19)}$$

\vec{V} は定ベクトル。 (B.19) で $t \rightarrow u(t)$ とおくと

$$\vec{V} = S\vec{x}_0(u(t)) - \vec{x}_0(u(t)) = \vec{x}_0(t) - S\vec{x}_0(t) = -\vec{V}$$

つまり

$$\vec{V} = 0 \quad \text{(B.20)}$$

再び仮定 5) に矛盾。従って始めの仮定 (B.13) が誤りであり、

任意の t に對して

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) \neq \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t) \quad \text{(B.21)}$$

条件 $k=n-1$ をはずすと上記の議論は使えない。この場合は、

次のように考える。任意の時刻 t , $\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t)$ だと、

$\vec{x}_0(t) = S\vec{x}_0(t)$ とつり $\vec{x}_0(t) = S\vec{x}_0(t) + \vec{V}$ とつり、 α 仮定 5) に矛盾。と=3が、

$[0, T)$ における有限区間で等号が成立しても矛盾はしない。しかし、このとき、速度は S の固有値 1 の固有空間内に制限される。つまり n 次元空間内の k 次元の S -不変な固有空間に束縛される。このよりの状況は例外的と考えるのが、 $[0, T)$ 内の有限個の時刻で等号が成立すると仮定してよい。すると、仮定 6), (B.12) より任意の k について、 $\frac{d}{dt} u(t) = 1$ 。よって (B.9) より

$$u(t) = t + \frac{T}{2} \quad (\text{B.22})$$

さて (B.2) を \vec{x} について微分して

$$A(S\vec{x})S = SA(\vec{x}) \quad \text{for } \forall \vec{x}, \forall t \quad (\text{B.23})$$

を得る。 $\vec{w}(t)$ が (B.4) の解のとき、 $\vec{w}(t) \equiv S\vec{w}(t + \frac{T}{2})$ も (B.4) の解である。

$\vec{w}(0)$ を $dM(\vec{x}_0(0))$ の固有値 λ に属する固有ベクトルと取る。

$$dM \vec{w}(0) = \lambda \vec{w}(0), \text{ i.e., } \vec{w}(T) = \lambda \vec{w}(0) \quad (\text{B.24})$$

また、 $\vec{w}(0)$ も λ に属する固有ベクトルである。何故ならば

$$\begin{aligned} \vec{w}(T) S \vec{w}(T + \frac{T}{2}) &= S \text{Exp} \left[\int_T^{T + \frac{T}{2}} A(\vec{x}_0(s)) ds \right] \cdot \vec{w}(T) \\ &= \lambda S \text{Exp} \left[\int_T^{T + \frac{T}{2}} A(\vec{x}_0(s)) ds \right] \vec{w}(0) = \lambda S \text{Exp} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} A(\vec{x}_0(s)) ds \right] \vec{w}(0) \\ &= \lambda S \vec{w}(\frac{T}{2}) = \lambda \vec{w}(0). \end{aligned}$$

また、もし λ が縮退してはいなければ、数 μ が存在して

$$\vec{w}(0) = \mu \vec{w}(0) \quad (\text{B.25})$$

従って $\vec{W}(t) - S\vec{W}(t + \frac{T}{2}) = \mu\vec{W}(t)$. 故より $\vec{W}(T) = \mu\vec{W}(0)$, つまり

$$\lambda = \mu^2 \quad (\text{B.26})$$

λ が実数ならば $\vec{W}(0)$ も実ベクトルに選べ。従って μ も実数になる。よって、

$\lambda \neq 0$ であるから $\lambda > 0$. 又、(B.11)より

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t + \frac{T}{2}) \quad (\text{B.27})$$

即ち 周期は 外力の周期の偶数倍となる。

証明おわり。

同様の事が写像についてもいえる。

命題 2.

M を \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への写像とする。

$$\vec{x}_{n+1} = M(\vec{x}_n) \quad (\text{B.1}')$$

又 $S^2 = I$ とする。

仮定 1) M は \mathbb{R}^n 上の C^1 級

$$2) [S, M] = SM - MS = 0$$

3) $\{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}\}$ は (B.1') の k 周期解 ($k > 0$) であり対称。即ち

$$\{\vec{x}_e; e=0, \dots, k-1\} = \{S\vec{x}_e; e=0, \dots, k-1\}$$

$$4) S\vec{x}_i \neq \vec{x}_i, \quad i=0, \dots, k-1$$

このとき 変分方程式

$$\delta \vec{x}_{n+1} = dM^k(\vec{x}_0) \cdot \delta \vec{x}_n \quad (B.2)$$

における $dM^k(\vec{x}_0)$ の 0 でない非縮退実固有値は正である。

又、 k は偶数である。

[証明] $\vec{x}_{i+1} = M\vec{x}_i$ とする。3) より 各 $i=1$ に対し $j(i)$ が存在して $x_{j(i)} = Sx_i$

