

新制

理

761

京大附図

学位申請論文

菅沼秀夫

color 電磁場中での chiral 対称性と quark-antiquark 対生成

京都大学 理学部

菅沼 秀夫

ABSTRACT

The manifestation of chiral symmetry and $q\bar{q}$ pair creation in the presence of the external color-electromagnetic field are studied by way of the Nambu-Jona-Lasinio model. The Dyson equation for the dynamical quark mass and the $q\bar{q}$ pair creation rate are derived in terms of the effective potential formalism in the covariantly constant color-electromagnetic field. The chiral-symmetry restoration occurs by a strong color-electric field, and the rapid reduction of the dynamical quark mass, is found around the critical field strength, $\mathcal{E}_{\text{cr}} \simeq 4\text{GeV}$. On the contrary, the breaking of chiral symmetry is enhanced by a color-magnetic field, although its effects on chiral symmetry is rather small. Natural extension to the three-flavor case including s -quarks is also done. Due to sufficiently strong color-electric field around quarks or antiquarks, chiral symmetry would be restored inside hadrons, which may lead to the chiral bag picture of hadrons. For pre-equilibrium stage for ultrarelativistic heavy-ion collisions, the chiral-symmetry restoration by a strong color-electric field is also indicated in the central region just after the collisions.

CONTENTS

1. Introduction	2
2. Formalism	6
2.1 QCD と chiral 対称性	6
2.2 NJL model ~ QCD の有効模型	8
2.3 covariantly constant condition	11
2.4 proper-time の方法による定式化	13
2.5 dynamical quark mass に対する表式	15
2.6 直観的な物理的解釈	21
2.7 q - \bar{q} 対生成率に対する表式	22
3. 計算結果	23
4. three flavor の場合への拡張	27
5. 他の approach との比較	30
5.1 異なる source term の導入方法, 及び 結果の比較	31
5.2 CHA approach との比較	33
6. flux-tube 描像での hadron の構造や高エネルギー 重イオン衝突に対する応用	34
6.1 hadron 構造	35
6.2 高エネルギー重イオン衝突	37
7. Summary and Concluding Remarks	39
Appendices.	43
appendix A. Effective Potential の諸性質	43
A2 weak field limit での表式	44
A2 strong field limit での表式	45
appendix B. 特性関数の諸性質	46

B1	weak field limit 及び strong field limit での表式	47
B2	color 電場, 或は color 磁場だけの場合	49
	appendix C. ζ -function regularization method	51
C1	Formalism	51
C2	計算結果	56
Figure captions	_____	61

1. Introduction

強い相互作用を記述する Quantum Chromo-Dynamics (QCD) は、その漸近的自由性により、¹ 高エネルギー領域では、coupling が小さくなるので、Feynman rule に従う通常の摂動論を用いた解析が有効であり、proton を target とする deep inelastic lepton scattering の実験結果 (scaling 則) 等を精度良く再現する。これに対して、低エネルギー領域では、QCD の強結合性、及び、それに伴う非摂動論的性質により、QCD からの直接的な理解は、極めて困難である。それ故に、間接的ではあるが、QCD の基本的性質を備えた有効模型²⁻⁴ や、或は、最近では lattice QCD simulation⁵ を用いての hadron の構造や非摂動論的 QCD 真空の性質に関する様々な研究により、低エネルギー領域での QCD に対する多くの理論的な理解が得られてきた。QCD の低エネルギー領域での際立った特徴としては、chiral 対称性の自発的破れと color の閉じ込めという 2 つの現象が挙げられる。特に、chiral 対称性の自発的破れは、非摂動論的な QCD 真空 及び、それに関連した hadron の性質を理解する際に極めて重要であり、実際、hadron の幾つかの性質は、chiral 対称性の議論だけから導くことができる (low-energy theorem).⁶ また、chiral 対称性を考慮にいたした QCD の有効模型を用いての研究²⁻⁴ は、ここ 10 年程の間に顕著な進展を見せており、最近の lattice QCD simulation での解析⁵ とともに、hadron 物理における重要な手法となっている。

低エネルギーの hadron の世界では、chiral 対称性は自発的に破れてた状態にあるが、強い相互作用の energy scale 程度に高温・高密度の状況下などでは、chiral 対称性の回復、即ち、Nambu-Goldstone(NG) 相から Wigner-Weyl(WW) 相への相転移現象が、期待されている。⁷ このことと関連する具体的な物理現象としては例えば、(a) 高エネルギー重イオン衝突によって形成される高温で低 baryon 密度の quark-gluon-plasma(QGP),⁸ (b) 宇宙初期 (QCD 相転移以前) での高温・高密度の QGP, (c) 重い星の内部などで期待される高密度で chiral 対称性が回復した abnormal matter⁹ などが挙げられる。

最近、我々と Klevansky 等は、高温あるいは高密度下での chiral 対称性の回復以外にも、強い (color-) 電磁場中でも、同様の相転移が起こり得ることを幾つかの論文で指摘してきた。¹⁰⁻¹⁵ このうち、color 電磁場と chiral 対称性との関連性は、hadron を quark-gluon level で考察する際には、以下のような意味で特に重要であると思われる。hadron を valence の quark、(或は、antiquark) により構成されている量子多体系として捉えると、それら valence quark は、color source として color 電磁場 (gluon 場) を周囲の空間に放射している。この valence

quark が作る color 電磁場は、強い相互作用の energy scale のものなので、通常期待される電磁場よりも遥かに強い大きさのものが期待できる。そのように強い color 電磁場は、周囲の QCD 真空の性質、例えば、chiral 対称性の発現様式にも影響を及ぼす可能性がある。その意味で、color 電磁場による相転移は、特殊な状況下での相転移としてのみならず、現実の hadron の構造を考察する上でも重要な意味を持つと思われる。尚、実際に最近の幾つかの lattice QCD simulation によっても、valence quark の近傍での chiral 対称性の回復が報告されている。¹⁶

また、有効模型を用いた計算では、強い電場の下での chiral 対称性の回復が議論されており、^{10,14} chiral 対称性の order parameter である quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ あるいは σ 場の真空期待値 $\langle \sigma \rangle$ が、強い電場の下では消失し得ることが示されている。その際の臨界電場は、Ref.10 では、 $eE_c \simeq (480\text{MeV})^2$ と非常に大きく、実験等での実現は難しい。その上、quark の電荷は、 u と d とでは異なり、電磁相互作用は、isospin 対称性を、explicit に破っているため、厳密な意味では、電磁場がある下では、常に、chiral 対称性は explicit に破れてしまう。その意味で、電場による“chiral 対称性の回復”は、理論的にも実験的にも困難を含んでいる。

本論文では、強い color 電磁場が外場として存在する状況下での chiral 対称性の発現様式を議論する。上述の電磁場の場合とは異なり、valence quark の周囲では、比較的現実的なものとして、非常に強い color 電磁場が期待され、しかも、color 電磁場の相互作用 (quark-gluon interaction) は flavor に依らないので、color 電磁場の存在が chiral 対称性を explicit に破ることはない。その意味で、chiral 対称性を議論する際には、電磁場よりも、color 電磁場の方がより適当であり、かつ、hadron 構造や実験 (高エネルギー重イオン衝突) と関連が深いという点で内容が豊富である。特に quark-gluon level での hadron physics という点からは、quark のみならず、gluon にも着目して、両者の関連を議論することは、従来あまり例がなく、その意味でも重要と思われる。事実、hadron physics において、これまでに為された研究の多くは、lattice QCD simulation を除いては、主として、quark の自由度に重点が置かれており、gluon に関しては、高々、one-gluon-exchange の効果などのように、摂動論的かつ補正的にしか取り扱われていない。或は、Yang-Mills 理論等での研究においては、研究対象は専ら、pure な gauge 場 (gluon) に限られ、quark の自由度についてはあまり議論されていない。我々は、ここでは、quark と gluon の相互の関連性を問題意識として、valence quark の存在が、gluon 場を通じて周囲の QCD 真空の性質、(とりわけ quark の有効質量と深く関わる chiral 対称性) に、どのような形で影響を及ぼすのかを研究する。

さて, chiral 対称性の order parameter である quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ は, 真空と同じ量子数を持ち, color 電荷を持たないので, color 電磁場と direct に couple しない.* 従って, order parameter $\langle \bar{q}q \rangle$ と color 電磁場との coupling は, color を持った粒子の量子的揺らぎを通じて為され, それ故, quantum level での解析が必要不可欠になる.† このように, quantum level で外場中での対称性の発現様式を議論するには, effective potential の方法^{10,11,17} が有用である. これは, formalism として, 量子的揺らぎを含んでおり, 且つ, 対称性の自発的破れの直観的な理解を与える. また, color 電磁場が外場として存在する下では, chiral 対称性に影響を及ぼすのみならず, Schwinger 機構^{18,19} によって, quark-antiquark の対生成も起こり得る. Schwinger 機構は, もともとは, QED の framework で議論された, 強電場中での e^+e^- 対生成現象に関するものであったが, 近年, 高エネルギー重イオン衝突¹⁹ における QGP 形成との関連で, QCD での $q\bar{q}$ 対生成という形で注目され, 数多く議論されている. 後の 6 章で述べるように, 高エネルギー重イオン衝突直後では, 重イオン間には非常に強い color 電磁場が期待され, それが, Schwinger 機構, 即ち, quark-antiquark 対生成を通じて, 高温の QGP に転化する. いくつかの論文では, このシナリオに沿って QGP への転化の機構や QGP の性質等を議論している.²⁰

この様に, color 電磁場が存在する状況下では, chiral 対称性と quark-antiquark 対生成とが同時に問題となるが, これら 2 つの異なる現象は, effective potential の枠組みからは, 同時に理解できる. 即ち, 2 章で言及するように, effective potential の実部に対する energy minimum の条件から, chiral 対称性の発現様式, 或は, quark の有効質量 (dynamical mass) が決定され, 他方, その虚部は, Schwinger 機構 (quark-antiquark 対生成)^{11,21} による真空の不安定性を記述する. それ故, effective potential formalism を用いることにより, これら 2 つの現象が, 両者関連した形で, 同時に議論できる.

先にも触れたように, 低エネルギー領域では, QCD は, その非摂動的な性質故に, 直接取り扱うことは非常に困難である. 従って, ここでは, chiral 対称性を議論する上で, しばしば用

* この点, 自発的対称性の破れの典型である, 超伝導の場合とは大きく異なる. つまり, 超伝導においては, order parameter である Cooper pair は電荷を持っており, gauge 場である電磁場と直接 couple する. その結果, Higgs 機構が働いて, gauge 場は NG boson の自由度を吸収し massive になる. これに対して, chiral 対称性の議論では, order parameter は gauge 場と couple しないので, Higgs 機構は働かない.

† この点に関しても, 超伝導の場合とは異なっている. 例えば, 超伝導体の磁場による相転移を議論する際には, 電磁場と couple した Ginzburg-Landau 方程式を用いて, tree level での議論が可能である.

いられる QCD の有効模型の 1 つ, Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model³ を用いて議論を行う。NJL model は, chiral 対称性と関連した hadron の諸性質や, 有限温度・有限密度での chiral 相転移を議論する上で有用な模型であり, 定性的のみならず, 定量的にも hadron mass や lattice QCD simulation から示唆される臨界温度等を良く再現する。NJL model は, しかし, くりこみ不可能な理論であり, 何らかの正則化が必要とされるが, 結果は, 一般に, 正則化の仕方に依存する。我々は, まず, Fock-Schwinger の proper-time の方法²² を用いて effective potential を導出する。次いで, そこでの結果を, Klevansky らの constrained Hartree approximation (CHA)^{14,15} を基礎にして行った結果と比較検討する。また, Appendix C では, 別の正則化法である, ζ -function regularization^{23,17} の適用, 及び結果の比較・検討も試みる。

2 章では, two flavor の場合について, 並進不変な color 電磁場の外場が存在する下での effective potential を導出する。quark 場に対する Dyson 方程式が, effective potential の実部に対する極値条件から自然に導出されることを示し, また, effective potential の虚部から, quark-antiquark 対生成率に対する表式を導出する。3 章では, valence quark が作る color 電磁場に対して, 理論を適用し, effective potential, quark の dynamical mass, q - \bar{q} 対生成率等についての定量的な評価を与える。4 章では, 理論を, three flavor(u, d, s) の場合に拡張し, u, d -sector と s -sector との比較を行い, s -quark の大きな current mass に伴う, explicit な chiral 対称性の破れが及ぼす効果等を調べる。5 章では, effective potential の方法における source term の導入方法の不定性を議論し, 2-3 章とは異なる source term による計算を行い, そこでの結果との比較を行う。また, Klevansky 等が用いた他の方法, constrained Hartree approximation を基にした approach との比較・検討も行う。6 章では, color-electric flux tube 描像に基づいて, hadron の構造を議論し, 系の chiral 対称性という観点から, flux tube 描像と chiral bag 描像との関連性を探る。また, 以上の議論を, 高エネルギー重イオン衝突直後の非平衡状態に適用し, そこでの chiral 対称性について考察する。7 章は, summary と concluding remarks にあてる。

2. Formalism

2.1 QCD と CHIRAL 対称性

強い相互作用は $SU(3)_c$ の gauge 理論である QCD で記述される, その Lagrangian は quark (q^α) と gluon ($G^\mu = G^{\mu a} T^a$) から構成されており,*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}(iD - m)q - \frac{1}{2}\text{tr}_c(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) \\ &= \bar{q}(i\not{D} - m)q + gj_\mu^a G^{\mu a} - \frac{1}{2}\text{tr}_c(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - ig[G_\mu, G_\nu]$ は gluon の field strength, m は, current quark mass, tr_c は color space での trace を表す また, $j_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu T^a q$ は, gluon field と couple する quark の color 電磁 current である.

次に, QCD Lagrangian の持つ対称性について考察する. QCD Lagrangian に現れる current quark mass は, u, d -quark については, $m_u \simeq 4\text{MeV}$, $m_d \simeq 7\text{MeV}$ と hadron mass scale である 1GeV (或は QCD の scale parameter $\Lambda_{\text{QCD}} = 100 \sim 200\text{MeV}$) に比べて非常に小さいので, 近似的には無視できる.† そして, quark の mass term を除いて考えると, QCD は, local な gauge 対称性 $SU_c(3)$ の他に, global な chiral 対称性 $U(N_f)_L \times U_R(N_f) \simeq U(N_f)_V \times U_A(N_f)$ を tree level で持っていることがわかる. 即ち, tree level では, quark の left-component, right-component に対して, 独立な unitary 変換

$$q_L \rightarrow U_L q_L, \quad q_R \rightarrow U_R q_R \quad (2.2)$$

を行っても QCD Lagrangian は不変である. 但し, U_L, U_R は, unitary 群 $U(N_f)$ の任意の独立な element であり, N_f は flavor の数を表す (例えば, u, d について議論するときは, $N_f = 2$ であり, u, d, s まで考えるときは, $N_f = 3$ となる.)

* 混乱を避けるため, gauge 対称性 $SU(3)_c$ の generator に対しては, $T^a (a=1,2,\dots,8)$ を用い, flavor 対称性 $SU(3)_f$ の generator に対しては $\lambda^a/2$ を用いることにする.

† s -quark については, $m_s \simeq 150\text{MeV}$ と幾分大きい, しばしば, 最低次では無視される (chiral perturbation theory).¹

なお、(mass term を除き) tree level で成り立つ γ_5 を含む位相対称性 $U_A(1)$ ($q \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}q$ に対する不変性) については、良く知られているように、loop level では $U_A(1)$ -anomaly の為 に explicit に破れているので、¹ 結局、QCD が Lagrangian level で持つ global な対称性は、mass term を除いて、 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_V(1) \simeq SU_V(N_f) \times SU_A(N_f) \times U_V(1)$ である。

これらの global な対称性のうち、 $U_V(1)$ は、単なる位相対称性であり、 $SU_V(N_f) \times SU_A(N_f)$ については、

- (1) flavor 対称性 $SU_V(N_f)$: flavor 変換 $q \rightarrow e^{i\theta^a \lambda^a / 2} q$ に対する不変性であり、hadron 物理において古くから良く知られていた。ここで、 $\lambda^a / 2$ は、 $SU(N_f)$ の generator を表し、 θ^a は、space-time coordinate に依らない任意の parameter である。
- (2) $SU_A(N_f)$: 異なった flavor を混合する chiral 変換 $q \rightarrow e^{i\theta^a \gamma_5 \lambda^a / 2} q$ に対する不変性。もし、この対称性が成り立つならば、parity の異なった状態が縮退して現れる (parity doubling)。

しかし、現実の hadron 状態においては、上記の parity doubling は起こってはいない、例えば、nucleon の parity-odd の partner は、低エネルギーでは見つからない。即ち、低エネルギーでの hadron 状態においては、 $SU_V(N_f) \times U_V(1)$ という位相対称性と flavor 対称性しか成り立っておらず、従って、 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_V(1) \rightarrow SU_V(N_f) \times U_V(1)$ という、chiral 対称性の自発的な破れが起こっている。この chiral 対称性の自発的な破れに伴って、broken symmetry に対応する collective mode として、Nambu-Goldstone(NG) boson が現われる：(近似的に) massless な pseudoscalar 粒子が broken symmetry $SU_A(N_f)$ の generator と同じ数だけ現われる。実際の hadron の世界では、two flavor に限れば、3 個の pion (π^+ , π^0 , π^-) が、three flavor では、8 個の flavor-octet pseudoscalar meson (π^+ , π^0 , π^- , K^+ , K^0 , K^- , \bar{K}^0 , η_8) が対応し、それらの性質のうちの多くは、low-energy theorem によって、chiral 対称性の議論だけから決ってしまう。⁶ この様に、chiral 対称性の自発的破れは low-energy での hadron の物理を議論する上で、欠かすことの出来ない重要な現象である。

2.2 NJL MODEL ~ QCD の有効模型

本来, QCD を直接用いて chiral 対称性や hadron の構造等を議論することが、望ましいのであるが、しかし, low-energhy 領域 では QCD の強結合性, 及び, それに伴う非摂動論的性質のために, その直接的解析は非常に困難である. lattice QCD simulation は, 現時点での唯一の QCD から直接的解析を実行できる手法であるが, そこで得られる data から, 物理的な議論なり, 説明を引き出すことは一般に難しい. それに加えて, lattice の finite size effect 等の精度上の問題や quark の current mass に対する計算上の制限 ($m_q \gtrsim 40 \sim 50\text{MeV}$) 等の問題があり, 現時点での, 定量的な意味での信頼性は必ずしも充分とは言えない.⁵

そこで, dynamical gluon による非摂動論的な効果を, quark 間の effective な four-fermion interaction という形で取り込んだ, QCD の有効模型の 1 つ, Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model を基にして, color 電磁場中での chiral 対称性の発現様式を議論する. NJL model は, 1984 年以降, quark level での有効模型として revive した後, 様々な hadron に対する各種物理量の計算や, 有限温度 有限密度での chiral 対称性の研究等, 数多くの研究が, この模型を用いて為されてきた.³ この模型は chiral 対称性に関する QCD の定性的な側面を良く記述するとともに, 定量的にも, 例えば, 有限温度での chiral 相転移の研究結果は, 最近の lattice QCD simulation から得られる結果とよく符合する.^{5,24}

さて, 我々がここで用いる Lagrangian は,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{NJL}}[q, \bar{q}] + g j_\mu^a G^{\mu a} - \frac{1}{2} \text{tr}_c(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}). \quad (2.3)$$

ここで, \mathcal{L}_{NJL} は通常の NJL model の Lagrangian であり, two flavor の場合では,

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}[q, \bar{q}] = \bar{q}(i\not{\partial} - \bar{m})q + g_{\text{NJL}}[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2]. \quad (2.4)$$

なおここでは, u, d -quark の current mass の小さな差異は無視して, それらの平均値 $\bar{m} = (m_u + m_d)/2$ を用いる.

