氏　　　名	上田　勝（うえだ　まさる）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	理　博　第 1022 号
学位授与の日付	昭和 62 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学専攻
学位論文題目	The decomposition of the spaces of cusp forms of half-integral weight and trace formula of Hecke operators （重さ半整数の尖点形式の空間の分解とヘッケ作用素の跡公式）
論文調査委員	（主査）教授 土方弘明　教授 吉沢尚明　教授 永田雅宜

論文内容の要旨

Fuchs 群 $\Gamma_0(N)$ に関する，weight k，指標 χ の尖点形式のなすベクトル空間を $S(k, N, \chi)$ で表す。上半面上の正則関数 $f=f(z)$ が $S(k, N, \chi)$ に属することを特徴づける保型性は

(1) $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)=\chi(\gamma)(cz+d)^{-k}f(z)$

が任意の $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ について成立つことであった。ここで k は正整数であった。

N が 4 で割れるとき，(1)に於て，k を半整数 $k+\dfrac{1}{2}$ で置き換えた如き保型性を示す関数があり，half-integral weight の尖点形式と呼ばれ，その空間を $S(k+\dfrac{1}{2}, N, \chi)$ で表す。

尖点形式 f は保型性より，フーリエ展開，$f(z)=a_1\tau+a_2\tau^2+\cdots$，$\tau=e^{2\pi i n z}$ をもつ，Hecke は，丁度 a_n を固有値としてもつような作用素 $T(n)n=1, 2, \cdots$ を導入した。今日 Hecke 作用素と呼ばれるものであり，以後の保型形式論に中心的役割を果した。一方，half-integral weight の尖点形式に対しては，$T(n^2)$ $(n=1, 2, \cdots)$ だけしか定義できず，関数等式等について，意味のある結果は得られなかった。

1973年頃，志村（Princeton 大学）は $S(k+\dfrac{1}{2}, N, \chi)$ の元 f に対し，$S(2k, N/2, \chi^2)$ の元 F_f を構成し，half-integral weight の尖点形式の理論が豊かな内容をもつことを示し，いくつかの重要な問題を提出した。以後，無限次表現論の発達とも重って，この分野は多くの研究者の関心を集めた。中でも上記の対応：$f\to F_f$ は志村対応と呼ばれ，その性質を解明することは中心問題の 1 つである。この問題に対し，現在有効と思われる唯一の方法は Seberg 跡公式により両空間への Hecke 作用素の跡を計算して比較することで，（未解決の部分を）集約すると

(i)　$S(k+\dfrac{1}{2}, N, \chi)$ 上での $T(n^2)$ の跡を求める。

(ii)　上記(2)を用いて志村対応 $f\to F_f$ の像を決定する。

この 2 つである。

(i)について，S. Niwa (Nagoya J. '77) が次の仮定

(2)　$\chi=1$, Nは3乗因子なし

の下で解を与えた。また(ii)については，Niwa（同上）が仮定

(3)　$\mathrm{ord}_2(N)=2$（即ちNは丁度4で割れる）

　　且つ $N/4$ は平方因子なし

の下で解を与えた。更に W. Kohnen (Crelle. J. '82) は仮定

(4)　+「$\chi^2=1$」

の下で，$S(K+\frac{1}{2}, N, \chi)$ の適当な部分空間（=Kohnen space）を定義し，(Niwa の跡公式を用いて)，Kohnen space 上の跡を計算し，問題(ii)の解を得た。

さて，上田勝の申請論文は，

(i)に対し（仮定なしの）完全な解を与え，(ii)に対し，仮定「$\chi^2=1$」+

(4')　$2\leq ord_2(N)\leq 4$

の下で解を得ている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

(Ⅰ)　$T(n^2)$ の跡公式について

跡公式の解析的部分は既に志村により（実際は，代数幾何的方法によって）与えられており，Niwa，上田ともそれにより，具体的 Fuchs 群 $\Gamma_0(N)$ に対し，残りの数論的部分の計算を遂行している。

Half-integral の場合に，その計算は，integral weight の場合と較べて，本質的に“局所化”できないという難しさがある。但し，この局所化とは，数論的意味で，各素数 p での p 進完備化の中だけでの考察では済まないということである。

Niwa の仮定(2)は，その困難さを軽減するためのもので，申請者はその困難をまともに乗り越えており，これだけでも十分評価できるものである。

(Ⅱ)　志村対応の像の決定について

この問題に対する申請者の結果は論文要旨に記した通り最終的なものではない。また（詳しいことは避けるが），申請者の方法が最終結果に到る最良の途とは必ずしも考えられない。しかし，Niwa Kohnen の結果に対する，申請者の拡張は，「平方因子なし」という仮定をはずした点で，表現論的観点からも本質的に新しい部分を含んだ拡張であり，美しい最終結果の存在を示唆した点で貴重な貢献である。

よって，本論文は理学博士の学位論文に価するものと認める。

なお，主論文及び参考論文の内容を中心として，関連分野について試問した結果，合格と認めた。