で、4) より $i \neq j(i)$ 。2) より $S\vec{x}_{i+1} = M(S\vec{x}_i)$ であるから、 $x_{j(i+1)} = M(x_{j(i)})$ 、つまり

$$j(i+1) = j(i) + 1. \quad M^{2j(i)}(\vec{x}_0) \cdot M^{j(i)}(\vec{x}_{j(i)}) = M^{j(i)}(S\vec{x}_0) \cdot S M^{j(i)}(\vec{x}_0) = S\vec{x}_{j(i)}$$

$$= \vec{x}_0. \quad 1 \leq j(0) \leq k-1 \quad \text{より} \quad 2 \leq 2j(0) \leq 2(k-1). \quad \text{従って} \quad 2j(0) = k, \quad \text{つまり}$$

$$k \text{ は偶数で} \quad S\vec{x}_0 = \vec{x}_{\frac{k}{2}}. \quad dM^k(\vec{x}_0)\vec{e} = \lambda\vec{e} \text{ とする。} \quad \vec{v} = S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} \text{ とおくと}$$

$$dM^k(\vec{x}_0)\vec{v} = dM^k(S\vec{x}_0)S \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e}. \quad 2) \text{ より} \quad dM(S\vec{x}_0) \cdot S = S dM(\vec{x}_0)$$

$$\text{であるから} \quad dM^k(S\vec{x}_0)S = S dM^k(\vec{x}_0). \quad \text{従って}$$

$$dM^k(\vec{x}_0)\vec{v} = S \cdot dM^k(S\vec{x}_0) \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = S dM^k(\vec{x}_{\frac{k}{2}}) dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e}$$

$$= S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_{\frac{k}{2}}) \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = \lambda S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_{\frac{k}{2}})\vec{e} = \lambda\vec{v}.$$

よって、 λ が縮退していてもよいと仮定して $\vec{v} = \mu\vec{e}$ (μ はスカラー)。つまり

$$S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = \mu\vec{e}. \quad \text{つまり}$$

$$dM^k(\vec{x}_0)\vec{e} = dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_{\frac{k}{2}}) \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = dM^{\frac{k}{2}}(S\vec{x}_0) S^2 dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e}$$

$$= dM^{\frac{k}{2}}(S\vec{x}_0) S \mu\vec{e} = \mu S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = \mu^2\vec{e}.$$

*) $1 \leq j(i) \leq k-1$ とする。

よ、 $\lambda = \mu^2$ 。 λ が実数ならば μ も実数にせよ、 $\lambda \neq 0$ ならば、 $\lambda > 0$ 。

証明おしり。

C. $u(t)$ の連続性、微分可能性

$$1. u(t) < u(t_1) < t + T \quad \text{for } \forall t_1 \in (t, u(t))$$

$t < t_2 < u(t_2) < u(t)$ なる t_2 が存在するとして矛盾を導く.

集合 A, B を次のように定義する.

$$A = \{ \vec{x}_0(\tau) ; t_2 \leq \tau \leq u(t_2) \}$$

$$B = \{ S \vec{x}_0(\tau), t_2 \leq \tau \leq u(t_2) \}$$

$$\| \dot{\vec{x}}_0 \| > 0 \text{ であるから, } \xi \equiv f(t_f, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \| \dot{\vec{x}}_0(s) \| ds \equiv f(t_f) - f(t_i)$$

($f(t) \equiv f(t, 0)$) は t_f と ξ の対応として C^1 級の diffeo. である. 時刻 t が

t_2 から $u(t_2)$ まで動くとき, $S \vec{x}_0(\tau) = \vec{x}_0(u(\tau))$ は, 点 $\vec{x}_0(u(t_2))$ から $\vec{x}_0(t_1 + T)$

$$= \vec{x}_0(t_2) \text{ まで動くから } \int_{t_2}^{u(t_2)} \| S \dot{\vec{x}}_0(\tau) \| d\tau = \int_{t_2}^{u(t_2)} \sqrt{\dot{\vec{x}}_0(\tau)^T S^T S \dot{\vec{x}}_0(\tau)} d\tau$$

$$= \int_{t_2}^{u(t_2)} \| \dot{\vec{x}}_0(\tau) \| d\tau \text{ であるから, } B \text{ の長さは, } A \text{ の長さに等しい. しかも}$$