さて, NJL model での quark 間の four-fermion interaction は, Fig.1 の様に, quark 間を propagate する dynamical gluon の非摂動論的な効果を effective に取り込んだものと考えられる.

Fig.1

それ故, ここでは, dynamical gluon の効果は, 既に quark 間の four-fermion interaction という形で, 理論に取り込まれていると解釈し, dynamical gluon, 即ち, gluon 自身の dynamics については, explicit には取り扱わない. 即ち, Fig.2 の様な quark と external gluon の tree level での coupling のみを考慮する.

Fig.2

また, 以下では, gluon の kinetic term は略記することにする.

低エネルギー領域での chiral 対称性の自発的破れに関する 1 つの解釈として, quark の有効質量に着目した解釈がある. 即ち, current quark は QCD の非摂動的な dynamical effect により, 大きな有効質量を獲得し, constituent quark へと転化する. そして, quark が mass を得るのに伴って, chiral 対称性は自発的に破れる. ここで用いる NJL model では, この mechanism が理論の骨格として取り込まれている. 実際, Lagrangian (2.3) は小さな current-quark mass の寄与を除いて, chiral 対称性, $SU(2)_L \times SU(2)_R$ を有しているが, 物理的に実現される状態 (真空) では, quark 間の attractive な four-fermion interaction の為に, quark が大きな dynamical mass を獲得し, その結果, 対称性は $SU(2)_V$ まで自発的に破れてしまう. この場合, dynamical quark mass は, chiral 対称性の order parameter である quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ と密接に関連し, 温度, 密度, あるいは, カラー電磁場等, 系の置かれている環境によって変化し得る dynamical variable である.

補助場, σ と $\vec{\pi}$ を用いると Eq.(2.4) の \mathcal{L}_{NJL} は

$$\mathcal{L}_{\text{aux}}[q, \bar{q}, \sigma, \vec{\pi}] = \bar{q}(i\not{\partial} - \bar{m})q - \bar{q}(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})q - \frac{1}{4g_{\text{NJL}}}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \quad (2.5)$$

と書き換えられる. gluon の外場 $G_{\text{ex}}^{\mu a}$ が存在する下での partition functional $Z[J_\sigma, \vec{J}_\pi; G_{\text{ex}}^{\mu a}]$ は, path integral で表すと,

$$\begin{aligned} Z[J_\sigma, \vec{J}_\pi; G_{\text{ex}}^{\mu a}] \\ = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \exp\left\{i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{aux}}[q, \bar{q}, \sigma, \vec{\pi}] + g j_\mu^a G_{\text{ex}}^{\mu a} + J_\sigma \sigma + \vec{J}_\pi \cdot \vec{\pi})\right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここでは, 補助場による表式 Eq.(2.5) を出発点として, source term は, $J_\sigma \sigma$, $\vec{J}_\pi \cdot \vec{\pi}$ の形で

導入した * さて, Eq.(2.6) より, σ -場の真空期待値 $\langle \sigma \rangle_J$ は,

$$\langle \sigma \rangle_J = \frac{1}{iZ} \frac{\delta Z}{\delta J_\sigma} \quad (2.7)$$

で表され, また, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle_J$ との関連は,

$$\langle \bar{q}q \rangle_J = -\frac{1}{2g_{\text{NJL}}} \langle \sigma \rangle_J + J_\sigma. \quad (2.8)$$

よって, $J_\sigma = 0$ では, $\langle \bar{q}q \rangle_J \propto \langle \sigma \rangle_J$ であるが, それ以外では, $\langle \bar{q}q \rangle_J$ は単純に $\langle \sigma \rangle_J$ に比例しない.

さて, Eq.(2.6) は, quark field について, bilinear なので, quark についての functional integration は容易に実行でき, そうして得られる σ 及び $\vec{\pi}$ に対する mean-field level での effective Lagrangian は,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[\sigma, \vec{\pi}] = -\frac{1}{4g_{\text{NJL}}}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \mathcal{L}_{\text{loop}}[\sigma, \vec{\pi}]. \quad (2.9)$$

ここで, $\mathcal{L}_{\text{loop}}$ はこの理論での quark determinant であり, quark loop の寄与を表す,

$$\mathcal{L}_{\text{loop}}[\sigma, \vec{\pi}] = -i \text{Tr} \ln \{ (i\not{\partial} + g\not{G}_{\text{ex}}) - (\bar{m} + \sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) + i\epsilon \}. \quad (2.10)$$

Eq.(2.10) 中の Tr は quark field の自由度 (coordinate space, spin, flavor 及び color indices) に対する functional trace を表す 以下では, translational invariance な系を考えるので, σ 及び $\vec{\pi}$ は constant とする. すると, effective Lagrangian \mathcal{L}_{eff} は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[\sigma, \vec{\pi}] = -\frac{1}{4g_{\text{NJL}}}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \{ -(i\partial^\mu + gG_{\text{ex}}^\mu)^2 + \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\text{ex}}^{\mu\nu} + \bar{M}^2 + \vec{\pi}^2 - i\epsilon \} \quad (2.11)$$

のように変形される ($\sigma_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$). 尚, $\bar{M} \equiv \bar{m} + \sigma$ は, 主として相互作用によってもたらされる dynamical quark mass (quark の有効質量) であり, color 電磁場の大きさなど, 環境によって変化し得る量である.

* order parameter が composite operator によって表せる場合は, source term の導入の仕方が unique ではない.²⁵ 他の type の source term については, 5 章で議論する.

2.3 COVARIANTLY CONSTANT CONDITION

さて、我々は、external gluon field が covariantly constant^{26,27} 即ち、gluon の covariant derivative, $\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - igG_{\mu,\dagger}$ が field strength と可換である場合

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{F}_{\alpha\beta}] = 0 \quad (2.12)$$

に着目しよう。これは、QED での constant field condition を nonabelian gauge theory において自然な形で拡張したものであり、系の *translational invariance* を保持する。²⁸ (Eq.(2.17) 参照)。

一般的な関係式 $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -ig\mathcal{F}_{\mu\nu}$ および, Jacobi identity

$$[[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu], \mathcal{F}_{\alpha\beta}] + [[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{F}_{\alpha\beta}], \mathcal{D}_\mu] + [[\mathcal{F}_{\alpha\beta}, \mathcal{D}_\mu], \mathcal{D}_\nu] = 0 \quad (2.13)$$

を用いると、

$$[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{F}_{\alpha\beta}] = 0 \quad (2.14)$$

が得られ、 $\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mu, \nu=0,1,2,3)$ は互いに可換であることがわかる。それ故、全ての $\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mu, \nu=0,1,2,3)$ は、適当な表現において、同時に対角化される。例えば、 $SU(3)_c$ の適当な基本表現では、

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \text{diag}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}, \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}, \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(3)})_c = \mathcal{F}_{\mu\nu}^A T^3 + \mathcal{F}_{\mu\nu}^B T^8 \quad (2.15)$$

と様に対角的に表せる。このように条件 (2.12) を課す事によって、color 電磁場の外場に対する群構造は $SU(3)_c$ から、その maximal torus subgroup である $U(1)_A \times U(1)_B$ に reduce される。なお、この 2 種類の abelian group $U(1)_A$ および $U(1)_B$ に対応しては、2 種類の “charge” Q_A, Q_B が定義され、²⁹ * 後の章で見るように、これに基づいて quark や gluon の

† 以下では専ら external gluon に着目するので、 G_{ex}^μ and $\mathcal{F}_{\text{ex}}^{\alpha\beta}$ 中の subscript “ex” は省略する。

* nonabelian gauge field の diagonal part が、低エネルギーでの color confinement に強く寄与するかも知れないという、QCD の abelian projection scheme³⁰ においてはこの種の abelian subgroup は重要な意味を持つ可能性がある。

“charge”を議論できる。また、適当な gauge を選ぶことによって, gluon G_μ ($\mu=0,1,2,3$) についても $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ と同様に対角的な形で表せる。例えば,

$$G^\mu = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\mu\nu}x_\nu. \quad (2.16)$$

従って, $[G_\mu, \mathcal{F}_{\alpha\beta}] = 0$, が成立し, それ故,

$$[\partial_\mu, \mathcal{F}_{\alpha\beta}] = 0 \quad (2.17)$$

であり, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu=0,1,2,3$) は space-time coordinate x_μ に依存しないことがわかる。

重要な点は, Eq.(2.12) および Eq.(2.14) から, QED あるいは abelian な場合と同様の定式化や議論¹⁰ が, この様な場合においても straightforward に拡張可能であるということである。

さて, color 電磁場 \vec{H}, \vec{E} は, field strength $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ から,

$$(\vec{H})_i \equiv \epsilon_{ijk}\mathcal{F}_{jk}/2, \quad (\vec{E})_i \equiv \mathcal{F}_{0i} \quad (2.18)$$

と定義されるが, これら \vec{H}, \vec{E} から作られる Lorentz scalar は,

$$\mathcal{F} \equiv (\vec{H}^2 - \vec{E}^2)/2, \quad \mathcal{G} \equiv \vec{H} \cdot \vec{E} \quad (2.19)$$

及び, その combination であり, 以下で, effective Lagrangian の表式に現われるのは,

$$H = [(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} + \mathcal{F}]^{1/2} \quad E = [(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} - \mathcal{F}]^{1/2} \quad (2.20)$$

という2種類の量である。もちろん, H, E は Lorentz scalar であるが, それらの大雑把な物理的意味としては, H は color 磁場の大きさ, E は color 電場の大きさを表す H, E のより正確な意味は, 以下のように記述される。

\vec{H}, \vec{E} を color 空間について対角化する基本表現をとり, その対角成分である, (i)-component ($i = 1, 2, 3$) に着目する。

(A) $\mathcal{G}^{(i)} \equiv (\vec{H} \ \vec{E})^{(i)} \neq 0$ のとき, 適当な Lorentz frame をとると, $\vec{H}^{(i)}/\vec{E}^{(i)}$ とする事が可能である.

(B) $\mathcal{G}^{(i)} \equiv (\vec{H} \ \vec{E})^{(i)} = 0$ のとき, 適当な Lorentz frame を取ると,

(I) $\mathcal{F}^{(i)} > 0$ ならば, $\vec{H}^{(i)} \neq 0, \vec{E}^{(i)} = 0,$

(II) $\mathcal{F}^{(i)} < 0$ ならば, $\vec{H}^{(i)} = 0, \vec{E}^{(i)} \neq 0$ とすることが可能である.

そして, (A),(B) それぞれの場合について, この様な Lorentz frame をとると,

$$E^{(i)} = [(\mathcal{F}_{0l}\mathcal{F}_{0l})^{1/2}]^{(i)}, \quad H^{(i)} = [(\mathcal{F}_{mn}\mathcal{F}_{mn}/2)^{1/2}]^{(i)} \quad (2.21)$$

となり, $H^{(i)}, E^{(i)}$ が, それぞれ, color 磁場の大きさ, color 電場の大きさに対応することがわかる. 但し, H, E は color indices を持つ *matrices* である.

2.4 PROPER-TIME の方法による定式化

次に, Fock-Schwinger の proper-time の方法²² を用いて, \mathcal{L}_{eff} の計算を行う. proper-time の方法³¹ を用いると hermite operator \hat{O} の logarithm は, irrelevant な constant を除いて,

$$\ln(\hat{O} - i\epsilon) = - \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\tau(\hat{O} - i\epsilon)} \quad (2.22)$$

の形で表せる. これは, Eq.(2.22) を, \hat{O} で functional derivative すれば, 容易に確かめられる.

これを用いると, Eq.(2.11) 中の $\mathcal{L}_{\text{loop}}$ の寄与は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{loop}} &= \frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\tau\{-(i\partial - gG)^2 + \frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{M}^2 + \vec{\pi}^2 - i\epsilon\}} \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{i\tau(i\partial - gG)^2} e^{-i\tau\frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}} e^{-i\tau(\bar{M}^2 + \vec{\pi}^2 - i\epsilon)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで, 第2式から第3式に移行する際に, Eq.(2.12), 即ち, $\mathcal{D}_\mu, \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ が互いに可換であること

を用いた. 更に,

$$\text{tr}_\gamma \exp(-i\tau \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) = 4 \cos(gH\tau) \cosh(gE\tau) \quad (2.24)$$

及び,

$$\text{tr}_{\text{space-time}} \exp\{i\tau(i\partial - gG)^2\} = \frac{gH}{4\pi i} \frac{1}{\sin(gH\tau)} \frac{gE}{4\pi} \frac{1}{\sinh(gE\tau)} \quad (2.25)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{loop}} &= -\frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-i\tau(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2 - i\epsilon)} (gE\tau) \coth(gE\tau) (gH\tau) \cot(gH\tau) \\ &= -\frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{c\text{p.v.}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2)} (gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs) \\ &\quad + i \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^\infty \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2)/(gE)\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここで, N_f は, flavor の数であり,* “p.v.” は principal value を取ることを意味する. Eq.(2.26) を導出する際には, complex τ -plane において, 積分経路を実軸上から虚軸上に変更した後, τ から $s \equiv i\tau$ への積分変数の置換を行った. なお, \mathcal{L}_{eff} 中の imaginary part は, complex τ -plane 上の $\tau = -in\pi/(gE^{(i)})(i = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, \infty)$ での pole から生じる.

Eq.(2.26) 中, 2行目の積分は, high-energy limit に対応する $s = 0$ において発散する. この発散は quark field に対する loop 積分に由来しており, 本来, くりこみの処方によって除去されるべきものであるが, 不幸にして, NJL model は くりこみ不可能であり, well-defined に くりこみを行うことはできない. 従って, 物理的に意味のある有限な量を抽出する為に, ここでは, ad hoc な正則化を行う.[†] 元来, NJL model は, 低エネルギーでの有効模型なので, ultra-violet cutoff Λ を導入して, $s = 0$ での紫外発散を含む high-energy 領域を cut して

* この場合は $N_f = 2$ であるが, three flavor での chiral limit の場合 ($m_u = m_d = m_s = 0$) などを議論する際には, $N_f = 3$ とすれば, 以下の表式が適用可能である.

† この事情故に, 結果は, 一般に 正則化の仕方に依存してしまう. それに関連しては, 5章及び Appendix を参照されたし.

しまうのが簡便にして reasonable な方法である。つまり、 s -積分の下端を 0 から $1/\Lambda^2$ に置き換える。^{*}

さて、 σ 及び $\vec{\pi}$ については、kinetic term が存在しないので、effective potential は単に、

$$V_{\text{eff}} = -\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2 + \vec{\pi}^2}{4g_{\text{NJL}}} + \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s(\bar{M}^2 + \vec{\pi}^2)} (gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs) \quad (2.27)$$

$$- i \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi(\bar{M}^2 + \vec{\pi}^2)/(gE)\}$$

となる。 H, E は Lorentz scalar であり、かつ、color に対して trace を取っているので、この表式は、Lorentz invariant であるとともに gauge invariant でもある。重要な点としては、Eq.(2.26) は、 gE 及び gH の full order を含んでいる。特に、 V_{eff} の imaginary part については、純粹に gE に関して非摂動的であり、 gE のべき展開によっては得ることはできない。尚、effective potential V_{eff} の幾つかの細かい性質については、Appendix A にまとめておく

2.5 DYNAMICAL QUARK MASS に対する表式

さて次に、effective potential の実部、虚部に対する物理的な意味について言及する。effective potential の real part は真空の energy に対応し、その imaginary part は $q-\bar{q}$ 対生成に対する真空の instability を記述する。

まず、effective potential の real part $\text{Re}V_{\text{eff}}$ について考察する。effective potential の real part は $\sigma, \vec{\pi}$ で指定される真空の energy に対応するので、energy 的に安定で、物理的に実現され得る真空は effective potential の real part の最小点という形で決定される。従って、color 電磁場が存在する下での $\sigma, \vec{\pi}$ の physical な値は、effective potential V_{eff} の real part に対する minimum condition

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \text{Re}V_{\text{eff}}(\sigma, \vec{\pi}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\pi}} \text{Re}V_{\text{eff}}(\sigma, \vec{\pi}) = 0 \quad (2.28)$$

から得られる。Eq.(2.27) より、chiral 対称性の explicit な破れがある場合は、energy 的に

* 我々は、この処方、Eq.(2.26) の最後の式に適用するが、もし、それより前の段階で適用しようとする τ -plane での Wick rotation の際に困難が生じてしまい、effective Lagrangian の imaginary part の導出が簡単に行えなくなる

安定な状態として $\vec{\pi} = 0$ が unique に導出される.[†] ここで, 注意すべき事として, Eq.(2.28) の第1式は, color 電磁場が存在する下での dynamical quark に対する Hartree 近似下での self-consistent な Dyson 方程式

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{m} - 2g_{\text{NJL}} \langle \bar{q}q \rangle \\ &= \bar{m} + 2g_{\text{NJL}} \text{Tr} \frac{i}{(\not{p} - g\not{G}) - M + i\epsilon}\end{aligned}\quad (2.29)$$

に一致する. この場合, Dyson 方程式は, diagram で表現すると, Fig.3 の様になる.

Fig.3

図中, 太線は 相互作用の効果を含む dynamical quark の propagator であり, 細線は, current quark の propagator を表す. ここで, quark の self-energy としては, Hartree-type の one-loop diagram のみを取り, exchange diagram 等は考慮しない (Hartree 近似). また, self-energy 中の quark loop は相互作用を含んだ dynamical quark の propagator で記述されているので, self-consistent な構造を持つ方程式になっている. 実際, 右辺を, current quark で表すと, 任意個数の quark loop を含む無限個の diagram になる. 即ち, ここで得られる dynamical quark mass は, 考慮する diagram の種類は Hartree-type に限られているが, \hbar についての full order の効果を含んでいる.

Dyson 方程式, あるいは, 極値条件 (2.28) の第1式の, 具体的な表式としては,

$$\begin{aligned}\bar{M}_D &= \bar{m} + \frac{N_f g_{\text{NJL}}}{2\pi^2} \bar{M}_D \text{tr}_{c\text{p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_D^2} (gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs) \\ &= \bar{m} + \frac{N_f g_{\text{NJL}}}{2\pi^2} \bar{M}_D N_c \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_D^2} \\ &\quad - \frac{N_f g_{\text{NJL}}}{2\pi^2} \bar{M}_D g \sum_{i=1}^3 F_{\eta^{(i)}}^{\text{fermion}}(x^{(i)}, \theta^{(i)}) (H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2}\end{aligned}\quad (2.30)$$

[†] 但し, chiral limit では, chiral circle " $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = \text{const.}$ " 上の全ての点(状態)は縮退しているため, この様な energy 的な考察からは $\vec{\pi} = 0$ は導出できない. それ故, 物理的な要請として, $\vec{\pi} = 0$ を課す必要がある.

