氏　　　名　青木宏樹（あおき　ひろき）

学位(専攻分野)　博　士　(理　学)

学位記番号　理　博　第2144号

学位授与の日付　平成12年3月23日

学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当

研究科・専攻　理学研究科数学・数理解析専攻

学位論文題目　Estimating Siegel Modular Forms of Genus 2 Using Jacobi Forms
（ヤコビ形式を用いた種数2のジーゲル保型形式の評価）

論文調査委員　（主　査）教　授　齋藤恭司　　教　授　宮岡洋一　　教　授　柏原正樹

論文内容の要旨

正の整数gに対し、種数gの Siegel 上半空間は

$$\mathbf{H}_g := \{Z = {}^tZ \in M_g(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(Z) > 0\}$$

で与えられる。それは，シンプレクティク群

$$Sp_g(\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL_{2g}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} {}^tAD - {}^tCB = E_g, \\ {}^tAC = {}^tCA, \quad {}^tBD = {}^tDB \end{array} \right\}$$

が$M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$と作用する対称空間である。$\mathbf{H}_g$上の正則函数$F$が種数$g$, 重み$k \in \mathbb{Z}$のジーゲル・モデュラー形式であるとは$F$が次の保型性を持つ事である。すなわち任意の$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_g(\mathbb{Z})$ に対し，

$$F(Z) = \det(CZ+D)^{-k} F(M\langle Z\rangle).$$

種数$g=1$の時には更に次のフーリエ展開可能性を要求するが$g \geq 2$の時は，この条件は自動的に満たされている。

$$F(Z) = \sum_{\substack{T = {}^tT \\ \text{even integral}}} a(T) \exp(\pi\sqrt{-1}\, tr(TZ)).$$

以下$M_{g,k}$でもって，種数g, 重みkのジーゲル・モデュラー形式全体のなす$\mathbb{C}$–ベクトル空間とする。$k<0$に対しては$M_{g,k} = 0$であり，$M_{g,0} = \mathbb{C}$となる。$M_{g,*} = \bigoplus_{k \geq 0} M_{g,k}$とおくと，自然に重み$k$に関する次数付環になる。$M_{1,*} = \mathbb{C}[e_4, e_6]$ は古典的によく知られている。本論文の主要結果は，以下の井草の定理の新証明を与える事である。

定理（井草）　種数2のジーゲル・モデュラー形式のなす環は以下の構造を持つ。

$$M_{2,*} = \mathbb{C}[E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}] \oplus \Delta_{35}\mathbb{C}[E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}].$$

ここで，E_kは重みk（$k=4, 6$）の*Eisenstein*級数であり，Δ_kは重みがk（$k=10, 12, 35$）の（定数倍を除いて）唯一のカスプ形式である。$E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}$は代数的に独立であり，$\Delta_{35}$はそれ等のなす環の2次整拡大の元である。

申請者による新証明は，井草の元証明とは異った立場，即ち，Eichler 及び Zagier により開発された Jacobi 形式を用いるものである。以下にその概要を説明する。

以下2変数の重みk, インデックスmのヤコビ形式φ: $\mathbf{H}_1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\varphi(\tau, z) = \sum_{4mn - l^2 \geq 0} a(n, l)\, q^n \zeta^l$ とおく。（その*Faurier*展開を定義，説明略）全体のなす$\mathbb{C}$–ベクトル空間を$\mathbf{J}_{k,m}$と記す。

又，$r \in \mathbf{N}$に対し$\varphi \in \mathbf{J}_{k,m}$で，$a(n, l) = 0$ for $n < r$となる様なヤコビ形式全体のなす$\mathbb{C}$–ベクトル空間を$\mathbf{J}^r_{k,m}$と記す。

さて種数2重みkのジーゲル保型形式$F \in M_{2,k}$のフーリエ・ヤコビ展開を

$$F\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & w \end{pmatrix} = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(\tau, z)\ \exp(2\pi\sqrt{-1}\, mw)$$

とおくと，φ_m は重み k, インデックス m のヤコビ形式になる事はよく知られているので

$$0 \to M_{2,k}^{(r+1)} \to M_{2,k}^{(r)} \xrightarrow{P_r} \mathbb{J}_{k,r}$$

なる完全列を得る。ここで $M_{2,k}^{(r)}$ はフーリエ・ヤコビ係数 $\varphi_m = 0$ for $m < r$ となるジーゲル保型形式全体のなす$\mathbb{C}$-ベクトル空間とし，P_r は r 番目のフーリエ・ヤコビ係数をとる対応である。行列 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する F の保型性は $F\begin{pmatrix} r & z \\ z & w \end{pmatrix} = (-1)^k F\begin{pmatrix} w & z \\ z & r \end{pmatrix}$ であるので変数 w と変数 r の役割が入れ代り，例えば k が偶数の時には上記 P_r の像は$\mathbb{J}_{k,r}^{(r)}$ に含まれる。他方ヤコビ形式に対しそのフーリエ係数を用いて１変数保型形式を対応させる Eichler-Zagier の理論を用いる事により，表価式 $\dim \mathbb{J}_{k,r}^{(r)} \leqq \sum_{v=0}^{r} \dim M_{1,k+2v-12r}$ を得るのでまとめて，

$$\dim M_{2,k} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{r} \dim M_{1,k+2v-12r}$$