$A \cap B \supset \{ \vec{x}_0(t_2), \vec{x}_0(u(t_2)) \}$. よって (5) より $A = B$. して $U = [t_2, t_2]$,

$V = [0, \ell]$, $\ell = f(t_3, t_2)$ ($t_3 \equiv u(t_2)$) とする. $\tilde{f}(t, t_2) : U \rightarrow V$ は, 全単射

でその逆写像を \tilde{f}^{-1} とすると $\tilde{f}^{-1} \in C^1$ 級. ベクトル値関数 $\vec{x}_0 : U \rightarrow A$

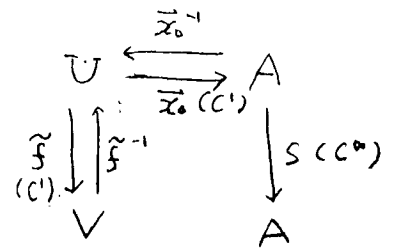
は全単射で C^1 級関数で, 逆写像 $\vec{x}_0^{-1} : A \rightarrow U \in C^1$ 級. よって

$\vec{x}_0 \circ \tilde{f}^{-1} : V \rightarrow A$ は C^1 級で全単射. 又写像 $S : A \rightarrow A$ は C^∞ 級で

全単射. 図 C-1.

よ. 2. 写像 $\tilde{g} \equiv \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}_0^{-1} \circ S \circ \tilde{\alpha}_0 \circ \tilde{f}^{-1} : V \rightarrow V$ は

C^1 級で全単射, 従って fixed point theorem



「 \mathbb{R}^n における閉球から閉球への連続写像は

図 C-1

固定点を持つ」より, fixed point \tilde{z} があって, $\tilde{g}(\tilde{z}) = \tilde{z}$.

つまり $\tilde{z} = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}_0^{-1} \circ S \circ \tilde{\alpha}_0 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{z})$, i.e., $\tilde{\alpha}_0(\tilde{f}^{-1}(\tilde{z})) = S \tilde{\alpha}_0(\tilde{f}^{-1}(\tilde{z}))$.

$t_0 = \tilde{f}^{-1}(\tilde{z})$ とおけば, $\tilde{\alpha}_0(t_0) = S \tilde{\alpha}_0(t_0)$. これは条件 5) に矛盾する.

従って $t < t_1 < u(t) + \epsilon \Rightarrow u(t) < u(t_1)$. 又 $t_1 < u(t) < u(t_1)$ となるから.

今, 証明 (E) により, $u(t_1) < u(u(t)) = t + T$. //

2. $u(t_1) < u(t_2)$ for $\forall t_1, t_2 \in (t, u(t))$ s.t. $t_1 < t_2$.

$t < t_1 < t_2 < u(t)$ であるから 1. より

$$u(t) < u(t_1) < t + T \quad (i=1, 2)$$

つまり $t_1 < t_2 < u(t_1)$, 再び 1. より $u(t_1) < u(t_2)$. //

2. より $\lim_{t \rightarrow t_0^+} u(t) = u_+(t_0)$, $\lim_{t \rightarrow t_0^-} u(t) = u_-(t_0)$ がそれぞれ存在する.

よって $\tilde{\alpha}_0(t)$, $S \tilde{\alpha}_0(t)$ は t の関数として連続だから.

$$\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} S \vec{x}_0(t) = S \vec{x}_0(t_0) - \vec{x}_0(u(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} \vec{x}_0(u(t)) = \vec{x}_0(u_{\pm}(t_0))$$

又、 $t_0 < u_{\pm}(t_0) < t_0 + T$ であり、かつ δ であり、 $u(t_0) = u_{\pm}(t_0)$, i.e.,

$u(t)$ は連続。

次に、微分可能性を証明する。 $\dot{\vec{x}}_0(u(t)) \neq 0$ であり、例えは x 成分

$\dot{x}_{01}(u(t)) \neq 0$ である。

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{x_{01}(u(t+h)) - x_{01}(u(t))}{h} \cdot \left[\frac{x_{01}(u(t+h)) - x_{01}(u(t))}{u(t+h) - u(t)} \right]^{-1}$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき、右辺} \rightarrow S \dot{x}_{01}(t) \frac{1}{\dot{x}_{01}(t)}$$