である. ここで,

$$F_{\eta}^{\text{fermion}}(x, \theta) \equiv -\text{p.v.} \int_{\eta}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-sx^2} [(s \cos \theta) \coth(s \cos \theta) (s \sin \theta) \cot(s \sin \theta) - 1] \quad (2.31)$$

は color 電磁場の効果の特徴づける特性関数である. また, ここでは, H, E が color 空間において対角的になるような基本表現を採用し, その対角成分を, それぞれ, $H^{(i)}, E^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ で表した, 即ち,

$$H = \text{diag}(H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)})_c, \quad E = \text{diag}(E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)})_c. \quad (2.32)$$

また, x は dynamical quark mass \bar{M}_D と color 電磁場の強さとの比を表す dimensionless な parameter であり,

$$x^{(i)} \equiv \frac{\bar{M}_D}{\{(gE^{(i)})^2 + (gH^{(i)})^2\}^{1/4}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.33)$$

θ は, H と E の mixing ratio を表す parameter であり,

$$\theta^{(i)} = \arctan(E^{(i)}/H^{(i)}). \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.34)$$

あるいは,

$$\cos \theta^{(i)} = H^{(i)}/(H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2}, \quad \sin \theta^{(i)} = E^{(i)}/(H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2}$$

尚, 典型的な場合としては,

- (i) color 磁場だけの場合 ($H \neq 0, E = 0$ or $\mathcal{F} > 0, \mathcal{G} = 0$) は, $\theta = 0$.
- (ii) color 電場だけの場合 ($H = 0, E \neq 0$ or $\mathcal{F} < 0, \mathcal{G} = 0$) は, $\theta = \pi/2$.
- (iii) color 電場と color 磁場の大きさが等しい場合 ($H = E$, or $\mathcal{F} = 0, \mathcal{G} \neq 0$) は, $\theta = \pi/4$.

η は, dimensionless な cutoff parameter であり,

$$\eta^{(i)} = g(H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2}/\Lambda^2 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.35)$$

尚, 実際の計算では, cutoff Λ はかなり大きい値を取ることで, chiral 対称性の回復を議論する際

に問題となる H, E の領域では, $F_{\eta}^{\text{fermion}}(x, \theta)$ は,

$$F^{\text{fermion}}(x, \theta) \equiv F_{\eta=0}^{\text{fermion}}(x, \theta) \quad (2.36)$$

と近似できる.

さて, chiral 対称性の定性的な振舞い (回復に向かうか更に破れるか) はこの特性関数 (2.31) の符号から判断できることを以下で示す. まず, Eq.(2.30) は,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 F_{\eta^{(i)}}^{\text{fermion}}(x^{(i)}, \theta^{(i)}) (H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2} \\ &= N_c \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_D^2} + \frac{2\pi^2}{N_f g_{\text{NJL}}} \left(\frac{\bar{m}}{\bar{M}_D} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

の様に変形でき, 特に, $H = E = 0$ のときは,

$$0 = N_c \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_0^2} + \frac{2\pi^2}{N_f g_{\text{NJL}}} \left(\frac{\bar{m}}{\bar{M}_0} - 1 \right). \quad (2.38)$$

となる. 但し, \bar{M}_0 は, $H = E = 0$ のときの quark mass, 即ち, constituent quark mass を表す. Eq.(2.37) から Eq.(2.38) を減じると,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 F_{\eta^{(i)}}^{\text{fermion}}(x^{(i)}, \theta^{(i)}) (H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2} \\ &= N_c \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} (e^{-s\bar{M}_D^2} - e^{-s\bar{M}_0^2}) + \frac{2\pi^2}{N_f g_{\text{NJL}}} \left(\frac{\bar{m}}{\bar{M}_D} - \frac{\bar{m}}{\bar{M}_0} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

注目すべき事として, この表式の右辺は, dynamical quark mass \bar{M}_D に関して単調減少関数である. 従って, Eq.(2.39) より, 以下の傾向が容易にわかる.*

- (1) $F^{\text{fermion}}(x, \theta) > 0$, であれば, \bar{M}_D は減少し chiral 対称性は回復する傾向を示す
 - (2) 反対に, $F^{\text{fermion}}(x, \theta) < 0$ であれば \bar{M} は増加し, chiral 対称性は更に破れる方に進む.
- $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ の振舞いは Fig.4 で示される通りであり, また, その幾つかの性質については Appendix A にまとめておく

* ここで, color 電磁場 $H^{(i)}, E^{(i)}$ はそれぞれ 3 成分であり, 厳密には, それら 3 成分の combination で議論しなければならないが, 以下では, 概括的な理解を得る為に, 3 成分のうちの 1 つの成分に着目して, 一般的傾向を議論する.

Fig.4

さて, Fig.4 或は Appendix B から, わかるように, color 電磁場が chiral 対称性の発現様式に対して与える影響は, 以下のようなになる. 典型的な場合として,

- (1) 純粋に color 電場だけの場合 ($\theta=\pi/2$) には, $F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) > 0$ であり, \bar{M}_D は減少していき, chiral 対称性は回復に向う.
- (2) 反対に, 純粋に color 磁場だけの場合 ($\theta=0$) は, $F^{\text{fermion}}(x, 0) < 0$ であり, dynamical quark mass \bar{M}_D は増大し, chiral 対称性の破れはますます大きくなる.

定量的には, 以下の様な理由により, color 電場の効果の方が, color 磁場の効果に比べて, より一層顕著になる.

- (1) color 電場が存在する下では, dynamical quark mass の減少に伴い, $x = \bar{M}/E^{1/2}$ は急速に減少していく 従って, $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ としても, かなり大きな値を取るのので, その効果は大きく現われる.
- (2) これに対して, color 磁場のもとでは, dynamical quark mass の増加により, $x = \bar{M}/H^{1/2}$ は, ゆっくりとしか変化しない. 従って, $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ についても, 小さな値でゆっくりとしか変化せず, その効果は緩やかで, 比較的小さくなる (Fig.4 を参照).

Eq.(2.37) より, chiral limit ($\bar{m} = 0$) では, chiral 対称性が回復する ($x^{(i)} = 0$) ときの臨界 color 電場 $E_{\text{cr}}^{(i)}$ に関して簡単な関係式が導かれる,[†]

$$\begin{aligned} N_c \Lambda^2 - \frac{2\pi^2}{N_f g_{\text{NIL}}} &\simeq \sum_{i=1}^3 g E_{\text{cr}}^{(i)} F^{\text{fermion}}(0, \theta^{(i)}) / \sin \theta^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^3 g E_{\text{cr}}^{(i)} 2\pi \left[\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\pi \tan \theta^{(i)}} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

ここで, color 電磁場 $H^{(i)}, E^{(i)}$ はそれぞれ 3 成分であり, 臨界 color 電場等についても, 厳密には, それら 3 成分の combination で議論しなければならない.(その点, 臨界温度 T_c や臨界密度 ρ_c のように 1 つの値だけで表せず 厄介である.) しかし, ここでは, 概括的な傾向を調べるために,

[†] 臨界 color 電場 $E_{\text{cr}}^{(i)}$ に対するこの関係式は, chiral limit でなくても, current quark mass が小さいときには, 近似的に成立する.

以下では、3成分のうちの1つの成分 (i -component) に着目して、議論を進めることにする。
Eq.(2.40) より、臨界 color 電場 $E_{\text{cr}}^{(i)}$ の大きさは、定量的には、

$$\begin{aligned} f(\theta^{(i)}) &\equiv \sin \theta^{(i)} / F^{\text{fermion}}(0, \theta^{(i)}) \\ &= (2\pi)^{-1} \left[\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\pi \tan \theta^{(i)}} - 1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

によって特徴づけられ、また、以下の事柄が成り立つ。

(I) $F^{\text{fermion}}(0, \theta^{(i)})$ が正であれば、color 電磁場 ($H^{(i)}, E^{(i)}$) が十分に強い場合 ($x^{(i)} \simeq 0$) には、chiral 対称性が回復する方に寄与する。そして、 $F^{\text{fermion}}(0, \theta^{(i)}) > 0$ となる場合は、

$$\theta^{(i)} > 0.27, \quad \text{i.e.} \quad , H^{(i)} < 3.6E^{(i)} \quad (2.42)$$

のときである (Fig.4 参照)。従って、color 磁場が、color 電場よりも、かなり大きくならない限り、強い color 電磁場の下では、chiral 対称性は回復する方に進む。

(II) この $\theta^{(i)} > 0.27$ の範囲では、 $f(\theta^{(i)})$ は、 $\theta^{(i)}$ の単調減少関数である。即ち、color 電場の割合が大きいくほど、臨界 color 電場は小さくて済むが、color 磁場が混ざると、臨界 color 電場は大きくなり、chiral 対称性は回復しにくくなる。つまり、color 磁場の存在は、color 電場による chiral 対称性の回復を妨げる。

(III) しかしながら、color 磁場については、少なくとも、

$$H^{(i)} \lesssim E^{(i)}, \quad \text{i.e.} \quad , \theta^{(i)} \gtrsim \pi/4 \quad (2.43)$$

であれば、color 電場による対称性の回復を殆ど妨げない。

一例を挙げると、

$$f(\theta^{(i)} = \pi/4) \simeq 1.008 \quad f(\theta^{(i)} = \pi/2) \quad (2.44)$$

であり、color 磁場が、color 電場と同程度に存在しても臨界 color 電場の大きさは高々1%程度しか変化しない。この様に、color 磁場の寄与に関しては、(それが color 電場に比べて高々同程度であれば、) color 電場による chiral 対称性の回復に及ぼす効果は極めて小さい。

2.6 直観的な物理的解釈

我々が、ここで示した、強い color 電場による chiral 対称性の回復という現象は、直観的には以下のようにして物理的に説明できる。quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ を構成する quark 及び antiquark は、互いに反対の color charge を有しており、従って、color 電場の効果によって、凝縮中の q - \bar{q} 対は逆向きに引き離される。その結果、quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ は壊れ、chiral 対称性は回復する。

これと類似の現象は物性系の超伝導現象においても見られる。良く知られているように、超伝導体は、強い磁場をかけるとその超伝導という性質を失ってしまう。超伝導の order parameter である Cooper pair は、上向き spin の電子と下向き spin の電子の間に phonon を媒介とする引力が働いた結果できたものであり、その凝縮が超伝導を引き起こす。ここで、Cooper pair 中の 2 つの電子は、互いに異なる spin を有しているため、磁場をかけると、spin-magnetic interaction によって、反対向きに引き離される。それ故、強い磁場によって Cooper pair が壊され、超伝導相は通常相へと転移していく。これが、超伝導体が常伝導体に相転移する直観的な説明である。

超伝導の問題と chiral 対称性の問題とは、formalism の上でかなり大きな差異がある。実際、前者では、Higgs 機構が働き、gauge 場が NG boson の自由度を吸って massive になるが、後者では、Higgs 機構は働かず、その様なことは起こらない。にもかかわらず、QCD 真空での quark 凝縮と超伝導体での Cooper pair との間に、良く似た物理的な対応関係がみられる。ただし、興味深い点としては、(color) 電場、(color) 磁場に対する応答が、両者において、決定的に異なっている。超伝導体での問題では、磁場が Cooper pair を壊して、対称性の回復に効くのに対して、QCD 真空では、color 電場が quark 凝縮を壊して対称性の回復に寄与する。

また、color 磁場の寄与に関して、color 電場による chiral 対称性の回復に及ぼす効果が小さいことも、直観的に理解できる。quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ 中の quark と antiquark は、spin が逆向きであると同時に、color charge についても互いに反対である。従って、color 磁場によっては、quark 凝縮中の q - \bar{q} 対は同じ向きに引かれることになり、color 電場の様に逆向きに引き離され、 $\langle \bar{q}q \rangle$ を破壊するといった顕著な現象は示さない。これが、quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ 或は chiral 対称性に関して、color 磁場が比較的小さな寄与しか示さない事の直観的な説明である。

2.7 $q\bar{q}$ 対生成率に対する表式

次に, effective potential の *imaginary part* について考察する. その物理的意味としては, 既述の様に, $q\bar{q}$ 対生成に対する真空の instability を表すが, 具体的な表式としては, 真空の persistency amplitude と

$$e^{-w \int d^4x} = | \langle \text{out} | \text{in} \rangle |^2 = e^{-2\text{Im}\mathcal{L}_{\text{eff}} \int d^4x} \quad (2.45)$$

の様な関係にあり, 従って, 単位 space-time volume 当りの $q\bar{q}$ 対生成率 w に対する表式は, この場合,

$$\begin{aligned} w(\bar{M}_D) &= 2\text{Im}\mathcal{L}_{\text{eff}} = -2\text{Im}V_{\text{eff}} \\ &= \frac{N_f}{4\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi\bar{M}_D^2/(gE)\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

である. この表式より, QED での e^+e^- 対生成についての Schwinger 機構と同様の, 以下の様な特徴がわかる.

- (1) w は, gE に対して純粋に非摂動的な効果であり, derivative expansion の様に, gE に関するべき展開を用いては得ることが出来ない.
- (2) $E = 0$ では, $w = 0$ であり, また, w の値は, color 電場 E とともに単調に大きくなる. 他方, $H = 0$ でも, $E \neq 0$ ならば, $w \neq 0$ である. この様に, Schwinger 機構での $q\bar{q}$ の対生成においては, color 電場の存在が essential である.
- (3) quark mass \bar{M} が大きいほど w は小さい. これは, mass が大きいと $q\bar{q}$ pair が作られにくいことに対応する.

また特に, $H = 0$ のときには,

$$w(\bar{M}_D) = \frac{N_f}{4\pi^3} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(gE)^2}{n^2} e^{-n\pi\bar{M}_D^2/(gE)} \quad (2.47)$$

という簡単な表式になる.

3. 計算結果

この章では、具体的な物理的状況として、valence quark の近傍での空間領域を対象として、chiral 対称性の発現様式 (dynamical quark mass) 及び、 $q\bar{q}$ 対生成率 に対する定量的な評価を与える。valence quark が作る gluon の外場 は、local に見れば、一様と見なせ、static 近似の範囲内で、前章で言及した covariantly constant condition を満たす 或は、6 章で見ると、flux tube 描像をとってしまえば、hadron 内部の flux tube 等では、比較的素直に、この条件が満たされていると考えられる。SU(3)_c の基本表現では、例えば、red-quark(R), blue-quark(B), green-quark(G) の color charge はそれぞれ、

$$(Q_A, Q_B) = \left(\frac{1}{2}g, \frac{1}{2\sqrt{3}}g\right), \left(-\frac{1}{2}g, \frac{1}{2\sqrt{3}}g\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}g\right) \quad (3.1)$$

と表すことが可能である。²⁹ また、valence quark の周りに作られる color 電場 E の対角成分、 E_A 及び E_B は、それぞれ、quark の color charge Q_A 及び Q_B によってもたらされるので、 (E_A, E_B) は (Q_A, Q_B) に比例すると考えられる。それ故、valence quark の周囲にできる color 電場は以下ようになる。

(1) red-quark の周囲に形成される color 電場は、

$$\begin{aligned} gE &= g\sqrt{(E^a T^a)^2} = g\sqrt{(E_A T^3 + E_B T^8)^2} = \sqrt{(\text{diag}(\mathcal{E}/3, -\mathcal{E}/6, -\mathcal{E}/6)_c)^2} \\ &= \text{diag}(\mathcal{E}/3, \mathcal{E}/6, \mathcal{E}/6)_c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

但し \mathcal{E} は、 $\mathcal{E} \equiv \sqrt{3}g(E_A^2 + E_B^2)^{1/2}$ で定義された量である。^{*}

(2) 同様にして、blue-quark の周囲では、 $gE = \text{diag}(\mathcal{E}/6, \mathcal{E}/3, \mathcal{E}/6)_c$,

(3) green-quark の周囲では、 $gE = \text{diag}(\mathcal{E}/6, \mathcal{E}/6, \mathcal{E}/3)_c$ である。

それ故、valence quark の周りの local な空間領域での effective potential V_{eff} は、

* \mathcal{E} の定義式中の数因子 $\sqrt{3}$ は、hadron の flux tube 内部での color 電場を議論する際に、簡単になるように取った。実際、その場合には、 $\mathcal{E} = g^2/S$ (S は flux tube の断面積) となる。(6 章参照) しかし、この数因子 $\sqrt{3}$ の為に、 \mathcal{E} で与えた数値は、見かけ上、多少大きめの値になってしまう。

valence quark の color の種類には依らず,

$$\begin{aligned}
\text{Re}V_{\text{eff}} &= \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{NJL}}} \\
&+ \frac{N_f}{8\pi^2} \text{P.v.} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s\bar{M}^2} \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right) \cot\left(\frac{\mathcal{E}}{3}s\right) + 2\left(\frac{\mathcal{E}}{6}\right) \cot\left(\frac{\mathcal{E}}{6}s\right) \right], \\
\text{Im}V_{\text{eff}} &= -\frac{N_f}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right)^2 \exp\left\{-\frac{3}{\mathcal{E}}\bar{M}^2 n\pi\right\} \right. \\
&\left. + 2\left(\frac{\mathcal{E}}{6}\right)^2 \exp\left\{-\frac{6}{\mathcal{E}}\bar{M}^2 n\pi\right\} \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで, 2 種類の charge Q_A, Q_B が存在し, color 電場が, color 空間の multi-component を有する事から, Eq.(3.3) 中の括弧には 2 種類の項が現われる. (もし, color 電磁場の外場に対して, U(1) 近似を用いると, 1 種類しか項が現われない.¹⁵)

具体的な数値計算を実行するために, 以下の 2 通りの parameter set を用いる;

(i) empirical case ($\bar{m} = \frac{m_u + m_d}{2} \simeq 5.5 \text{ MeV}$): $g_{\text{NJL}} = 0.211 \text{ fm}^2, \Lambda = 950 \text{ MeV}$

(ii) chiral limit ($\bar{m} = 0$): $g_{\text{NJL}} = 0.214 \text{ fm}^2, \Lambda = 950 \text{ MeV}$

これらの parameter set は, いずれも, quark condensate 及び constituent quark mass が, color 電磁場の外場が存在しない下で, 半実験的な値,

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = -(250 \text{ MeV})^3, \quad \bar{M}_D = 335 \text{ MeV} \tag{3.4}$$

を再現するように選んだ. (i) と (ii) の両方の場合について, $H = E = 0$ での pion decay constant f_π の値は,

$$f_\pi^2 = \frac{N_c}{4\pi^2} \bar{M}_D^2 \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s\bar{M}_D^2} \simeq (118 \text{ MeV})^2 \tag{3.5}$$

となる.[†]

† $\bar{M}=335 \text{ MeV}$ を用いる代わりに, $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ と $\langle \bar{q}q \rangle = -2 \cdot (250 \text{ MeV})^3$ を再現するように, parameter(g_{NJL}, Λ) を fit しても, 以下の議論や結論には殆ど影響しない. この様にとると, 定量的には若干の変化が見られるが, 臨界 color 電場の大きさ \mathcal{E}_{cr} は, むしろ, 少しだけ小さくなるので, “hadron 内部では chiral 対称性が回復している” という 6 章での結論は, 全く変更を受けない.