となる。右辺の k に関するポアンカレ級数は古典的結果 $M_{1,*} = \mathbb{C}\ [e_4, e_6]$ を用いる事により

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{r} \frac{t^{12r-2v}}{(1-t^4)(1-t^6)} = \frac{1}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

となる。ここで $E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}$ の存在とその代数的独立性を仮定すれば，上式は，偶数の重みの保型形式環は，それ等 $E_4, ..., \Delta_{12}$ で生成される事を意味する。

次に奇数の重みの保型形式についても同様なポアンカレ級数の表価式

$$\sum_{r=2}^{\infty} \sum_{v=1}^{r-1} \frac{t^{12r-2v+13}}{(1-t^4)(1-t^6)} = \frac{t^{35}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

を得るので Δ_{35} の存在を仮定すれは奇数の重みのジーゲル保型形式全体は $\Delta_{35}\mathbb{C}[E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}]$ となる事が示される。

更に，論文では $E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}$ が Saito-Kurakawa lifting の帰結として得られる事，及び，それ等は代数的に独立である事を示している。

以上により，重み 35 の保型形式 Δ_{35} の存在（井草による）を仮定すると，前掲の定理が証明された事となる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

一般に，不連続群とその作用する領域及び保型因子が与えられた時に，その保型形式の環が定まる。その環構造を決定するという問題が考えられるが，それは一般的解答のない非常に難しい問題である。不連続群が幾何に由来するものについては，ポアンカレ級数を使う事により，保型函数体がある有限超越次数の函数体となる等のある程度一般的な事は分る。しかしその場合でも保型形式の環の元は，個別の群に応じた深い研究をまって初めて（部分的に）配述できる様になる，難しくかつ深い問題である。その中で，井草による種数２のジーゲル保型形式環の決定（1962, 1964）は長らくこの方面で決定的な結果であった。種数３については露峰氏による都分的結果があり，それより大な種数についてはモデュラ多様体の小平次元の計算等の結果は知られているが，保型形式環の環構造を決定するには程遠い状態といえる。

申諸者は，原始形式の周期写像の理輪により導かれる拡張されたIV型領域（齋藤 1991）上の保型形式を，ヤコビ形式をリフトする事により構成する研究を行ってきた（参考論文)。その際ヤコビ形式の持つ変換法則はIV型領域上の保型形式の変換法則の一部分のみになっている。従ってIV型領域上の保型形式をフーリエ展開すると，その係数として出てくるヤコビ形式は一般的なものではない特別な制約をうけたものでなければならない。申請者はその制約条件を明らかにすることをテーマとして研究を進めてきたが，当輪文は，その視点を種数２のジーゲル保型形式にあてはめたものと言える。

この様にジーゲル保型形式の，フーリエ・ヤコビ展開係数の持つ制約条件を用いて，次元の表価を与えるという視点はかつてなかった，独自なものである。その条件の結果として定まるヤコビ形式の空間の次元評価を用いて求めたポアンカレ級数が真のポアンカレ書数と一致するという事は予期せぬ（美しい）事態と言える。更に，その結果として次の系列は完全となる（記号の説明等は論文要旨参照)。

$$0 \to M_{2,k}^{(r+1)} \to M_{2,k}^{(r)} \xrightarrow[P_r]{} \mathbb{J}_{k,r}^{(r)} \to 0 \quad (k：偶数)$$

$$0 \to M_{2,k}^{(r+1)} \to M_{2,k}^{(r)} \xrightarrow[P_r]{} \mathbb{J}_{k,r}^{(r+1)} \to 0 \quad (k：奇数)$$

これ等の完全列を分裂（split）させる事はヤコビ型式から，ジーゲル保型形式への lifting を与える事に外ならない。実際 k が偶数のときは $e_k \longmapsto E_k (k=4, 6)$，$\varphi_{k,1} \longmapsto \varDelta_k (k=10, 12)$ という対応により引きおこされる環準同型写像がその様な分裂を与える。（ここで，$\varphi_{k,1}$ は重み k インデックス1の（定数倍を除いて）唯一のヤコビ形式である。）他方 k が奇数の時は，重み35，インデックス7のヤコビ形式は存在しなく，最初のインデックスは2となるヤコビ形式 $\varphi_{35,2}$ から始まる。この事はインデックス2のヤコビ形式の *lifting* という従来考えられてこなかった新しい問題を提起している。

以上，青木による論文は，従来知られていた，井草の定理の驚くべき簡明かつ美しい，新証明を与えたのみならず従来研究されてこなかった，種々の保型形式の新しい lifting の理論の可能性を与えている。更に，これ等の方法による高次の種数の場合の研究，或いはレベル付の保型形式の場合の研究等の問題提起する等，同論文は保型形式環の研究に新たな見地と可能性をもたらしたものと高く評価できる。

以上のように申講者の業績は独創的なものであり，主輪文は博士（理学）の学位論文として十分な内容であると考え，合格と判定した。