よって $\frac{d}{dt} u(t)$ は存在し、連続、i.e., $u(t)$ は C^1 系。

又、及び $u^2(t) = t + T$ より $\frac{d}{dt} u(t) > 0$ である。

D. $n_i = r_i + L(x_0 + \alpha' f_2, x_0)$ の言証明*

\vec{x}_0 と, $\vec{x}_0 + \alpha' \vec{f}_2$ 及び $\vec{x}_0 + \alpha' \vec{v}$ の軌道をそれぞれ, 1. \longrightarrow , 2. \dashrightarrow , 3. \rightsquigarrow で表わすと (必要なら軌道とその相対位置を変えたりように移動して) 適当な方向からみることにより, 同時に3つの交差が生じないようにすることができ. 従って交差の種類は24通りあるが, そのうち \vec{x}_0 が交差に関係しない8通り (例えば $\rightsquigarrow \longrightarrow$) は, n, r, L のいづれにも寄与しないので結局表D-1の18通りを考えた方がよい. 但し, 17, 18番目は \vec{x}_0 自体の交差によるものであり, 適当に $\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \alpha' \vec{v}$ を変形することにより, この時に1~16の交差が生じないようにすることができ, 従って太い矢印は, 1, 2, 3の平行な任意の順序を意味する. (例えば $\rightsquigarrow \dashrightarrow$). 表D-1には, n, r, L への寄与も示してある. これらの個数をそれぞれ n_1, n_2, \dots, n_{18} とする. まず $\alpha > 0$ を考える. 表より

$$\left. \begin{aligned} n &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 + n_{17} - n_{18} \\ L &= -n_{10} - n_{12} + n_{13} + n_{15} + n_{17} - n_{18} \end{aligned} \right\} (D.1)$$

*) 簡単のため以下では i を省く.

$$\left. \begin{aligned} 2r &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - n_6 + n_7 + n_8 + n_{10} + n_{12} \\ &\quad - n_{13} - n_{15} - (n_9 + n_{11} - n_{14} - n_{16}) \end{aligned} \right\} \text{(D.2)}$$

軌道を反対の方向(裏側)からみよ。表D-1の図はそれこれ

$$1 \leftrightarrow 8, 2 \leftrightarrow 7, 3 \leftrightarrow 6, 4 \leftrightarrow 5, 9 \leftrightarrow 15, 10 \leftrightarrow 16, 11 \leftrightarrow 13, 12 \leftrightarrow 14$$

と書くから。17, 18はそのまま。従って、

$$\left. \begin{aligned} n &= n_8 + n_7 - n_6 - n_5 + n_{17} - n_{18} \\ L &= -n_{16} - n_{14} + n_{11} + n_9 + n_{17} - n_{18} \end{aligned} \right\} \text{(D.3)}$$

とよ。但し r は同じ表式(2)より。(D.1), (D.3)より

$$\left. \begin{aligned} n_8 + n_7 - n_6 - n_5 &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 \\ -n_{16} - n_{14} + n_{11} + n_9 &= -n_{10} - n_{12} + n_{13} + n_{15} \end{aligned} \right\} \text{(D.4)}$$

(D.4)を(D.2)に入れよ。

$$2r = 2(n_1 + n_2 - n_3 - n_4) + 2(n_{10} + n_{12} - n_{13} - n_{14})$$

よって(D.1)を使え。

$$\begin{aligned} r &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 + n_{10} + n_{12} - n_{13} - n_{14} \\ &= n - (n_{17} - n_{18}) + n_{17} - n_{18} - L = n - L \end{aligned}$$

つまり $n = r + L$ 。

$\lambda < 0$ のときは $\vec{x}_0 + 3\vec{v}$ だけ、周期 $2T$ だけの (D.1) の左辺 2",

$n \rightarrow 2n, L \rightarrow 2L, r \rightarrow 2r$ とおけばよい。従って $n = r + L$ 。

番号	個数	type	n	r	L	番号	個数	type	n	r	L
1	n_1		1	$\frac{1}{2}$	0	2	n_2		1	$\frac{1}{2}$	0
3	n_3		-1	$-\frac{1}{2}$	0	4	n_4		-1	$-\frac{1}{2}$	0
5	n_5		0	$-\frac{1}{2}$	0	6	n_6		0	$-\frac{1}{2}$	0
7	n_7		0	$\frac{1}{2}$	0	8	n_8		0	$\frac{1}{2}$	0
9	n_9		0	$-\frac{1}{2}$	0	10	n_{10}		0	$\frac{1}{2}$	-1
11	n_{11}		0	$-\frac{1}{2}$	0	12	n_{12}		0	$\frac{1}{2}$	-1
13	n_{13}		0	$-\frac{1}{2}$	1	14	n_{14}		0	$\frac{1}{2}$	0
15	n_{15}		0	$-\frac{1}{2}$	1	16	n_{16}		0	$\frac{1}{2}$	0
17	n_{17}		1	0	1	18	n_{18}		-1	0	-1