\mathcal{E} が増加する下での、 V_{eff} の real part 及び imaginary part の変化は、それぞれ、Fig.5 (a), (b) のようになる。

Fig.5

$\text{Re}V_{\text{eff}}$ に関しては、 \mathcal{E} が増加するにつれて、自発的対称性の破れに特徴的な double-well の構造が single-well へと推移する。この様に、color 電場の効果によって、NG 相から WW 相への chiral 相転移が引き起こされるのがわかる。また、図中、破線で表した chiral limit の場合では、 $\text{Re}V_{\text{eff}}$ は縮退した複数の minima が存在するのに対して、empirical case の場合では、explicit な chiral 対称性の破れのために absolute minimum は1つしか存在しない。

$\text{Im}V_{\text{eff}}$ に関しては、以下のようなことが言える。(1) \bar{M} を fix して考えると、絶対値 $|\text{Im}V_{\text{eff}}|$ は、color 電場の大きさ \mathcal{E} とともに単調に増加する。これは、QED の場合と同様である。また、 \mathcal{E} を fix して考えると、 $\text{Im}V_{\text{eff}}$ の絶対値は、quark mass の絶対値 $|\bar{M}|$ が小さい程、大きな値をとるが、その理由は、質量の小さい quark-antiquark pair ほど生成し易く、従って、真空の不安定性が増加するからである。

2章で述べたように、source J_σ がある下では、 σ_J と $\langle \bar{q}q \rangle_J$ は、単純な比例関係にはない。これは、order parameter の変更によって effective potential の形が非自明に変更し得ることを意味するが、それについては、5章で議論することにする。ただし、

$$J_\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma} \text{Re}V_{\text{eff}} \quad (3.6)$$

より、物理的に興味のある $\text{Re}V_{\text{eff}}$ の extrema の位置については、source J_σ は0になるので、order parameter の選び方には依らない。そして、そこでは、 σ_J は $\langle \bar{q}q \rangle_J$ に比例する。Fig.6 は、color 電磁場が無い下で、 \bar{M} の関数として、source J_σ の値を表したものである。極小点では、 $J_\sigma = 0$ であり、極小点の内側と外側の領域とでは、 J_σ の符号が変化する。この傾向は、color 電磁場が存在する下でも定性的には変わらない。

さて、この場合の Dyson 方程式は、

$$\begin{aligned} \bar{M}_D = & \bar{m} + \bar{M}_D \frac{N_f g_{\text{N1L}}}{2\pi^2} N_c \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_D^2} \\ & - \bar{M}_D \frac{N_f g_{\text{N1L}}}{2\pi^2} \frac{\mathcal{E}}{3} [F_{\mathcal{E}/(3\Lambda^2)}^{\text{fermion}}(\sqrt{\frac{3}{\mathcal{E}}}\bar{M}_D, \frac{\pi}{2}) + F_{\mathcal{E}/(6\Lambda^2)}^{\text{fermion}}(\sqrt{\frac{6}{\mathcal{E}}}\bar{M}_D, \frac{\pi}{2})]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

であり、これを数値的に解いて得られる dynamical quark mass \bar{M}_D の変化は、Fig.7 の通りである。

Fig.7

u, d -sector では、current mass \bar{m} は小さく、従って、chiral 対称性の order parameter である quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ の値は殆ど dynamical mass \bar{M}_D に比例する。 \mathcal{E} の増加とともに dynamical quark mass は単調に減少し、 $\mathcal{E} = 4\text{GeV}$ の付近で急速に減少し、それ以上では、近似的には massless と見なせる。特に、chiral limit では、exact な chiral 対称性の回復が見られ、その臨界 color 電場の大きさ \mathcal{E}_{cr} は Eq.(2.40) から得られる、

$$\mathcal{E}_{\text{cr}} \simeq \frac{3}{\pi} \left(N_c \Lambda^2 - \frac{2\pi^2}{N_f g_{\text{NfL}}} \right) \simeq 4.1 \text{GeV/fm}. \quad (3.8)$$

chiral limit では、order parameter $\langle \bar{q}q \rangle$ は singular point の臨界点を持ちながらも連続的に変化する。即ち、ここでの相転移は 2nd order である。これに対して、僅かではあるが、explicit symmetry breaking がある実際の場合では、明確な singular point は現われず、従って、数学的に厳密な意味での相転移は起こらない^{*}。しかしながら、物理的な観点からは、empirical case においても、 $\mathcal{E} \sim 4\text{GeV/fm}$ 付近で、order parameter に急な変化が見られることから、実質的な chiral 相転移が起こったと見なすことができ、従って、この場合での chiral 相転移の臨界 color 電場の大きさも、やはり、 $\mathcal{E}_{\text{cr}} \sim 4\text{GeV/fm}$ と判断できる。

$q\bar{q}$ 対生成率は Eq.(3.3) から得られ、この場合の Schwinger formula は

$$w(\bar{M}) = \frac{N_f}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{3} \right)^2 \exp\left(-\frac{3}{\mathcal{E}} \bar{M}^2 n\pi\right) + 2 \left(\frac{\mathcal{E}}{6} \right)^2 \exp\left(-\frac{6}{\mathcal{E}} \bar{M}^2 n\pi\right) \right]. \quad (3.9)$$

この表式は、quark の massless limit $\bar{M} \rightarrow 0$ では、非常に簡単な形 $w = N_f \mathcal{E}^2 / (144\pi)$ になる。Fig.8 は $w(\bar{M}_D)$ を \mathcal{E} の関数として表したものである。ここで、Schwinger formula 中の dynamical quark mass \bar{M} は Eq.(3.7) に従って、 \mathcal{E} とともに変化する。その意味で、 $q\bar{q}$ 対生成は、quark mass の変化を通して、系の chiral 対称性と関連する。

^{*} 一般に、explicit な symmetry breaking が存在するときには、対称性の回復にともなう相転移が明確な形で定義できるとは限らない、あるいは well-defined な order parameter が定義できない。

Fig.8

empirical case ($\bar{m}=5.5$ MeV) 及び chiral limit ($\bar{m} = 0$) は, それぞれ実線, 破線で表した. 比較のため, 図中には, \mathcal{E} によって quark mass が変化しない場合の2つの典型, $\bar{M} = 0$ 及び $\bar{M}=335$ MeV の場合, を点線で書き入れた. 臨界 color 電場の大きさ \mathcal{E}_{cr} 付近で, w は, 急激な増加を示すが, これは, \mathcal{E}_{cr} 付近での quark mass の急速な減少に伴って対生成が起り易くなる事を意味している.

4. three flavor の場合への拡張

この章では, u, d, s の three flavor の場合に理論を拡張する. 3章の formulation は自然な形で, straightforward に拡張することができる. three flavor での NJL Lagrangian は,

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\mathcal{D} - m)q + g_{\text{NJL}} \sum_{a=0}^8 \{(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2\} - \frac{1}{2}\text{tr}_c(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad (4.1)$$

であり, ここで $m = \text{diag}(\bar{m}, \bar{m}, m_s)_f$ は quark の current-mass matrix である. λ^α ($\alpha = 1, \dots, 8$) は通常の Gell-Mann matrices であり, λ^0 は, $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{diag}(1, 1, 1)_f$ で定義され, これらは, $\text{tr}(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab}$ ($a, b = 0, 1, \dots, 8$) を満たす

two flavor の場合と同様に, 補助場 σ^a, π^a ($a = 0, 1, \dots, 8$) を用いて, Lagrangian を変換し, quark の自由度を integrate out すると, 補助場の mean-field level の effective Lagrangian が得られる,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4g_{\text{NJL}}} \sum_{a=0}^8 (\sigma^a\sigma^a + \pi^a\pi^a) - i\text{Tr} \ln[i\mathcal{D} - M - \sum_{a=0}^8 i\gamma_5\lambda^a\pi^a + i\epsilon] \quad (4.2)$$

が得られる. ここで, M は three flavor の場合での quark の dynamical-mass matrix であり,

$$M = m + \sum_{a=0}^8 \lambda^a\sigma^a \quad (4.3)$$

physical vacuum においては, quark の mass matrix は対角化されており, かつ physical vacuum 自身が parity の良い状態であることから, 補助場の真空期待値のうち, σ^0, σ^3 及び

σ^8 だけが 0 と異なる値を持つ。また、我々の取扱いでは、 u, d -quark mass の僅かな差異は無視しているので、 σ^3 も 0 である。よって、この場合の dynamical-mass matrix M は $\text{diag}(\bar{M}, \bar{M}, M_s)_f$ という対角的な形になる、ただし、 \bar{M}, M_s はそれぞれ、

$$\bar{M} = \bar{m} + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^8, \quad M_s = m_s + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^8 \quad (4.4)$$

である。従って、effective Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{NJL}}} - 2i \text{Tr}^* \ln[i\mathcal{D} - \bar{M} + i\epsilon] \\ & - \frac{(M_s - m_s)^2}{8g_{\text{NJL}}} - i \text{Tr}^* \ln[i\mathcal{D} - M_s + i\epsilon]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで Tr^* は flavor の自由度を除いた functional trace を表す。この方程式において、 s -sector と u, d -sector とは完全に分離している。^{*} そして、 u, d -sector については、two flavor の場合の表式 Eq.(2.9) と全く一致し、 s -sector についても、 u, d -sector と同様の関数形をしている。それ故、以前の章での u, d -sector に関する議論、および結果はそのまま変更を受けずに適用できる。そして、effective Lagrangian の real part は、この場合、

$$\begin{aligned} \text{Re}\mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{NJL}}} - \frac{(M_s - m_s)^2}{8g_{\text{NJL}}} \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s\bar{M}^2} (gHs) \coth(gHs) (gEs) \cot(gEs) \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sM_s^2} (gHs) \coth(gHs) (gEs) \cot(gEs) \end{aligned} \quad (4.6)$$

であり、また、その imaginary part は、

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\text{Im}V_{\text{eff}} \\ = & \frac{1}{4\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi\bar{M}^2/(gE)\} \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi M_s^2/(gE)\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

* ここでは、相互作用を four-fermion までに限ったが、もしも、determinant interaction を表す six-fermi interaction を含めると、 u, d -sector と s -sector は分離せず、Dyson 方程式は、両者の連立方程式になる。なお、determinant interaction は、 $U_A(1)$ anomaly を考察する際には重要であり、NJL model では、しばしば、six-fermi interaction の形で導入される。²⁴

となる。

この場合も、 \bar{M} および M_s に関する $\text{Re}V_{\text{eff}}$ の極値条件から、それぞれ、 u, d -quark および s -quark に対する Dyson 方程式が、自然な形で導出される。 u, d -quark に対しては、2章での Dyson 方程式がそのまま成立ち、一方、 s -quark に対しては、

$$M_s = m_s + \frac{g_{\text{NfL}}}{\pi^2} M_s \text{tr}_c \text{p.v.} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-sM_s^2} (gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs). \quad (4.8)$$

これは、 s -quark の mass m_s, M_s をそれぞれ、 \bar{m}, \bar{M} に置き換えれば、 u, d -quark に対する表式と完全に一致する。

ここでも $q\bar{q}$ 対生成率 w は \mathcal{L}_{eff} の imaginary part から得られ、 $w = 2\text{Im}\mathcal{L}_{\text{eff}}$ であり、かつ、個々の flavor に関連して、 w は3つの項の和で表せる、

$$w = w_u + w_d + w_s. \quad (4.9)$$

ここで、 w_u, w_d, w_s はそれぞれ、 $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ の対生成率を表す。当然のことながら、 $w_u = w_d$ であり、 $w_u + w_d$ は Eq.(2.46) 中の w に一致する。また、 $s\bar{s}$ の対生成率は

$$w_s = \frac{1}{4\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi M_s^2/(gE)\}. \quad (4.10)$$

u, d -quark に対する Dyson 方程式等は、何等の変更も受けていないので、理論の parameter set, g_{NfL} および Λ の値は、3章と同じに選んで問題ない。(parameter に対する条件 (3.4) 参照)。ただ、 s -quark の current mass については、実験値、 $m_s = 150\text{MeV}$ を取る。なお、このときの s -quark の dynamical mass は、color 電磁場が無いときで、 $M_s = 505\text{MeV}$ となり、 s -quark の constituent quark mass として、reasonable な値を再現する。

color 電場中での s -quark の dynamical mass M_s については、 u, d -quark のものと併せて、Fig.7 中に示してある。 s -quark の dynamical mass は、 u, d -quark に比べると、 \mathcal{E} の変化に対して、非常にゆっくりとしか変化しない。この様に、 s -sector に関しては、mass に伴う大きな explicit symmetry breaking の為に、相転移に伴って、本来、急速に変化するはずの

order parameter (s -sector 関しては $\langle \bar{s}s \rangle$) の singular な振舞いが見えにくくなってしまっている。[†]

ここで興味深いのは、 u, d -sector と s -sector との相違点である。臨界 color 電場の大きさ $\mathcal{E}_{cr} \simeq 4\text{GeV}/\text{fm}$ よりも大きな color 電場の下では、chiral 対称性は回復していて、 $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \sim 0$ であるのに対して、 s -sector では、color 電磁場が \mathcal{E}_{cr} 以上であっても、 \mathcal{E}_{cr} と同程度であれば、 $\langle \bar{s}s \rangle$ は、なおも、大きな値を取り続ける。このことは、強い color 電場によって、chiral 相転移が起こり、系が WW 相に移行したとしても、依然として、 s -quark が、constituent quark mass と同程度の大きな dynamical mass を保ち得る可能性を示唆している。^{*}

この場合の s - \bar{s} の対生成率は、Fig.9 の様になる。

Fig.9

w_s の値は、 w_u に比べて非常に小さい。また、 \mathcal{E} に対する w_s の変化もかなり小さく、 u, d -sector の様な \mathcal{E}_{cr} 付近での enhancement はほとんど見られない。これは、 s -quark の dynamical mass が、 u, d -quark に比べて、かなり大きく、かつ、color 電場による mass の変化が小さいことを直接的に反映している。

5. 他の approach との比較

最近、Klevansky と Lemmer は、constrained Hartree approximation (CHA)³² を基にした我々とは異なる approach で電場中の chiral 対称性を議論している。^{14 †} 我々がここで用いた effective potential approach と彼らの CHA approach とは、平均場近似の範囲内では、物理の内容としては、本来、同等であるべきはずのものである。ここで挙げた 2 つの approach を比較すると、formula 及び結果において非常に類似しているにもかかわらず、両者

† この様な傾向は、既に 3 章で、 u, d -sector における、“empirical case” ($\bar{m}=5.5\text{MeV}$) と chiral limit ($\bar{m}=0$) との相違という形で現われていた。

* この傾向は、高温での chiral 相転移においても指摘されており、臨界温度 T_c 以上でも、 T_c 程度であれば、 $\langle \bar{s}s \rangle$ は大きな値を取る。²⁴

‡ 彼らは、quark をの電荷を “ e ” として、one-flavor で議論している。しかし、当然の事ながら、quark の電荷は、 u と d とで異なり、かつ、 e とも異なるので、彼らの議論は、定性的な傾向としては正しくても、定量的な評価、例えば、臨界電場が $eE = (270\text{MeV})^2$ 等、については、この様な点でも問題がある。

には2つの基本的な相違がある。1つは source term の導入の仕方であり、もう1つはくりこみ不可能な理論において、field equation を使用するか否かという点である。この章では、two flavor の場合について、CHA による定式化の仕直しを行い、effective potential approach との相違点を検討し、両者の関係を明らかにする。無論、CHA での three flavor の場合への拡張も straightforward に可能である。

5.1 異なる SOURCE TERM の導入方法、及び 結果の比較

まず、source term について議論する。我々が、5章以前に行なった approach では、補助場を用いた path-integral formalism を基にしている。そこで導入した source term は、補助場に対するものであり、 $J_\sigma \sigma$ 及び $\vec{J}_\pi \cdot \vec{\pi}$ であったが、他方、 \bar{q} と q の composite を source term として導入する可能性もある。²⁵ CHA approach において用いられていた source term は、この type であるが、path integral で表すと、

$$\mathcal{Z}[\lambda_S, \vec{\lambda}_P; G_{\text{ex}}^{\mu a}] = \int Dq D\bar{q} \exp[i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{\text{NIL}} + g j_\mu^a G^{\mu a} + \lambda_S \bar{q} q + \vec{\lambda}_P \cdot \bar{q} \gamma_5 \vec{\pi} q \}]. \quad (5.1)$$

この表式より、source があるもとでの quark 凝縮 $\langle \bar{q} q \rangle_\lambda$ は、

$$\langle \bar{q} q \rangle_\lambda = \frac{1}{iZ} \frac{\delta Z}{\delta \lambda_S} \quad (5.2)$$

(補助場を用いた場合の表式 Eq.(2.7) 及び、Eq.(2.8) 参照). proper-time の方法を用いると、Eq.(5.2) は、“gap relation”,¹⁴

$$\langle \bar{q} q \rangle_\lambda = -\frac{N_f}{4\pi^2} \bar{M} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}^2} (gHs) \coth(gHs) \cdot (gEs) \cot(gEs) \quad (5.3)$$

になる。ここで、

$$\bar{M} = \bar{m} - 2g_{\text{NIL}} \langle \bar{q} q \rangle_\lambda - \lambda_S \quad (5.4)$$

は source term が存在する下での quark の dynamical mass であり、これら2つの式から、

$$\begin{aligned} \bar{M}_D &= \bar{m} - \lambda_S \\ &+ \frac{N_f g_{\text{NIL}}}{2\pi^2} \bar{M}_D \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_D^2} (gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs). \end{aligned} \quad (5.5)$$

これは、source term が存在する下での gap 方程式の拡張 に他ならない 事実、source が無い

とき ($\lambda_S = 0$) では, Eq.(5.5) は, 通常の gap 方程式, 即ち, Dyson 方程式 Eq.(2.30) に一致する.

この場合の effective potential \mathcal{V}_{eff} は, 5章以前での V_{eff} と全く同じやり方で導出できる,

$$\mathcal{V}_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} - \frac{1}{4g_{\text{NJL}}}(\lambda_S^2 + \vec{\lambda}_P^2). \quad (5.6)$$

2種類の effective potential V_{eff} と \mathcal{V}_{eff} において, extrema の位置は一致する. これは, effective potential の extrema では, source の導入の仕方に依らず, 常に source が 0 になるからである. (この場合, $J_\sigma = \vec{J}_\pi = 0$, $\lambda_S = \vec{\lambda}_P = 0$) そして, 物理的に意味のある physical vacuum は, この様な extrema の 1つに対応するので, physical vacuum での表式, 例えば, Dyson 方程式 (2.30) や q - \bar{q} 対生成率 (2.46) の表式は, source の導入の仕方に依らずに常に成り立つ. つまり, source term の違いは, effective potential の形状に見かけ状の相違を与えるが, 物理としては何の違いもない.

effective potential V_{eff} および \mathcal{V}_{eff} の real part に対する計算結果は Fig.10 (a) の様になる. ここで, 横軸は, $\langle \bar{q}q \rangle_0 \equiv -2 (250\text{MeV})^3$ を単位とした quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle_\lambda$ である. また, λ_S および J_σ の振舞いは, Fig.10 (b) の様になる.

Fig.10

補助場に対して source を導入したときの effective potential V_{eff} については,

$$|\langle \bar{q}q \rangle_\lambda| \lesssim 1.1 |\langle \bar{q}q \rangle_0|$$

の領域においてしか物理的に意味のある解が存在しない. これは, λ_S がどう変化しても, gap relation (5.3) が,

$|\langle \bar{q}q \rangle_\lambda| > 1.1 |\langle \bar{q}q \rangle_0|$, では, 解を持たないことを反映している. これとは対比的に, \bar{M} は λ_S が変化するに従って任意の値を取り得るので, 任意の \bar{M} に対して, V_{eff} は値を持つ (Fig.7 参照).

