

氏 名	河 合 茂 生 かわ い しげ お
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 博 第 834 号
学位授与の日付	昭 和 59 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 専 攻
学位論文題目	A theorem of Bernstein type for minimal surfaces in $\mathbf{R}^4$ ( $\mathbf{R}^4$ 内の極小曲面に対するベルンシュタイン型定理)

論文調査委員 (主 査) 教 授 戸 田 宏 教 授 永 田 雅 宜 教 授 土 方 弘 明

### 論 文 内 容 の 要 旨

$n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  内の曲面は、その面積が曲面の微小な変形に関して極値をとるとき、極小曲面であるといわれる。

極小曲面に関する古典的な Bernstein の定理は、「可微分関数  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  のグラフが  $\mathbf{R}^3$  内の極小曲面であれば、 $f$  は 1 次関数である」と述べられる。

この定理の高次元化は、関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  のグラフの極小性として議論され各種の結果がえられているが、この場合グラフで与えられる極小部分多様体は余次元 1 のものである。

一方、複素数体  $\mathbf{C}$  を  $\mathbf{R}^2$  とみて、整関数  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  を可微分写像  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  と考えると、そのグラフは  $\mathbf{R}^4$  内の極小曲面である。この例は、余次元が 1 より大きい場合に Bernstein の定理を拡張するとき、 $f$  として 1 次写像以外のものが現れ、余次元 1 の場合に比してその様相が複雑化することを示している。

申請者は、4次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^4$  内の極小曲面の研究を続けてきたが、最近の do Carmo-Peng, Fisher-Colbrie による Bernstein の定理の一般化「 $\mathbf{R}^3$  内の完備可符号安定極小曲面は平面である」において、極小曲面の安定性つまり第 2 変分が正または 0 となることが極小曲面の考察における重要な因子であることに着目し、次の定理を主論文において証明した。

定理 可微分写像  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  のグラフが  $\mathbf{R}^4$  内の安定極小曲面であれば  $f$  は次のいずれかである。

- (1) 1 次写像 (2) 複素解析関数 (3) 反複素解析関数

申請者は以下の様な方法で定理を証明した。

極小曲面の法バンドルの二つの断面に関する第 2 変分の和を変形すると、平面上のコンパクトな台をもつ関数に作用する楕円型作用素がえられる。定理の(1), (2), (3)のいずれでもない  $f$  に対して、この作用素が負の固有値をもつことを示す。その結果グラフの極小曲面の第 2 変分が負となって、この曲面は安定でないことがわかる。

申請者の方法は、余次元が 2 以上の極小曲面の不安定性を示す一般的方法としては、最初のものである。

## 論文審査の結果の要旨

申請者は余次元が2以上の極小曲面の不安定性を示す一般的方法を研究し、すでに相当の成果を挙げている。

この場合の考察の難しさは、曲面の法バンドルが一般には複雑で、法バンドルの断面に作用する楕円型作用素が取り扱い難いところにある。

現在までに知られている方法が適用できるのは、曲面を含む空間が特に単純で楕円型作用素を取り扱わずにすむ場合か、あるいは余次元が1で作用素が関数に作用する場合かのいずれかである。これに比して申請者の方法は、適当な断面をとることによって関数に作用する作用素の問題に帰着させるものであって、応用範囲の広いものである。

主論文における定理は、この方法の応用として、古典的な Bernstein の定理に対応する余次元2の場合の事実を示したものであり、この方面の研究において一つの画期的成果であるといえる。

なお、3編の参考論文は、上に述べた方法をいくつかの重要な場合に应用したものであり、申請者のこの方面の研究発展に対する寄与と十分な学識を示しているものである。

以上によって、本論文は理学博士の学位を授与する価値あるものと認める。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。