- 1) H. Poincaré, 'Les méthodes nouvelles de La Mécanique Céleste', Vol. III (1899). (「常微分方程式」, 共立)
- 2) E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130.
- 3) M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, J. London Math. Soc. 20 (1945) 180.
- 4) T.-Y. Li and J. A. Yorke, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 985.
- 5) Y. Oono, Prog. Theor. Phys 59 (1978) 1028.
- 6) F. R. Marotto, J. Math. Anal. Appl. 63 (1978) 199.
- 7) Y. Oono and M. Oshikawa, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 54.

彼らによるカオスの定義は、次のとおりである。(同値な他の定義もある)。

「ある自然数 m がある。 f^m のもとで $K(CI)$ が不変であり、

K 上のある同値関係 \sim に対し、

$$f^* = C f^m C^{-1} . K/\sim \rightarrow K/\sim$$

が symbolic dynamics と conjugate であるとき、 f は

カオス的である、という。ここに $C: K/\sim \rightarrow K/\sim$ は

K の元 x に対し, その同値類を対応させる写像 (標準的全射)

8) M.V. Jakobson, *Comm. Math. Phys.* 81 (1981) 39.

9) S. Smale, *Bull. A.M.S.* 73 (1967) 447.

R. Bowen and D. Ruelle, *Invent. Math.* 29 (1975) 181.

D. Ruelle, *Amer. J. Math.* 98 (1976) 619.

10) V.I. Oseledec, *Trans Moscow Math. Soc.* 19 (1968) 197

11) M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* 50 (1976) 69.

12) B.B. Mandelbrot, 'Fractal - Form, Chance and Dimension'

(Freeman, San Francisco, 1977)

13) J.C. Kaplan and J.A. Yorke, *Lecture Notes in Math* 730 (1979) 228

14) M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19 (1978) 25.

15) B. Derrida, A Gervois and Y Pomeau, *J. Phys. A* 12 (1979) 269.

16) P. Collet, J.-P. Eckmann and H. Koch, *J. Stat. Phys.* 25 (1981) 1

17) M. J. Feigenbaum, *Comm. Math. Phys.* 77 (1980) 65.

18) H. Dado, *Prog. Theor. Phys.* 67 (1982) 1698

19) V. Croquette and C. Poitou, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 292 (1981) Série II-1353.

- 20) M. Gygli, S. Musazzi and U Perini, *Phys. Rev. Letters* 47 (1981) 243.
A Libchaber, C. Laroche and S Fauve, *J. Physique* L43 (1982) L-211.
- 21) 例えは J.M. Greene, R.S. Mackay, F Vivaldi and M.J. Feigenbaum,
Physica 3D (1981) 468
- 22) P Manneville and Y. Pomeau, *Phys Letters* 75A (1971) L.
- 23) 例えは B. Hu and J. Rudnick *Phys. Rev. Letters* 48 (1982) 1645
及びその中の文献。外部ノイズを加えた場合も扱っている。
- 24) ランダウ-リフシッツ '流体力学1' 第3章, 東京図書.
- 25) D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* 20 (1971) 167.
S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* 64 (1978) 35.
- 26) A Itô, *Prog. Theor. Phys* 62 (1979) 620
- 27) J.P. Gollub and S.V. Benson, *J. Fluid Mech.* 100 (1980) 449.
J Maurer and A Libchaber, *J Physique* L41 (1980) L-515.
- 28) H. Yahata, *Prog. Theor. Phys.* 68 (1982) 1070 (常微分方程式系)
H. T. Moon, P Huerre and L. G Redekopp, *Phys. Rev. Letters* 49 (1982)
458. (偏微分方程式系)