ここで, 物理的に意味のある, 両者の極値の位置は完全に一致しており, そこでの物理は, どちらで見ても 全く等価である. このことから, source term の導入の違いが, 見かけ状の相違に過ぎない事がわかる.

5.2 CHA APPROACH との比較

次に, quark に対する field equation の使用の有無について考察する. field equation は Eq.(2.3) 中の Lagrangian \mathcal{L} から得られ,

$$(i\mathcal{D} - \bar{m})q^\alpha + 2g_{\text{NJL}}[(\bar{q}q)q^\alpha + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)(i\gamma_5\vec{\tau}q)^\alpha] = 0, \quad (5.7)$$

あるいは,

$$\bar{q}(i\mathcal{D} - \bar{m})q + 2g_{\text{NJL}}[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2] = 0. \quad (5.8)$$

これを用いて, energy-momentum tensor 中の four-fermi term を, bilinear term に変換する事が可能であり, 実際, Klevansky と Lemmer はそれを行なっている.¹⁴ しかしながら, Eq.(5.8) は くりこみ不可能な理論においては必ずしも自明ではない. 実際, Klevanski 等のように, Eq.(5.8) の真空期待値を取り, proper-time の方法を用いて, 単純に cutoff η を導入すると, $H = E = 0$ の場合には,

$$\begin{aligned} & \frac{N_f N_c}{8\pi^2} \int_\eta^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s\bar{M}^2} + \frac{N_f N_c}{4\pi^2} \bar{m} \bar{M} \int_\eta^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}^2} \\ & + 2g_{\text{NJL}} [\langle (\bar{q}q)^2 \rangle + \langle (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \rangle] = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

という表式が得られるが, ここで, Eq.(5.9) 右辺の各項は全て positive であり, この関係式をそのままの形で適用する事には, 問題がある.* この関係式を well-defined なものにするためには, 本来は, counter term を導入し, 正しい くりこみを行なう必要があるが, Klevansky と Lemmer は Ref.14 において, これと同様の関係式を無批判に用いている. その様な事を行えば, 必然的に, gap 方程式と, 系の energy に対する最小条件とが, 食い違ってきてしまうが, 彼らは, その埋め合せに, gap relation が, 系の energy の最小条件と両立するように, cutoff parameter η に \bar{M} や E の依存性を導入するなど, 難解な手続きを取っている. これに対して, 我々の用いた effective potential approach では, このように問題のある関係式を用いずに議論できる上に, gap 方程式, 或は Dyson 方程式 は effective potential の極値条件から自然に導出される.

* もし Eq.(5.9) 右辺の第 1 項を部分積分し, $\eta=0$ で発散する surface term を無視すると, Eq.(5.9) は, 先に得られた gap relation に平均場近似の範囲内 ($\langle (\bar{q}q)^2 \rangle \simeq \langle \bar{q}q \rangle^2$ 等) で一致し, 何の問題も起こらなくなる. この様に, この問題は発散量の処理の仕方に起因している.

color 電磁場が無い場合についての、2つの approach の比較を Fig.10 に示す Fig.10 (a) および (b) 中の破線は、CHA approach で得られた系の total energy 及び source λ_S をそれぞれ、表している。parameter は physical vacuum で $\langle \bar{q}q \rangle = -(250\text{MeV})^3$, $\bar{M} = 335\text{MeV}$ になるように選んだ。2つの結果は total energy と source parameter について、定性的には良く似かよっている。Color 電磁場が外場として存在する下でも、両者に定性的な違いは見られない。なお、両者の定量的な相違は、NJL model がくりこみ不可能であることに起因しており、くりこみ可能な理論では、counter term の導入等、正しくくりこみを行えば、両者の方法で得られる結果は完全に一致するはずである。ただし、Klevansky 等の CHA では、同一の framework としては、 $q\bar{q}$ 対生成 は議論できていないのに対して、effective potential approach では、chiral 対称性と $q\bar{q}$ 対生成 が、同一の framework として 自然な形で同時に議論できる。

6. flux-tube 描像での hadron の構造や高エネルギー 重イオン衝突に対する応用

hadron の Regge 軌跡や、hadron 反応における双対性 (duality) は、hadron が点状というよりも、むしろ、string 状になっていることを示唆する。1つの解釈としては、QED の場合とは異なり、QCD では、gluon の自己相互作用の為に、color の電束は string 状に絞られるとして説明される。この様な描像をとると、color の電束は、tube 内に閉じ込められて漸近的には現われないので color confinement に対する直観的な説明を与える。(Fig.11 参照)

Fig.11

実際、幾つかの lattice QCD simulation では、hadron 中の valence quark 間に flux tube を形成する。³³ 尚、color-electric flux が、1次元的に絞られて、漸近的には現われないという機構は、color-confinement に対する1つの解釈を与える。

ここでは、color 電磁場と chiral 対称性という観点から、flux-tube picture での hadron の構造を議論する。[†] この描像では、通常、tube の断面積 S は constant であり、tube 内部の color 電場は空間的に一様であると仮定される。従って、color 電場が、時間的にも変化しないとすれば (static 近似)、tube 内部の color 電場は、近似的に、並進不変と見なせ、covariantly constant

[†] 我々は、この描像をとることによって、間接的ではあるが、1次元的に color flux が絞られるという、confinement の効果を理論に取り入れている。

condition を満たす 従って, flux tube 内部の系においても, 以前の我々の議論が適用できる. この近似の下では, Gauss の法則は 2 種類の “charge” について独立に成り立ち, $Q_A = E_A S$ 及び $Q_B = E_B S$, それ故, valence quark によって形成される color 電場は, 例えば $R-\bar{R}$ 間の color 電場では, $E = \text{diag}(\frac{g}{3S}, -\frac{g}{6S}, -\frac{g}{6S})_c$ となり, また, $\mathcal{E} \equiv \sqrt{3}\text{tr}_c(gE)^2 = g^2/S$ である.

6.1 HADRON 構造

color flux-tube 描像 は hadron の反応や構造を研究する上で, 広く用いられている hadron の描像である.¹⁹ この描像では, hadron は 両端の color charge (source) とそれらの間の color flux tube により構成される (Fig.11 (a) 参照). 即ち, valence の quark や antiquark が color source となり, その間に string 状に絞られた color flux tubes が形成される. この様な描像は, valence の quark と antiquark の bound state である meson に対して良く用いられるが, baryon に対しても, valence の quark と *di-quark* の bound state という形で, しばしば適用される (Fig.11 (b) 参照). ここで, di-quark は, 2 つの valence quark の cluster であり, 通常, antiquark と同様, $SU(3)_c$ の 3^* 表現に属する. そして, baryon は valence の quark と di-quark が color singlet に組んだ束縛系と見なせる. この様な, baryon に対して di-quark を適用する試みは, 高エネルギー実験において highly-excited な baryon を研究する際に広く用いられているが, 近年, A.B.Migdal 等によって low-lying な baryon の構造についても適用されている.³⁴ この flux-tube 描像に立てば, meson 及び baryon の flux tube 内部においても, 我々の formula 等が適用できる.*

string の単位長さ当りの energy, 即ち, string tension k に対する関係式

$$k = \frac{1}{2}(E_A^2 + E_B^2)S, \quad (6.1)$$

及び Q_A, Q_B に対する Gauss の法則

$$Q_A = E_A S, \quad Q_B = E_B S \quad (6.2)$$

* ここでの適用としては, 理想的には, Regge 軌跡の上にいるような highly-excited hadron が望ましく, ρ 或はそれ以上の mass を持った hadron が適用対象になる. 尚, pion などの Goldstone boson に対しては, light な上に, chiral 対称性の破れに対する collective mode としての性質を持つので flux tube の適用は難しいかも知れない.

より,

$$k = \frac{1}{2}(Q_A^2 + Q_B^2)/S = \frac{g^2}{6S} = \frac{\mathcal{E}}{6}. \quad (6.3)$$

一方, flux-tube 描像の極限としての hadron の string 描像を用いると, 実験によって得られる hadron の Regge slope α ¹⁹ から, string tension k が半実験的に評価できる,

$$k = \frac{1}{2\pi\alpha} = 0.89 \sim 1.0[\text{GeV}/\text{fm}]. \quad (6.4)$$

従って, hadron の flux tube 内部の color 電磁場は,

$$\mathcal{E} \equiv g^2/S = 5.3 \sim 6.0[\text{GeV}/\text{fm}] > \mathcal{E}_{\text{cr}}. \quad (6.5)$$

ここで, \mathcal{E}_{cr} は, chiral 対称性が回復する臨界 color 電場の大きさであり, $\mathcal{E}_{\text{cr}} \simeq 4\text{GeV}/\text{fm}$ (3章参照).

それ故, chiral 対称性は hadron 内部では回復していると考えられる. このことは hadron に対するもう 1 つの描像 chiral bag 描像⁴

- (i) bag の内側では, chiral 対称性は回復している
- (ii) bag の外側では, chiral 対称性は自発的に破れており, NG boson として pion が現われる.

を以下のような形で再現する.[†]

- (I) chiral 対称性は tube(bag) の内部では, 強い color 電場の為に回復しており, WW 相にある.
- (II) 一方, tube(bag) の外側では, color 電場は存在しないので, QCD 真空の低エネルギーでの性質として chiral 対称性は自発的に破れており, NG 相にある.(尚, NG boson としての pion mode の出現は, 通常の NJL model で示されている.)

この様に, color 電場と chiral 対称性との関係を基軸にして, color flux tube 描像と chiral bag 描像という hadron に対する 2 つの異なった描像の関連性が示唆される.

[†] 通常, chiral bag では, chiral 対称性だけではなく, 漸近的自由性や confinement も仮定されているが, ここでは, chiral 対称性に関する性質に着目する.

次に, string tension という立場から, color 電場による chiral 対称性の回復を再考し直してみる. まず, 2章で言及した, 強い color 電場による chiral 対称性の回復に対する直観的な説明をもう一度繰り返す. quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ を構成する quark 及び antiquark は, 互いに反対の color charge を有しており, 従って, color 電場の効果によって, 凝縮中の q - \bar{q} 対は 逆向きに引き離される. その結果, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ は壊れ, chiral 対称性は回復する. このとき, 引き離される quark と antiquark の間には, 求心方向の string tension が働き, q - \bar{q} 対の分離に対して抵抗することが予想される. そして, この q - \bar{q} 間の string tension を上回る強い color 電場をかけたとき, q - \bar{q} 対が引き離され, $\langle \bar{q}q \rangle$ は壊れ, chiral 対称性は回復する. ここで, \mathcal{E}_{cr} によってもたらされる critical string tension k_{cr} は, Eq.(6.3) より,

$$k_{\text{cr}} = \mathcal{E}_{\text{cr}}/6 \simeq 0.7\text{GeV/fm} \quad (6.6)$$

であり, これだけの string tension が quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ 中の q - \bar{q} に, 掛かると $\langle \bar{q}q \rangle$ は壊れて, chiral 対称性は回復する.

ここで, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ 中の q - \bar{q} 間の string tension が, 実際の hadron の Regge 軌跡から得られる q - \bar{q} 間の string tension に一致するとは限らないが, それでも order としては, 同程度だと考えられるので, 臨界 color 電磁場の大きさは, hadron の string tension と同程度であることが予想される. 事実, k_{cr} の値は, hadron の string tension k にかなり近い.^b

6.2 高エネルギー重イオン衝突

flux-tube 描像は, また, 高エネルギー重イオン衝突における QGP の形成の研究においても良く用いられている^{19,35} 衝突後から QGP の形成にいたる process としては, 時間的に, 以下の2つの段階が考えられる (Fig.12 参照).

Fig.12

^b この事は, color 電場の言葉では, 臨界 color 電場の大きさ $\mathcal{E}_{\text{cr}} \simeq 4\text{GeV/fm}$ が, hadron 内部の \mathcal{E} の値, $\mathcal{E} = 5.3 \sim 6.0[\text{GeV/fm}]$ に, かなり近いという事と同値である.

(1) pre-equilibrium stage (Fig.12 (a), (b) 参照)

衝突の直後には、重イオン間に、多数の color flux tubes が形成され、そこでは、非常に強い color 電場が存在し得る (Fig.12 (a) 参照). 次いで、Schwinger 機構を通じて、 $q-\bar{q}$ 対生成が tube の内部で多数起こる. (Fig.12(b) 参照). この process を通じて、color 電磁場は弱まってゆき、反対に、系の thermal energy が増加していく。つまり、color 電磁場の energy は熱へと転化され、重イオン間に energy deposition が起こる。

(2) QGP formation (Fig.12 (c) 参照)

衝突の際、energy が十分に高い場合は、重イオン間に、高温で準平衡状態の QGP が、形成されると考えられている。この段階では、color 電磁場はもう外場としては無く、fluctuation としてしか存在しない。

これまでには、主として、(2)の平衡状態 QGP に関して、数多くの研究が為されてきたが、近年、pre-equilibrium stages (1) についても興味をもって研究がされはじめている。⁸ 我々の研究と関係が深いのは、(1)の段階であり、そこでは、強い color 電磁場の存在が期待され、状況としては、flux-tube 描像での hadron 内部と良く似かよっている。重イオン間の flux tube は hadron 中のそれが、random に、多数重なりあってできていると考えられており、⁹ それらの幾つかは color 電場が逆向きであるなどして、互いに cancel し得るが、平均的には、重なりあった tube の数 N の fluctuation の分だけ、即ち、hadron 中のものよりも、 $O(\sqrt{N})$ 倍も強い color 電場が期待できる。従って、そこでの chiral 対称性もやはり回復していると考えられる。chiral 対称性に関する、この推測は QGP 形成において重要な役割を果たす $q-\bar{q}$ の対生成率とも深く関連している。color 電磁場の energy は $q-\bar{q}$ の対生成を通じて熱に転化されるが、その対生成率は、quark の mass に強く依存する (Fig.8 参照)。重イオン衝突直後の状況において、もし、系の chiral 対称性が NG 相にとどまるなら、生成される quark は大質量の constituent quark なので、対生成率はかなり小さな値になる。これに反して、強い color 電磁場による chiral 相転移が起こるのであれば、そこで生成される quark は、massless に近い current quark であろうから、対生成率はかなり大きくなると予想される。我々の研究が示唆するところでは、系の chiral 対称性は、(1)の pre-equilibrium stage で既に NG 相から WW 相へと相転移すると考えられる。よって、そこでの $q-\bar{q}$ の対生成の計算等には、constituent mass よりも current quark mass を用いる方が適切だと思われる。実験的には、このような相転移の痕跡は、pre-equilibrium stage

◇ one-gluon-exchange によって作られる colored baryon 間の flux tube 中では、hadron 中のものよりも、平均的に $3\sqrt{3}/4$ 倍強い color 電場が期待される。³⁶

における \bar{q} の対消滅を通じて, dilepton production あるいは direct gamma emission の cross section の増加という形で現われ得るかも知れない³⁶

高エネルギー重イオン衝突に関する以上の議論は, 幾分, 単純化し過ぎているかも知れない. というのは, 衝突後に, tube が伸びる等の dynamical な効果や, tube の finite size の効果³⁷ を, ここでは無視してきたからである. 特に, 系の expansion に伴う dynamical な効果はこの場合重要と思われるが, この効果は, $q\text{-}\bar{q}$ の対生成を促進する方に効くであろう. その理由は, flux tube の energy は, およそ, tube の長さに比例するので, flux tube を引き延ばすと, energy 的に不安定になり, $q\text{-}\bar{q}$ の対生成をより起こし易くなるからである. これらに関しては, より詳細で定量的な研究が望まれる.

7 Summary and Concluding Remarks

我々は, color 電磁場が存在する下での chiral 対称性の発現様式と $q\text{-}\bar{q}$ 対生成現象を NJL model を用いて研究し, これら 2 つの現象が effective potential formalism の枠組みで, 同時かつ整合的に議論できることを示した. 我々は, 並進不変な系に着目し, covariantly constant な color 電磁場においては, 通常の電磁場の場合と同様に定式化できることを示し, その場合での, effective potential, dynamical quark mass に対する Dyson 方程式, 及び, $q\text{-}\bar{q}$ 対生成率の具体的な表式を導出した. これらの表式は, いずれも, color 電磁場の full order の寄与を含んでおり, その意味で, color 電磁場に対する非摂動的な効果を含んでいる. これらの表式から, 定性的には, color 電場によって chiral 対称性が回復し, color 磁場によっては chiral 対称性が更に破れることを示した. また, 定量的には, color 磁場の効果は, color 電場ほど顕著ではなく, color 磁場の大きさが color 電場と同程度以下であれば, chiral 対称性の回復には殆ど影響しない事を示した.

ついで我々は, 具体的に考えられる物理的状況として, quark あるいは antiquark の周囲に作られる color 電磁場を考察し, 十分に強い color 電場の下では, chiral 対称性が回復することを示した. そのときの臨界 color 電場の大きさは, $\mathcal{E}_{cr} \simeq 4\text{GeV}/\text{fm}$ であり, 臨界 color 電場付近において dynamical quark mass の急激な減少が見られることを model 計算により示した. 我々は, また, $q\text{-}\bar{q}$ 対生成率の計算も行ない, 臨界 color 電場付近では, dynamical quark mass の急な減少に伴って, $q\text{-}\bar{q}$ 対生成率の enhancement が見られることを指摘した.

尚, 我々が, ここで示した, 強い color 電場による chiral 対称性の回復という現象は, 高い温度での chiral 相転移の現象と幾分似通っている. color 電場と温度が chiral 対称性に及ぼす効果の類似性は, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ の消失という観点から, 直観的に理解できる. 即ち, color 電場が存在すると, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ 中の $q\bar{q}$ 対は, 反対の向きに引き離され, その結果 quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ は壊され消失する. 一方, 有限温度の状況下においても, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ は, thermal fluctuation によって壊され消失する. これと同様な現象は物性系の超伝導現象においても見られる. 超伝導体は, 強い磁場をかけたり, 温度を上げると, その超伝導という性質を失ってしまう. 超伝導の order parameter である Cooper pair は, 上向き spin の電子と下向き spin の電子の間に phonon を媒介とする引力が働いた結果できたものであり, その凝縮が超伝導を引き起こす. ここで, Cooper pair 中の 2 つの電子は, 互いに異なる spin を有しているため, 磁場をかけると, spin-magnetic interaction によって, 反対向きに引き離される. あるいは, 有限温度では 電子等の熱的振動によって Cooper pair は壊されてしまう. これが, 強い磁場や, 温度によって, 超伝導体が常伝導体に相転移する直観的な説明である. 超伝導の問題と chiral 対称性の問題とは, Higgs 機構が働くか否かという点で, formalism の上でかなり大きな差異があるにもかかわらず, QCD 真空での quark 凝縮と超伝導体での Cooper pair との間に, 良く似た物理的な対応関係がみられる. ただし, 興味深い点としては, (color) 電場, (color) 磁場に対する応答が, 両者において, 決定的に異なっている. 超伝導体での問題では, 磁場が Cooper pair を壊して, 対称性の回復に効くものに対して, QCD 真空では, color 電場が quark 凝縮を壊して対称性の回復に寄与する.

strangeness の自由度を含めた three flavor の場合への拡張も行なった. s -quark については, dynamical quark mass 及び 対生成率 の両方ともに, u, d -quark に比べて, color 電磁場に対する変化はかなり緩やかになることを示した.