- 29) D. G. Aronson, M. A. Chory, G. R. Hall and R. P. McGehee,
Comm. Math. Phys. 83 (1982) 303.
- 30) 例えは" V. I. Arnol'd, Russian Math. Surveys 18 (1963) 85.
- 31) 例えは" アーノルド", アベズ '古典力学のエルゴード問題' 吉岡書店
- 32) B. V. Chirikov, Physics Reports 52 (1979) 263.
- 33) J. M. Greene, J. Math. Phys. 20 (1979) 1183.
L. P. Kadanoff, Phys. Rev. Letters 47 (1981) 1641.
S. J. Shenker and L. P. Kadanoff, J. Stat. Phys. 27 (1982) 631
- 34) M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff and S. J. Shenker, Physica 5D (1982) 370.
D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna and E. D. Siggia, Phys. Rev. Letters 49 (1982) 132.
- 35) C. Simó, J. Stat. Phys. 21 (1979) 465.
H. Dardo, Prog. Theor. Phys. 63 (1980) 1190
C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Phys. Rev. Letters 48 (1982) 1507.
- 36) Y. I. Frenkel and T. Kontorowa, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 8 (1938) 1340.
F. C. Frank and J. H. Van der Merwe, Proc. R. Soc. 198 (1949) 205, 216.
S. Aubry, in 'Solitons in condensed matter', ed A. Bishop and
A. Schneider (Springer-Verlag, N.Y., 1979).

- 37) P. Bak, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 791
W. Selke and M.E. Fisher, Phys. Rev. 20 (1979) 257
P. Bak and J von Boehm, Phys. Rev. B21 (1980) 5297.
M.E Fisher and W Selke, Phys. Rev. Letters 44 (1980) 1502
- 38) S.R. McKay, A.N Berker and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Letters 48(1982) 767.
- 39) S. Fishman, D.R. Grempel and R.E. Prange, Phys. Rev. Letters 49 (1982) 509.
- 40) M. Kohmoto, preprint.
- 41) K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, Phys. Rev. Letters 45 (1980) 709.
K. Ikeda, K. Kondo and O. Akimoto, Phys. Rev. Letters 49 (1982) 1467.
- 42) J.D. Barrow, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 963.
J.D. Barrow, Physics Reports 85 (1982) 1.
- 43) 例として、G.M Zaslavsky, Phys Reports 80 (1981) 157.
及びその中の文献。
- 44) T. Horiguchi and B.A. Huberman, Phys. Rev. Letters 48 (1982) 711
- 45) A. Zippelius and M. Lücke, J. of Stat. Phys. 24 (1981) 345
- 46) J.P. Crutchfield and B.A. Huberman, Phys. Letters 77A (1980) 407.

- 47) J. Crutchfield, M. Nauenberg and J. Rudnick, *Phys. Rev. Letters* 46 (1981) 933.
B. Shraiman, C. E. Wayne and P. C. Martin, *Phys. Rev. Letters* 46 (1981) 935.
- 48) M. Lücke and Y. Saito, *Phys. Letters* 91A (1982) 205
- 49) K. Matsumoto, private communication
- 50) Y. Aizawa and T. Uezu, *Prog. Theor. Phys.* 68 (1982) 1864.
- 51) J. S. Binman and R. F. Williams, preprint, knotted periodic orbits
in dynamical systems I, II.
- 52) 第 I 章の分, T. Uezu and Y. Aizawa, *Prog. Theor. Phys.* 68 (1982) 1543.
第 II 章の分; Y. Aizawa and T. Uezu, *Prog. Theor. Phys. Lett* 67 (1982) 982.
T. Uezu and Y. Aizawa, *Prog. Theor. Phys.* 68 (1982) 1907.
T. Uezu, *Phys. Letters* 93A (1983) 161.
- 53) K. Tomita and T. Kai, *Suppl. Progr. Theor. Phys.* 64 (1978) 280.
- 54) J. L. Kaplan and J. A. Yorke, *Comm. Math. Phys.* 67 (1979), 93.
- 55) R. H. G. Helleman, 'Fundamental Problems in Statistical Mechanics,
vol. 5', ed. E. G. D. Cohen (North Holland Publ. Amsterdam and N. Y., 1989), 165.

56) R.H. Crowell and R.H. Fox, 'Introduction to Knot Theory' (Springer-Verlag
N.Y. 1977)

D. Rolfsen, Knots and Links (Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976).

57) O.E. Rössler, Bull. Math. Bio 39 (1977) 275

58) O.E. Rössler, Phys. Letters 57A (1976) 397.

59) K. Tomita and I. Tsuda, Suppl. Progr. Theor. Phys. 69 (1980) 185.

60) B. Duplantier, Comm. Math. Phys. 85 (1982) 221