我々は, また, effective potential approach と Klevansky 等が行った CHA approach との比較を行い, 両者の相違は, source term の導入の仕方と field equation の使用の有無に起因すること, 及び, これら 2 つの approach が, 定性的に似かよった結果を与えることを示した.

以上の formula を color flux-tube 描像での hadron の構造に適用し, hadron の flux tube 内部では, 強い color 電場の為に, chiral 対称性は回復していることを示した. 即ち, color 電場が存在しない flux tube の外側では, chiral 対称性は破れたままであるが, flux tube 内部では, 強い color 電場により, chiral 対称性は回復している. この事は, hadron の内側が WW 相

で、外側が NG 相であるという点で、hadron に対する chiral bag 描像を示唆している。

次いで、高エネルギー重イオン衝突の初期段階に我々の議論を適用し、衝突直後の重イオン間では、多数重なりあった flux tube 中の強い color 電場の為に、chiral 対称性が回復することを指摘した。それに付随して、QGP 生成の議論で重要となる $q\bar{q}$ の対生成の表式には constituent quark よりも current quark を用いる方が適切であるという示唆を行った。なお、ここでの議論を更に進めて、thermalization の process を議論する際には、有限温度、有限密度での $q\bar{q}$ 対生成に対する Schwinger formula の定式化が必要である。³⁸ この定式化は、QGP 生成の議論のみならず、高温の宇宙初期での QCD 相転移に関する研究や、有限温度の物性系での e^+e^- に対する Schwinger 機構の研究等に有用であり、幅広い汎用性が期待される。しかしながら、(color-) 電場は、 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ の時間成分を含むので、例えば、(color-) 電場の外場の存在と imaginary time による有限温度での定式化とは、直接的に両立しない等の困難が伴い、未だに成功していない。³⁸

ここでの議論は QCD の赤外有効理論を基にしており、従って、適用可能な color 電磁場の強さに関しては、本来、限界があるはずである。とりわけ、NJL model に特有な four-fermion interaction の coupling constant (g_{NJL}) の大きさは、本来、外場である color 電磁場の強さに依存するべき量である。なぜなら、 g_{NJL} は、quark 間に propagate する dynamical gluon 等の効果を effective に取り込んだ物理量であり、かつ、そういった dynamical gluon の propagation は、系の color 電磁場や温度 密度の大きさに応じて変化するはずだからである。しかしながら、ここで得た結果は、少なくとも、定性的には変わらないであろう。その理由は、QCD の持つ漸近的自由性^{27,39} の為に、強い color 電場や高温の状況下では、QCD の gauge coupling constant g は小さくなるので、それに伴って、four-fermion coupling g_{NJL} も小さくなると考えられるからである。chiral 対称性の自発的破れを引き起こす four-fermion coupling g_{NJL} が、color 電場や温度の効果によって小さくなるなら、その効果は、chiral 相転移をはやめ、臨界 color 電場や臨界温度を下げる方に働く。よって、 g_{NJL} を constant と仮定した NJL model によるここでの計算結果よりも、実際には、より速やかに dynamical quark mass が減少し、chiral 相転移が起こる。その意味で、我々が与えた \mathcal{E}_{cr} の値は、chiral 対称性が回復する 臨界 color 電場の大きさの *upper limit* と見なすことができ、hadron 構造等に対するここでの議論はそのまま成り立つ。

我々の研究は、QCD の有効模型に基づいているが、より精確で、より深い洞察を得るためには、lattice QCD simulation 等の他の方法による研究も必要不可欠である。ごく最近、Ref.16

においては, Austria の group が lattice QCD simulation を用いて, valence quark など color source の近傍での quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ の減少を報告している. 現時点では, lattice QCD で, 定量的な議論をするには, quark mass が大きすぎる等の問題点はあるものの, 今後, quark mass を小さくし, また, lattice size を大きくするなどして, より精度の高い realistic な計算が可能であれば, この様な方面からの研究は意義深いものと思われる. また, これらの lattice QCD simulation において, color source の周りでの Wilson loop や gluon 凝縮を調べることは, chiral 対称性と color confinement との関連性を探る上でも興味深い. この様な研究は, 我々の研究課題である, color 電磁場中での chiral 対称性と q - \bar{q} 対生成の一層深い理解の為に, その発展が強く望まれる.

ACKNOWLEDGEMENTS

この論文の内容のほとんどは, 巽 敏隆氏との共同研究に基づくものです. 氏には, この研究を通じて, 数々の有益な議論や指導をして頂きました. 心から感謝致します

我々の研究に対して 暖かい理解と興味を示して下さい下さった玉垣 良三氏に深く感謝します

seminar 等で, 有用な議論をして下さった京都大学の核理論研究室の方々, および, 龍谷大学の国広 梯二氏に感謝します

ここでの研究を見守り, 助けて下さった全ての人に感謝致します

APPENDIX A. Effective Potential の諸性質

ここでは、2章で得られた effective potential について、若干の補足を与える。 V_{eff} は、 $H = E = 0$ においても存在する真空からの寄与 $V_{\text{vac}}(\bar{M}, \bar{\pi})$ と、外場としての color 電磁場の寄与 $V_{\text{EM}}(\bar{M}, \bar{\pi}; H, E)$ とを含んでいる。これらを分離して表すと、

$$V_{\text{eff}}(\bar{M}, \bar{\pi}; H, E) = V_{\text{vac}}(\bar{M}, \bar{\pi}) + V_{\text{EM}}(\bar{M}, \bar{\pi}; H, E). \quad (\text{A1})$$

但し、

$$V_{\text{vac}}(\bar{M}, \bar{\pi}) = \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2 + \bar{\pi}^2}{4g_{\text{NLL}}} + \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2)} \quad (\text{A2})$$

は、純粋に real であり、自発的対称性の破れを表す double-well の構造を有している。即ち、原点 $(\bar{M}, \bar{\pi}) = (0, \vec{0})$ 付近では curvature が負であり、“山”のようになっている。また、

$$\begin{aligned} V_{\text{EM}} = & \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2)} [(gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs) - 1] \\ & - i \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2)/(gE)\} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

は、一般に、実部の他に、Schwinger 機構による $q-\bar{q}$ 対生成を記述する虚部とを合わせ持つ。ここで、cutoff Λ はかなり大きい値を取るので、Eq.(A3) 中の積分の下端は近似的に 0 と置くことができる。そのようにすると、 $\text{Re}V_{\text{EM}}$ は、irrelevant な定数を除いて、

$$\begin{aligned} \text{Re}V_{\text{EM}} = & -\frac{N_f}{24\pi^2} \text{tr}_c g^2 (H^2 - E^2) \ln(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2) + \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s(\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2)} \\ & \times [(gEs) \cot(gEs) (gHs) \coth(gHs) - 1 - \frac{1}{3}g^2(H^2 - E^2)s^2] \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

と表せる。尚、以下の議論では、表式の便宜上、 $\bar{\pi} = 0$ とするが、 $\bar{\pi} \neq 0$ の場合には、以下の表式中の、 \bar{M}^2 を $\bar{M}^2 + \bar{\pi}^2$ に置き換えれば全て成り立つ。

A1 WEAK FIELD LIMIT での表式

ここで、1つの極限として、weak field limit, 即ち、 $H, E \ll \bar{M}^2$ の場合を考察する。これが成り立つ場合は以下の様な場合である。

- (1) color 電磁場が、dynamical quark mass \bar{M}_D に比べてかなり小さい場合。
- (2) 或は、effective potential において \bar{M} が color 電磁場よりも大きい漸近的領域を議論する場合。

さて、 $H, E \ll \bar{M}^2$ の場合には、 $\text{Re}V_{\text{EM}}$ に対する H, E でのべき展開が有効であり、* この場合には、Eq.(A4) の右辺第1項が最低次の寄与を与える、

$$\text{Re}V_{\text{EM}} \simeq -\frac{N_f}{24\pi^2} \text{tr}_c g^2 (H^2 - E^2) \ln \bar{M}^2 = -\frac{N_f}{24\pi^2} \text{tr}_c g^2 \mathcal{F} \ln \bar{M}^2 \quad (\text{A5})$$

この weak field limit での表式は、 $\mathcal{F} = (H^2 - E^2)/2$ の1次であるが、そうなる事は、以下の様にして、ごく自然に理解される。ここで扱っている color 電磁場は、covariantly constant であり、abel 的なので、殆ど QED と平行な議論が成り立ち、Lorentz scalar である effective potential は、color 電磁場 (\vec{H}, \vec{E}) から作られる2つの Lorentz scalar $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}/4 = (\vec{H}^2 - \vec{E}^2)/2$ 及び $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}/4 = \vec{H} \cdot \vec{E}$ を用いて表される。このうち、 \mathcal{G} については、parity が odd なので、parity even の effective potential を作るには、偶数個必要である。それ故、color 電磁場についての最低次の表式には、 \mathcal{F} の1次が期待される。

尚、 H, E の高次の項は、Eq.(A4) 中の被積分関数の s に関する展開式

$$\begin{aligned} & (gEs) \cot(gEs) \quad (gHs) \coth(gHs) \\ & = 1 + \frac{1}{3} g^2 (H^2 - E^2) s^2 - \frac{1}{45} g^4 \{ (H^2 - E^2)^2 + 7(HE)^2 \} s^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

を用いて得られ、

$$\begin{aligned} \text{Re}V_{\text{EM}} &= \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \left[-\frac{1}{3} g^2 (H^2 - E^2) \ln \bar{M}^2 - \frac{1}{45} g^4 \left\{ \frac{(H^2 - E^2)^2 + 7(HE)^2}{\bar{M}^4} \right\} + \dots \right] \\ &= \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \left[-\frac{1}{3} g^2 \mathcal{F} \ln \bar{M}^2 - \frac{1}{45} g^4 \left\{ \frac{\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2}{\bar{M}^4} \right\} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

* $\text{Im}V_{\text{EM}}$ のについては、 $E = 0$ での非解析性により、 E でのべき展開で表すことはできない。

A2 STRONG FIELD LIMIT での表式

次に、(A) とは反対の極限として、strong field limit, 即ち、 $H, E \gg \bar{M}^2$ の場合を考察する。これが成り立つ場合は以下の様な場合である。

- (1) color 電磁場が, dynamical quark mass \bar{M}_D に比べてかなり大きい場合.
- (2) 或は, effective potential において \bar{M} が color 電磁場よりも小さい領域 (例えば, $\bar{M} = 0$ での様相) を議論する場合.

さて, $H, E \gg \bar{M}^2$ の場合には, V_{EM} に対する \bar{M} でのべき展開が有効である. $\text{Re}V_{\text{EM}}$ に対しては,[†] irrelevant な constant を除いて,

$$\begin{aligned} \text{Re}V_{\text{EM}} &\simeq -\bar{M}^2 \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{c.p.v.} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} [(gEs) \cot(gEs) - (gHs) \coth(gHs) - 1] \\ &= \bar{M}^2 \frac{N_f}{8\pi^2} \sum_{i=1}^3 (H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2} F^{\text{fermion}}(0, \theta^{(i)}). \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

それ故, $\text{Re}V_{\text{EM}}$ が, $\bar{M} \simeq 0$ で, 上に凸か, 下に凸かは, あよそ, 特性関数 $F^{\text{fermion}}(0, \theta)$ の符号から決まる.

- (I) $F^{\text{fermion}}(0, \theta) > 0$ であれば, $\text{Re}V_{\text{EM}}$ は, 原点付近 ($\bar{M} \simeq 0$) では下に凸であり, V_{vac} の原点付近での“山”をなだらかにする様に働く
- (II) $F^{\text{fermion}}(0, \theta) < 0$ であれば, $\text{Re}V_{\text{EM}}$ は, 原点付近 ($\bar{M} \simeq 0$) では上に凸であり, V_{vac} の原点付近での“山”を一層 steep にする.

尚, 特性関数 $F^{\text{fermion}}(0, \theta)$ の符号と, H, E との関係については, 簡単な対応があるので (Appendix B 参照), ここでの議論を, H, E を用いてまとめ直すと以下のようなになる.

- (I) $H < 3.6E$ であれば, $\text{Re}V_{\text{EM}}$ は, 原点付近 ($\bar{M} \simeq 0$) では下に凸であり, V_{vac} の原点付近での“山”をなだらかする方に働く 従って, color 電磁場 ($\text{Re}V_{\text{EM}}$) の効果は, V_{vac} が持つ double-well の構造を壊して対称性を回復する方に寄与する.

[†] $\text{Im}V_{\text{EM}}$ に対しては, \bar{M} を含む指数関数部分をべき展開すれば容易に得られる (Eq.(A3) 参照).

(II) $H > 3.6E$ であれば, $\text{Re}V_{\text{EM}}$ は, 原点付近 ($\bar{M} \simeq 0$) では上に凸であり, V_{vac} の原点付近での“山”を一層 steep にする. つまり, color 電磁場 ($\text{Re}V_{\text{EM}}$) の効果によって, 対称性の回復は一層困難になる.

APPENDIX B. 特性関数の諸性質

ここでは, chiral 対称性に対する color 電磁場の効果の特徴づける, 特性関数 $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ に関する幾つか細かい性質を議論する. 特性関数 $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ の定義は,

$$F^{\text{fermion}}(x, \theta) = -\text{p.v.} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-sx^2} [(s \cos \theta) \coth(s \cos \theta) \cdot (s \sin \theta) \cot(s \sin \theta) - 1]. \quad (\text{B1})$$

ここで x は dynamical quark mass M と color 電磁場の強さとの比を表す dimensionless な parameter であり,

$$x^{(i)} = M/(H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/4} (i = 1, 2, 3).$$

また, θ は H と E の mixing rate を表す parameter であり,

$$\tan \theta^{(i)} = H^{(i)}/E^{(i)}$$

あるいは,

$$\cos \theta^{(i)} = H^{(i)}/(H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2}, \sin \theta^{(i)} = E^{(i)}/(H^{(i)2} + E^{(i)2})^{1/2}$$

で定義される. 尚, 典型的な場合としては,

- (i) color 磁場だけの場合 ($H \neq 0, E = 0$ or $\mathcal{F} > 0, \mathcal{G} = 0$) は, $\theta = 0$.
- (ii) color 電場だけの場合 ($H = 0, E \neq 0$ or $\mathcal{F} < 0, \mathcal{G} = 0$) は, $\theta = \pi/2$.
- (iii) color 電場と color 磁場の大きさが等しい場合 ($H = E$, or $\mathcal{F} = 0, \mathcal{G} \neq 0$) は, $\theta = \pi/4$.

ここで, color 電磁場 $H^{(i)}, E^{(i)}$ はそれぞれ 3 成分であり, 厳密には, それらの combination で議論しなければいけないのであるが, 概括的な傾向を調べるために, 以下では, 3 成分のうちの 1 つの成分 ((i) -component) に着目して, 議論を進めることにする.

また, chiral 対称性との関連では, Dyson 方程式 (2.30) より,

- (I) $F^{\text{fermion}}(x, \theta) > 0$ ならば, color 電磁場の効果によって, dynamical quark mass は減少し, chiral 対称性は回復する傾向を示す.

(II) $F^{\text{fermion}}(x, \theta) < 0$ ならば, color 電磁場の効果によって, dynamical quark mass は増加し, chiral 対称性の破れは更に助長する.

B1 WEAK FIELD LIMIT 及び STRONG FIELD LIMIT での表式

(A) Weak field limit

color 電磁場が弱く, dynamical quark mass の energy scale よりも十分に小さい場合には, color 電磁場の weak-field limit, 即ち, $x \gg 1$ の場合の表式が良い近似として適用できる.

$x \gg 1$ での特性関数は

$$F^{\text{fermion}}(x, \theta) \simeq -\frac{1}{3x^2} \cos(2\theta) = -(H^2 + E^2)^{-1/2} \frac{1}{3M^2} (H^2 - E^2) \quad (\text{B2})$$

と近似できる. ここで, 右辺の因子 $(H^2 + E^2)^{-1/2}$ は, Dyson 方程式 (2.30) を見ればわかる通り, もともと, $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ を dimensionless にする為に, artificial に加えた scale factor なので, essential には, $F^{\text{fermion}}(x, \theta) \propto (H^2 - E^2) \propto \mathcal{F}$ である. 実際, effective potential に対する color 電磁場の寄与 V_{EM} は, この場合,

$$V_{\text{EM}} \simeq -\frac{N_f}{24\pi^2} \text{tr}_c g^2 (H^2 - E^2) \ln M^2 \quad (\text{B3})$$

であり, 理論には \mathcal{F} の 1 次しか現われない. 従って, color 電場と color 磁場とは, 線型に近い形で, 反対の効果を与える. (このことは, Fig.4 中の x が大きい領域での単調な振舞いに反映されている.)

但し, weak field limit での表式が適用可能なのは, 当然の事ながら, $H, E \ll M^2$ の様に color 電磁場がごく弱い場合に限られるので, その効果も非常に弱くしか現われない. 従って, 定量的には, 対称性の回復というよりも, むしろ, dynamical quark mass の僅かな変化と言う方が適切である. (事実, chiral 対称性が回復する様な場合では, $\bar{M} \simeq 0$ となるので, ここでの条件下で議論することは無理である.)

具体的には, 以下のような傾向が見られる.

(i) $H > E$ のとき ($0 \leq \theta < \pi/4$) は, $F^{\text{fermion}}(x, \theta) < 0$ であり, dynamical quark mass は増加する傾向を示す

- (ii) $H < E$ のとき ($\pi/4 < \theta \leq \pi/2$) は, $F^{\text{fermion}}(x, \theta) > 0$ であり, dynamical quark mass は減少する傾向を示す
- (iii) $H = E$ のとき ($\theta = \pi/4$) は, color 電場と color 磁場の効果が釣り合っ, 対称性の破れに対しては, 見かけ上, 寄与は現われない.

(B) Strong field limit

(A) でも述べた様に, chiral 対称性の回復を議論する際には, dynamical quark mass は減少し, $M \simeq 0$ 即ち $x \simeq 0$ の状況が問題となるので, weak field limit の表式は当然の事ながら使用できない. この様な場合には, むしろ, (A) とは逆の極限である color 電磁場の strong field limit, 即ち, $x \ll 1$ の場合の表式が重要になる. なお, chiral 対称性の回復が起こらない場合でも, color 電磁場が十分に大きければ $x \equiv M/(H^2 + E^2)^{1/2} \ll 1$ を満たす

$x \ll 1$ での特性関数は,

$$F^{\text{fermion}}(x, \theta) \simeq F^{\text{fermion}}(0, \theta) = -2\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\pi \tan \theta} - 1} - \frac{1}{4} \right] \sin \theta. \quad (\text{B4})$$

この関数は θ 或は 比 E/H に関して単調増加な関数であり,

- (i) color 磁場のみ ($\theta = 0$) では $F^{\text{fermion}}(x, 0) = -\infty$
- (ii) color 電場のみ ($\theta = \pi/2$) では, $F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) = \pi/2$
- (iii) $H \simeq 3.6E$ ($\theta \simeq 0.27$) で $F^{\text{fermion}}(x, \theta) = 0$

となる (Fig.4 参照).

ここで, 注目すべき事は, 特性関数 $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ の符号が正である領域, 即ち, $F^{\text{fermion}}(x, \theta) > 0$ となる θ の範囲が (A) の場合 (weak field limit) と比べて大きく広がっている点である. 実際,

- (I) $H > 3.6E$ では $F^{\text{fermion}}(x, \theta) < 0$ であり, chiral 対称性の破れが一層破れてしまうが,
- (II) $H < 3.6E$ では $F^{\text{fermion}}(x, \theta) > 0$ であり, chiral 対称性は回復する方に進む.

この様に, color 磁場が color 電場よりも, かなり大きくならない限り, color 電磁場の効果は, 対称性を回復する方に効くことがわかる.

B2 COLOR 電場, 或は COLOR 磁場だけの場合

color 磁場だけの場合 ($\theta = 0$) と color 電場だけの場合 ($\theta = \pi/2$) についての特性関数 $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ は, 以下に示すように, Γ -function や ζ -function を用いて表すことができる.

(A) color 磁場だけの場合

color 磁場だけの場合 ($\theta = 0$) には, 特性関数は

$$F^{\text{fermion}}(x, 0) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-sx^2} (s \coth s - 1). \quad (\text{B5})$$

ここで, $s \coth s - 1 > 0$ であることから, 任意の $x \geq 0$ に対して,

$$F^{\text{fermion}}(x, 0) < 0. \quad (\text{B6})$$

従って, color 磁場だけの場合は, chiral 対称性は更に破れる方に進む.

Eq.(B5) に対して, Binet の公式⁴⁰ を用いると,

$$\begin{aligned} F^{\text{fermion}}(x, 0) &= -2 \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-sx^2} \left(\frac{1}{e^{2s} - 1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \right) \\ &= -2 \left[\ln \Gamma\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

尚, この表式から, strong field limit 及び, weak field limit での漸近形,

$$F^{\text{fermion}}(x, 0) \sim \begin{cases} \ln x^2 & \text{for } x \rightarrow 0 \\ -1/(3x^2) & \text{for } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{B8})$$

が容易に得られる.

(B) color 電場だけの場合

color 電場だけの場合 ($\theta = \pi/2$) には, 特性関数は,

$$F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) = - \text{p.v.} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s(x^2 - i\epsilon)} (s \cot s - 1) \quad (\text{B9})$$

であり, 任意の $x \geq 0$ に対して,

$$F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) > 0. \quad (\text{B10})$$

従って, color 電場だけの場合には, chiral 対称性は回復する方に進む.

complex s -plane において, Eq.(B9) 中の積分を実軸上の積分から虚軸上の積分に変えた後, s から $t = -is$ への積分変数の変換を行うと,

$$F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) = i \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-itx^2} (t \coth t - 1) + i \ln(1 - e^{-\pi x^2}). \quad (\text{B11})$$

次いで, Eq.(B7) を用いると,

$$\begin{aligned} F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) &= 2i \left[\ln \Gamma\left(\frac{ix^2}{2}\right) - \left(\frac{ix^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{ix^2}{2}\right) + \frac{ix^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right] \\ &\quad + i \ln(1 - e^{-\pi x^2}) \\ &= \text{Re} \left\{ 2i \left[\ln \Gamma\left(\frac{ix^2}{2}\right) - \left(\frac{ix^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{ix^2}{2}\right) + \frac{ix^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

ここで, 第2式から第3式への移行, 即ち, 第2式において imaginary part が cancel し残らないことは, Γ -function に対する公式

$$|\Gamma(iy)| = \left\{ \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)} \right\}^{1/2} \quad \text{for real } y \quad (\text{B13})$$

を用いれば容易に示せる. また, Γ -function の偏角に対する公式⁴⁰,

$$\arg \Gamma(iy) = -\frac{\pi}{2} - \gamma y + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{y}{k} - \arctan\left(\frac{y}{k}\right) \right\} \quad (\text{B14})$$

(γ は Euler 定数) を用いると, Eq.(B12) は, 次のように, x に関する級数の形で表示できる,

$$\begin{aligned} F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) &= \frac{\pi}{2} + x^2(\gamma - \ln 2) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{x^2}{2k} - \arctan\left(\frac{x^2}{2k}\right) \right\} + x^2(\ln x^2 - 1) \\ &= \frac{\pi}{2} + x^2(\gamma - \ln 2) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-)^l}{2l+1} \zeta(2l+1) 2^{-(2l+1)} x^{2(2l+1)} \\ &\quad + x^2(\ln x^2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

この表式は, 物理としては, $M/(H^2 + E^2)^{-1/2}$ による級数展開であり, strong field expansion に相当する. 尚, この種の展開は, 有限温度では, 高温展開 (M/T による級数展開)⁴¹ という形

でしばしば用いられるまた、これらの表式から、strong field limit 及び、weak field limit での漸近形、

$$F^{\text{fermion}}(x, \pi/2) \sim \begin{cases} \pi/2 + x^2 \ln x^2 & \text{for } x \rightarrow 0 \\ 1/(3x^2) & \text{for } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{B16})$$

が容易に得られる。

APPENDIX C. ζ -function regularization method

C1 FORMALISM

2章では、quark determinant を正則化する為に、Fock-Schwinger の proper-time の方法を用い、proper time に対して cutoff Λ を導入した。ここでは、別の正則化の方法として、 ζ -function regularization による定式化を試み、proper-time の方法との類似点、及び相違点を議論する。QED において、電磁場の外場が存在する下では、系の momentum や space-time coordinate が良い量子数では無くなってしまふので、momentum 空間での cut-off による正則化は難しい。このような場合には、proper-time の方法や ζ -function regularization が有効であり、電磁場の外場中での quantum correction を議論する際には、比較的良く用いられている^{10,17} ζ -function regularization においては、hermite operator \hat{O} の functional determinant は、

$$\ln \text{Det}(\hat{O} - i\epsilon) = \text{Tr} \ln(\hat{O} - i\epsilon) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{d\nu} \text{Tr}(\hat{O}^{-\nu} - i\epsilon) \right] = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{d\nu} \zeta_{\hat{O}}(\nu) \right]. \quad (\text{C1})$$

ここで、

$$\zeta_{\hat{O}}(\nu) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty d\tau \tau^{\nu-1} \text{Tr} \exp \{ -(\hat{O} - i\epsilon)\tau \}. \quad (\text{C2})$$

それ故、Eq.(2.10) 中の $\mathcal{L}_{\text{loop}}$ は

$$\mathcal{L}_{\text{loop}} = -\frac{i}{2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ -\frac{d}{d\nu} \left[\frac{i^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty d\tau \tau^{\nu-1} \text{tr} \langle x | \exp(-\mathcal{G}^{-1}\tau) | x \rangle \right] \right\} \quad (\text{C3})$$

と表せる。ここで、 \mathcal{G} は physical vacuum $\vec{\pi} = 0$ 中での quark propagator であり、

$$\mathcal{G}^{-1} = i[-(\Pi^\mu)^2 + \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\text{ex}}^{\mu\nu} + \bar{M}^2 - i\epsilon]/\mu^2 \quad (\text{C4})$$

但し、 $\Pi^\mu = i\partial^\mu + gG_{\text{ex}}^\mu$ である。我々は、quark determinant の argument を dimension-

lessにする為に, mass の dimension を持つ arbitrary parameter μ を導入した. これは, くりこみ可能な理論では, renormalization point と identify でき, 従って, μ の値を変えても, 理論の coupling constant や mass parameter が単に reparametrize するだけであり, 物理は変わらない.⁴² その意味で, μ の選択は完全に任意である.

color 電磁場が covariantly constant のときは, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu=0,1,2,3$) は 互いに可換であり, 同時対角化可能である. 2章同様, そのような表現を取り, color 空間での, 対角成分 (i -component, $i=1,2,3$) の各々について個別に考察する. (尚 以下では, 簡単の為, color 空間の対角成分を表す index (i) ($i=1,2,3$) は省略する.) 適当な Lorentz frame (2.21) を取ると, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ の各対角成分は, 一般性を損なう事なく以下のように選ぶことができる,

$$E = \mathcal{F}_{03} = -\mathcal{F}_{30} \leq 0, \quad H = \mathcal{F}_{12} = -\mathcal{F}_{21} \leq 0, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{others}). \quad (\text{C5})$$

このとき, Eq.(C3) 中の integrand は

$$\begin{aligned} \text{tr} \langle x | \exp(-\mathcal{G}^{-1}\tau) | x \rangle &= 4N_f \text{tr}_c \cos\left(\frac{gH}{\mu^2}\tau\right) \cosh\left(\frac{gE}{\mu^2}\tau\right) e^{-i\tau(\bar{M}^2 - i\epsilon)/\mu^2} \\ &\langle xy | \exp(-2i\tau\frac{gH}{\mu^2}K_X) | xy \rangle \langle tz | \exp(-2i\tau\frac{gE}{\mu^2}K_Y) | tz \rangle \end{aligned} \quad (\text{C6})$$

となる. 但し, operator variable K_X , K_Y は

$$K_X = \frac{1}{2}(gH)^{-1}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2), \quad K_Y = \frac{1}{2}(gE)^{-1}(\Pi_3^2 - \Pi_0^2). \quad (\text{C7})$$

この様に, effective Lagrangian の評価は operator K_X 及び K_Y の固有値問題に帰着される.¹⁰

K_X は良く知られている harmonic-oscillator operator であり, その固有値は discrete な Landau level になる. それ故,

$$\begin{aligned} \langle xy | \exp(-2i\frac{gH}{\mu^2}\tau K_X) | xy \rangle &= \frac{gH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-i\tau\frac{2gH}{\mu^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{gH}{4\pi i} \frac{1}{\sin(gH\tau/\mu^2)}. \end{aligned} \quad (\text{C8})$$

他方, operator K_Y は, inverted harmonic-oscillator operator であり, その固有値は連続的で, $-\infty$ から ∞ までの任意の値を取り得る. 従って, その固有値の総和は 容易には実行でき

ない。しかし、その固有関数は parabolic cylindrical function の線型結合で表すことができ、状態密度も知られているので、⁴³ irrelevant な constant を除いて、Eq.(C8) と同様な関係式

$$\langle tz | \exp(-2i \frac{gE}{\mu^2} \tau K_Y) | tz \rangle = \frac{gE}{4\pi} \frac{1}{\sinh(gE\tau/\mu^2)} \quad (C9)$$

が得られる。

Eq.(C6),(C8) 及び (C9) を用いると、Eq.(C3) 中の $\mathcal{L}_{\text{loop}}$ は、compact な形で書き表すことができる、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{loop}} &= \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{d\nu} \left[\frac{i^\nu}{\Gamma(\nu)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_0^\infty d\tau \tau^{\nu-1} gH \cot\left(\frac{gH}{\mu^2}\tau\right) gE \coth\left(\frac{gE}{\mu^2}\tau\right) e^{-i\tau(\bar{M}^2 - i\epsilon)/\mu^2} \right] \right\} \\ &= -\frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_c \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{d}{d\nu} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \times \right. \\ &\quad \text{p.v.} \int_0^\infty ds s^{\nu-3} (gHs) \coth\left(\frac{gH}{\mu^2}s\right) (gEs) \cot\left(\frac{gE}{\mu^2}s\right) e^{-s\bar{M}^2/\mu^2} \\ &\quad \left. - i \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n\pi\mu^2}{gE}\right)^\nu \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(n\pi H E^{-1}) e^{-n\pi\bar{M}^2/(gE)} \right]. \end{aligned} \quad (C10)$$

ここで、complex τ -plane 上で、積分経路を変更し、積分変数を $\tau \rightarrow s = i\tau$ と変更した。Eq.(C10) 右辺の第 2 項は complex τ -plane の pole $\tau = -n\pi i\mu^2/(gE^{(i)}) (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, \infty)$ での留数から得られる。

さて、ここで、complex ν -plane での解析接続をすることによって、Eq.(C10) 中の発散積分を 変形し、

$$\begin{aligned} I &\equiv \text{p.v.} \int_0^\infty ds s^{\nu-3} e^{-s\bar{M}^2/\mu^2} (gEs) \cot\left(\frac{gE}{\mu^2}s\right) (gHs) \coth\left(\frac{gH}{\mu^2}s\right) \\ &= \mu^4 \text{p.v.} \int_0^\infty ds s^{\nu-3} e^{-s\bar{M}^2/\mu^2} \times \\ &\quad \left[\left(\frac{gE}{\mu^2}s\right) \cot\left(\frac{gE}{\mu^2}s\right) \left(\frac{gH}{\mu^2}s\right) \coth\left(\frac{gH}{\mu^2}s\right) - 1 - \frac{g^2(H^2 - E^2)}{3\mu^4} s^2 \right] \\ &\quad + \bar{M}^2 \left(\frac{\bar{M}^2}{\mu^2}\right)^{-\nu} \Gamma(\nu - 2) + \frac{g^2}{3}(H^2 - E^2) \left(\frac{\bar{M}^2}{\mu^2}\right)^{-\nu} \Gamma(\nu). \end{aligned} \quad (C11)$$

ここで、最後の式の第 1 項は、generalized Riemann ζ -function で表すことのできる有限な

部分であり、一方、 $\nu = 0$ で発散する部分は、 Γ -関数によって表されている。¹⁰ 注意すべき事は、 $\nu = 0$ での高次の発散が、解析接続によって、1位の極に転化された点である。後は、Eq.(C11) を、Eq.(C10) に代入し、regular な関数 $f(\nu)$ に対する関係式

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{d}{d\nu} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} f(\nu) \right] = f(0) \quad (\text{C12})$$

を用いれば、effective potential に対する finite な表式が得られる、

$$\begin{aligned} V_{\text{loop}} = -\mathcal{L}_{\text{loop}} = & \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-s\bar{M}^2} \times \\ & [(gEs) \cot(gEs) - (gHs) \coth(gHs) - 1 - \frac{g^2}{3}(H^2 - E^2)s^2] \\ & - \frac{N_f N_c}{16\pi^2} [\bar{M}^4 \ln \frac{\bar{M}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2}\bar{M}^4] - \frac{N_f}{24\pi^2} \text{tr}_{\text{c}} g^2 (H^2 - E^2) \ln \frac{\bar{M}^2}{\mu^2} \\ & - i \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c}} \sum_{n=1}^\infty \frac{gH}{n} \frac{gE}{n} \coth(HE^{-1}n\pi) \exp\{-n\pi\bar{M}^2/(gE)\}. \end{aligned} \quad (\text{C13})$$

この様に、解析接続だけを用いて、ad hoc な cutoff Λ を導入する事なく、quark loop の有限な寄与を導出する事ができる点が、この方法の長所である (2章での proper-time の方法、参照)。さて、loop 積分の発散は、 ζ -function regularization の方法を用いて取り除かれたが、しかし、本来は、更にくりこみの手続きによって、mass や coupling constant の reparametrization をする事が必要である。effective potential に対する意味のある表式を得るためには、くりこみ条件を満たすように、有限の correction を加えなければならない。我々は、電磁場の場合については、Ref.10 において、linear σ model を用いて、このことを具体的に実行した。しかしながら、この場合、不幸にして NJL model はくりこみ不可能な理論であり、well-defined なくりこみの処方望めない。とは言え、linear σ -model の場合と同様に、NJL model においても、Hartree 近似の範囲内で、'pseudo-renormalization' を試みてみよう。^{*} まず、通常のくり

* もちろん、くりこみ不可能な理論に対して、この様な処方に意味があるか否かは自明ではない。しかし、同様なことは、proper-time の方法での cutoff Λ の導入についても言えて、問題点として残っている。ここでは、試験的な意味も兼ねて、pseudo-renormalization の処方を行う。

こみ理論の様に, loop 積分に対する counter term

$$\delta\mathcal{L} = \delta g_{\text{N}1\text{L}} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\bar{\tau}q)^2] - \delta\bar{m}\bar{q}q \quad (\text{C14})$$

を導入する. 従って, effective potential は

$$V_{\text{eff}} = \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{N}1\text{L}}} + i\text{Tr}\ln[i\mathcal{D} - \bar{M} + i\epsilon] - \delta g_{\text{N}1\text{L}} \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{N}1\text{L}}} - \delta\bar{m} \frac{\bar{M} - \bar{m}}{2g_{\text{N}1\text{L}}} \quad (\text{C15})$$

ここで, counter term ($\delta\mathcal{L}$) は, $H = E = 0$ での ‘renormalization’ 条件,

$$\frac{\partial V_{\text{loop}}}{\partial \bar{M}} \Big|_{\bar{M}=\mu} = \frac{\partial^2 V_{\text{loop}}}{\partial \bar{M}^2} \Big|_{\bar{M}=\mu} = 0 \quad (\text{C16})$$

を満たすと仮定する. すると,

$$\delta g_{\text{N}1\text{L}} = \frac{N_f N_c}{2\pi^2} g_{\text{N}1\text{L}}^2 \mu^2, \quad \delta\bar{m} = \frac{\delta g_{\text{N}1\text{L}}}{g_{\text{N}1\text{L}}} \bar{m}. \quad (\text{C17})$$

この様な手続きによって, 得られる $\text{Re}V_{\text{eff}}$ の最終的な表式は,

$$\begin{aligned} \text{Re}V_{\text{eff}} &= \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{N}1\text{L}}} + \frac{N_f}{8\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-s\bar{M}^2} \\ &\quad [(gEs) \cot(gEs) \quad (gHs) \coth(gHs) - 1 - \frac{g^2}{3}(H^2 - E^2)s^2] \\ &\quad - \frac{N_f N_c}{16\pi^2} [\bar{M}^4 \ln \frac{\bar{M}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2}\bar{M}^4 + 2\mu^2 \bar{M}^2] - \frac{N_f g^2}{24\pi^2} \ln \frac{\bar{M}^2}{\mu^2} \text{tr}_{\text{c}}(H^2 - E^2). \end{aligned} \quad (\text{C18})$$

ここで, 任意の scale parameter μ を除いては, 最終的な表式には, 1 つしか adjustable parameter $g_{\text{N}1\text{L}}$ は存在しない. 一方, proper-time の方法では, Eq.(2.27) 中, $g_{\text{N}1\text{L}}$ と Λ という 2 つの parameter が現われる.

この場合でも, $\text{Re}V_{\text{eff}}$ に対する極値条件から self-consistent な Dyson 方程式が自然に導出される,

$$\begin{aligned} \bar{M}_D &= \bar{m} + \bar{M}_D \frac{N_f N_c}{2\pi^2} g_{\text{N}1\text{L}} [\bar{M}_D^2 \ln(\bar{M}_D^2/\mu^2) - \bar{M}_D^2 + \mu^2] \\ &\quad + \bar{M}_D \frac{N_f g_{\text{N}1\text{L}}}{2\pi^2} \text{tr}_{\text{c.p.v.}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s\bar{M}_D^2} [(gEs) \cot(gEs) \quad (gHs) \coth(gHs) - 1]. \end{aligned} \quad (\text{C19})$$

ここで, \bar{M}_D は, color 電磁場が存在する下での, physical vacuum における dynamical

quark mass である. $q\bar{q}$ 対生成率は, やはり, $\text{Im}V_{\text{eff}}$, から得られて, その表式は 2 章での Eq.(2.46) と一致する.

C2 計算結果

hadron の flux tube 中での effective potential V_{eff} は, Eq.(3.3) と良く似ていて,

$$\begin{aligned} \text{Re}V_{\text{eff}} &= \frac{(\bar{M} - \bar{m})^2}{4g_{\text{NJL}}} - \frac{N_f N_c}{16\pi^2} \left[\bar{M}^4 \ln \frac{\bar{M}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \bar{M}^4 + 2\mu^2 \bar{M}^2 \right] + \frac{N_f \mathcal{E}^2}{144\pi^2} \ln \frac{\bar{M}^2}{\mu^2} \\ &\quad + \frac{N_f}{8\pi^2} \text{P.v.} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s\bar{M}^2} \left\{ \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{3} s \right) \cot \left(\frac{\mathcal{E}}{3} s \right) - 1 \right] + 2 \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{6} s \right) \cot \left(\frac{\mathcal{E}}{6} s \right) - 1 \right] + \frac{\mathcal{E}^2 s^2}{18} \right\}, \\ \text{Im}V_{\text{eff}} &= -\frac{N_f}{8\pi^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{3} \right)^2 \exp \left(-\frac{3}{\mathcal{E}} \bar{M}^2 n\pi \right) + 2 \left(\frac{\mathcal{E}}{6} \right)^2 \exp \left(-\frac{6}{\mathcal{E}} \bar{M}^2 n\pi \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C20})$$

この場合, Dyson 方程式は,

$$\begin{aligned} \bar{M}_D &= \bar{m} + \bar{M}_D \frac{N_f N_c}{2\pi^2} g_{\text{NJL}} \left[\bar{M}_D^2 \ln \frac{\bar{M}_D^2}{\mu^2} - \bar{M}_D^2 + \mu^2 \right] \\ &\quad - \bar{M}_D \frac{N_f g_{\text{NJL}}}{2\pi^2} \frac{\mathcal{E}}{3} \left[F^{\text{fermion}} \left(\sqrt{\frac{3}{\mathcal{E}}} \bar{M}_D, \frac{\pi}{2} \right) + F^{\text{fermion}} \left(\sqrt{\frac{6}{\mathcal{E}}} \bar{M}_D, \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C21})$$

但し, $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ は, 特性関数 (2.36) である. ($q\bar{q}$ 対生成率 w については, Eq.(3.9) の表式がそのまま成り立つ.)

scale parameter μ の値としては, hadron physics に典型的な energy scale である 1 GeV をとる.* 残りの parameter g_{NJL} については, color 電磁場が無いときに $\bar{M}_D = 335 \text{ MeV}$ (constituent quark mass) となるように選ぶ.

(i) empirical case ($\bar{m} = 5.5 \text{ MeV}$): $g_{\text{NJL}} = 0.2015 \text{ fm}^2$

(ii) chiral limit ($\bar{m} = 0$): $g_{\text{NJL}} = 0.205 \text{ fm}^2$

両方の場合について, color 電磁場が無いときの quark 凝縮は $\langle \bar{u}u \rangle \simeq -(254 \text{ MeV})^3$ となり, 良い再現を示す (Eq.(3.4) 参照). また, ここでの four-fermion coupling constant g_{NJL} の値は, proper-time の方法で得られた値と, ほぼ一致している (3 章参照).

* μ の値は, 1 GeV 程度の大きさであれば何でも良く, 以下の結果は, μ の値にそれほど sensitive ではない.

数値計算を実行すると, dynamical quark mass \bar{M}_D の変化は Fig.13 の様になる. この場合, \bar{M}_D は, $\mathcal{E}_{\text{cr}} \simeq 5\text{GeV/fm}$ の付近で急な減少を示すので, この値を chiral 対称性が回復する臨界 color 電場の大きさと見なすことができる.

Fig.13

empirical case ($\bar{m}=5.5\text{ MeV}$) 及び chiral limit ($\bar{m} = 0$) は, それぞれ, 実線, 破線で表した. また, $q\text{-}\bar{q}$ 対生成率 w についても, やはり, \mathcal{E}_{cr} の付近で, quark mass の減少に伴って急激に増加する. この様に, ここで得られた結果は, 3章の結果とほぼ一致している.

REFERENCES

1. For instance, T.P.Cheng and L.F.Li, "Gauge theory of elementary particle physics", Clarendon press, Oxford, (1984).
2. A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. **B234**, 189 (1984).
G.S. Adkins, C.R. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. **B228**, 552 (1983).
H.B. Nielsen and A. Patkos, Nucl. Phys. **B195**, 137 (1982).
3. A. Dhar and S.R. Wadia, Phys. Rev Lett. **52**, 959 (1984).
T. Hatsuda and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **91**, 284 (1987) and references cited therein.
4. V Vento, M. Rho, E.M. Nyman, J.H. Jun and G.E. Brown, Nucl. Phys. **A345**, 413 (1980).
A. Chodos and C.B. Thorn, Phys. Rev. **D12**, 2733 (1975).
T. Inoue and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **54**, 1833 (1975).
5. For instance, B. Petersson, Nucl. Phys. **A525**, 237c (1991) and references cited therein.
6. For recent review article, M.Bando, T.Kugo and K.Yamawaki, Phys. Rept.**164**, 217 (1988).

7. A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini,
Phys. Rev. **D41**, 1610 (1990).
8. For instance, papers in
Proc. of “Quark Matter ’90”, Menton , Nucl. Phys. **A525** (1991).
9. T.D. Lee and M. Margulies, Phys. Rev. **D11**, 1591 (1975).
10. H. Suganuma and T. Tatsumi, Ann. Phys. (N.Y.) **208**, 470 (1991).
11. H. Suganuma and T. Tatsumi, Physics Letters **B269**, 371 (1991).
12. H. Suganuma and T. Tatsumi, preprint, KUNS1091, (1991).
13. H. Suganuma and T. Tatsumi, Proc. of the “High Density Nuclear Matter”
Workshop, 18-21 Sep. 1990, KEK, in press.
14. S.P. Klevansky and R.H. Lemmer, Phys. Rev. **D39**, 3478 (1989).
15. S.P. Klevansky, J. Jaenicke and R.H. Lemmer, Phys. Rev. **D43**, 3040
(1991).
16. W Bürger, M. Faber, W Feilmair and H. Markum, Nucl. Phys. **A525**,
581c (1991) and references cited therein.
17. W Dittrich and M. Reuter, Lecture Notes In Physics **220**, 244 (1985).
18. For instance, A.B. Balantekin, J.E. Seger and S.H. Fricke, Int. J. Mod. Phys.
A6, 695 (1991) and references cited therein.
19. For a recent review article, K. Sailer, Th. Schönfeld, Zs. Schram, A. Schäfer
and W Greiner, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **17**, 1005 (1991).
20. For instance, G. Gatoff, A.K. Kerman and T. Matsui, Phys. Rev. **D36**
114, (1987).
21. P.H.Cox and A.Yildiz, Phys. Rev. **D32**, 819 (1985).
22. For instance, C.Itzykson and J.B.Zuber, “Quantum Field Theory”,
McGraw-Hill,(1985).

23. W Greiner, B. Müller and J. Rafelski, “Quantum Electrodynamics of Strong Fields”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1985).
24. T. Kunihiro, Nucl. Phys. **B351**, 593 (1991).
25. D.J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974).
26. M.R. Brown and M.J. Duff, Phys. Rev. **D11**, 2124 (1975).
A. Yildiz and P.H. Cox, Phys. Rev. **D21**, 1095 (1980).
M. Claudson, A. Yildiz and P.H. Cox, Phys. Rev. **D22**, 2022 (1980).
27. S.G. Matinyan and G.K. Savvidy, Nucl. Phys. **B134**, 539 (1978).
G.K. Savvidy, Phys. Lett. **B71**, 133 (1977).
I.A. Batalin, S.G. Matinyan and G.K. Savvidi, Sov. J. Nucl. Phys. **26**, 214 (1977).
28. H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B179**, 129 (1981).
29. K. Huang, “Quarks, Leptons and Gauge Fields”, World Scientific, Singapore (1982).
30. G. t’Hooft, Nucl. Phys. **B190**, 455 (1981).
31. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
32. P. Ring and P. Schuck, “The Nuclear Many-Body Problem”, Springer-Verlag, New York (1980).
33. A.D. Giacomo, M. Maggiore and Š. Olejník, Nucl. Phys. **B347**, 441 (1990).
34. A.B. Migdal, S.B. Khokhlachev and V Yu. Borue, Phys. Lett. **B228**, 167 (1989).
A.B. Migdal, JETP Lett. **46**, 322 (1987).
35. G. Gatoff, A.K. Kerman and T. Matsui, Phys. Rev. **D36**, 114 (1987).
36. H. Suganuma and T. Tatsumi, Proc. of the International Symposium on “High Energy Nuclear Collisions and Quark Gluon Plasma”, Kyoto, Japan, June 6-8, 1991, World Scientific Pub. Co.

37. C. Martin, D. Vautherin, Phys. Rev. **D38**, 3593 (1988).
C. Martin, D. Vautherin, Phys. Rev. **D40**, 1667 (1989).
38. A. Chodos, Phys. Rev. **D42**, 2881 (1990).
39. H. Pagels and E. Tomboulis, Nucl. Phys. **B143**, 485 (1978).
N.K. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B144**, 376 (1978).
40. W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Math. Phys." Springer-Verlag, New York 1966.
M. Abramowitz and I.A. Stegun "Handbook of mathematical functions; with formulas, graphs and mathematical tables" Dover, New York, 1965.
41. For instance, J. I. Kapusta, "Finite-temperature field theory", Cambridge University Press, (1989).
42. S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
43. G. Barton, Ann. Phys. (N.Y.) **166**, 322 (1986).

FIGURECAPTIONS

1. NJL model での four-fermion interaction に対する解釈. 低エネルギー領域での dynamical gluon の非摂動的な効果が, quark 間の effective な four-fermion interaction をもたらすという解釈を diagram を用いて表した. 実線は quark, 波線は gluon を表す
2. 理論に取り込むべき, gluon の外場と quark との coupling を diagram で表したものの dynamical gluon の効果は, 既に, effective に quark 間の four-fermion interaction に取り込まれているので explicit には考慮しない
3. (a) diagram で表現した Dyson 方程式. この場合, quark の self-energy としては, Hartree-type の one-loop diagram を考慮に入れる. 太線は 相互作用を含んだ dynamical quark の propagator であり, 細線は, current quark の propagator を表す (但し, いずれも gluon の外場中での propagator である.) (b) Dyson 方程式の右辺を, current quark の propagator で表したもの. この様に, dynamical quark は current quark で表現すると, \hbar の full order の力学的効果を含んでいる ことがわかる.
4. (a), (b) は, それぞれ, 特性関数 $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ の鳥瞰図, 及び, その contour map. x は, dynamical quark mass と color 電磁場の強さとの比を表す dimensionless parameter であり, θ は, color 磁場と color 電場の mixing ratio をあらわす (例えば, $\theta=0$ は color 磁場だけ, $\theta=\pi/2$ は color 電場だけ の状況を表す.) $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ の値が, 正であれば chiral 対称性は回復に向かい, 負であれば chiral 対称性の破れが更に増す x が小さいとき, 即ち, color 電磁場が強いときは, $F^{\text{fermion}}(x, \theta)$ が正である領域が広がり, θ の広い領域にわたって chiral 対称性が回復に向かう.
5. color 電磁場が外場として存在する下での, effective potential V_{eff} . (a), (b) はそれぞれ, V_{eff} の 実部, 虚部を, quark の dynamical mass の関数 \bar{M} として表したもの. 実線は, empirical case ($\bar{m} = 5.5\text{MeV}$) に対応し, $\mathcal{E}=0, 2, 4, 6 \text{ GeV/fm}$ の場合を図に示した. 図(a)中の, cross \times は, $\text{Re}V_{\text{eff}}$ の absolute minimum, 即ち, energy 的に安定な physical vacuum に対応する. 図(b)中の cross \times も physical vacuum に対応した点を表す 破線は, color 電磁場がないときの, chiral limit ($\bar{m} = 0$) の場合 であり左右対称になっている.

6. color 電磁場が無いときでの source J_σ の変化 (chiral limit の場合). 横軸は \bar{M} であり, $\text{Re}V_{\text{eff}}$ の極値以外では, source J_σ は 0 でない値を持つ.
7. \mathcal{E} の関数として表した dynamical quark mass M . 下方 2 つの曲線は, u, d -quark の dynamical mass を表す: 実線は (i) empirical case ($\bar{m}=5.5\text{MeV}$) であり, 破線は (ii) chiral limit ($\bar{m} = 0$) の場合である. 上方の実線は s -quark の dynamical mass を表す 斜線部は, Regge 軌跡から半定量的に求められる hadron 内部での \mathcal{E} の値を表す ($\mathcal{E} = 5.3 \sim 6$ [GeV/fm]).
8. 単位時空体積あたりの quark-antiquark 対生成率 w . ここで, 横軸は \mathcal{E} の関数であり, quark の dynamical mass の変化も考慮に入れている. 実線は empirical case ($\bar{m}=5.5$ MeV) であり, 破線 は chiral limit ($\bar{m} = 0$) の場合である. 臨界 color 電場 ($\mathcal{E}_{\text{cr}} \simeq 4\text{GeV/fm}$) 付近では, dynamical quark mass の減少に伴って, w は enhance される. 上方, 下方の点線は, quark 質量を, それぞれ, “ $\bar{M} = 0$ ” および “ $\bar{M}=335\text{MeV}$ ” に固定したときの 計算結果. 斜線部の意味は Fig.7 と同じ.
9. 単位時空体積あたりの s - \bar{s} 対生成率 w_s . Fig.8 同様, 横軸は \mathcal{E} であり, quark の dynamical mass の変化も考慮に入れている. 上方, 下方の点線は, quark 質量を, それぞれ, “ $M_s = 150\text{MeV}$ ” および “ $M_s=505\text{MeV}$ ” に固定したときの 場合の計算結果. 尚, 比較のために, u, d -quark に対する対生成率, w_u を破線で示した. 斜線部の意味は Fig.7 と同じ.
10. (a) は, 3 種類の異なる approach で得られた effective potential を表す 図で示したのは, いずれも color 電磁場が無い場合であり, 実線及び破線は, それぞれ, effective potential の方法で得られた $V_{\text{eff}}, \mathcal{V}_{\text{eff}}$ を表す また, 点線は, field equation を用いた constrained Hartree approximation (CHA) による計算結果. 横軸は, quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle_\lambda / \langle \bar{q}q \rangle_0$ であり, 縦軸の原点は 適当に選んだ. なお, 補助場を用いた effective potential V_{eff} は, 任意の \bar{M} について値が存在したが (Fig.5 の (a) を参照), quark 凝縮 の関数としては, $|\langle \bar{q}q \rangle_\lambda| < 1.1 |\langle \bar{q}q \rangle_0|$ の範囲内でしか物理的に意味のある解が存在しない. (b) は quark 凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle_\lambda / \langle \bar{q}q \rangle_0$ の関数としての source λ_S であり, 破線は effective potential の方法によって得られた結果を, 点線は 上述の CHA approach によって得られた結果をそれぞれ表す
11. (a) flux-tube 描像での meson. meson は valence の quark と antiquark 及びそ

れらの間に形成される color-electric flux によって構成される。この場合, flux は tube 状に絞られる。(b) di-quark を用いた flux tube 描像での baryon. di-quark は, 2つの valence quark の cluster であり, baryon は, この di-quark と valence quark の束縛状態として表される。

12. 高エネルギー重イオン衝突において, 衝突から QGP の形成にいたるまでの幾つかの段階.
(a,b) pre-equilibrium stage : (a) 衝突の直後には, 重イオン間に, 多数の color flux tubes が形成され, そこでは, 非常に強い color 電場が存在し得る。(b) 次いで, Schwinger 機構を通じて, $q\bar{q}$ 対生成 が tube の内部で多数起こる。この process を通じて, color 電磁場は弱まってゆき, 反対に, 系の thermal energy が増加していく。つまり, color 電磁場の energy は熱へと転化され, 重イオン間に energy deposition が起こる。(c) QGP formation : 衝突の際の energy が十分に高い場合は, 重イオン間に, 高温で準平衡状態の QGP が形成される。この段階では, color 電磁場はもう外場としては無く, fluctuation としてしか存在しない。
13. ζ -function regularization を用いて計算した quark の dynamical mass \bar{M}_D : 実線及び破線は, それぞれ, empirical case ($\bar{m} = 5.5\text{MeV}$), chiral limit ($\bar{m} = 0$) の場合の計算結果である。尚, 比較のため, 先の, proter-time の方法を用いた場合の計算結果 (Fig.7 参照) を点線で示す 斜線部の意味は Fig.7 と同じ。

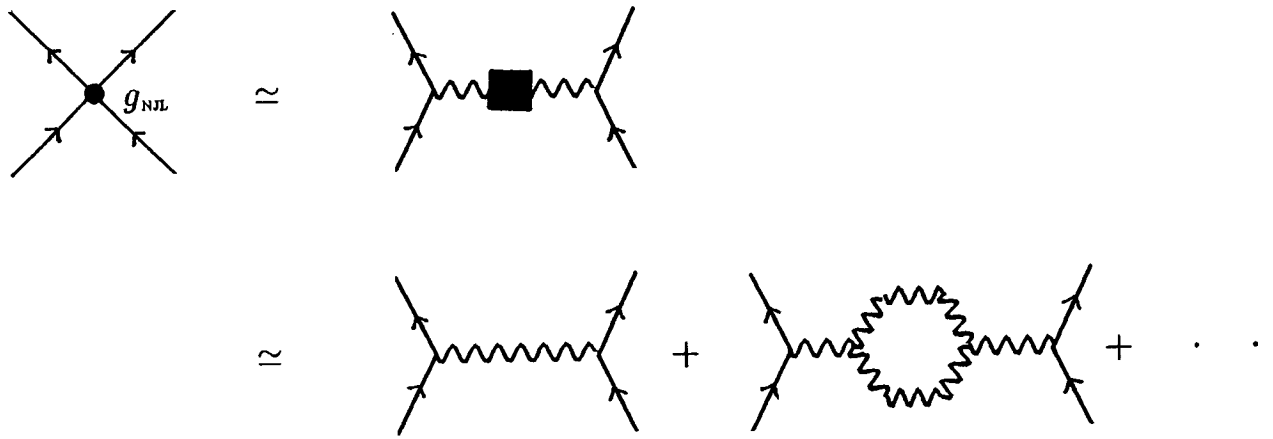


Fig.1

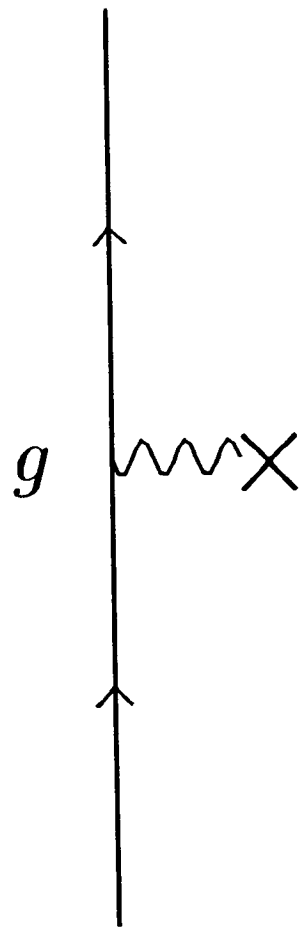


Fig.2

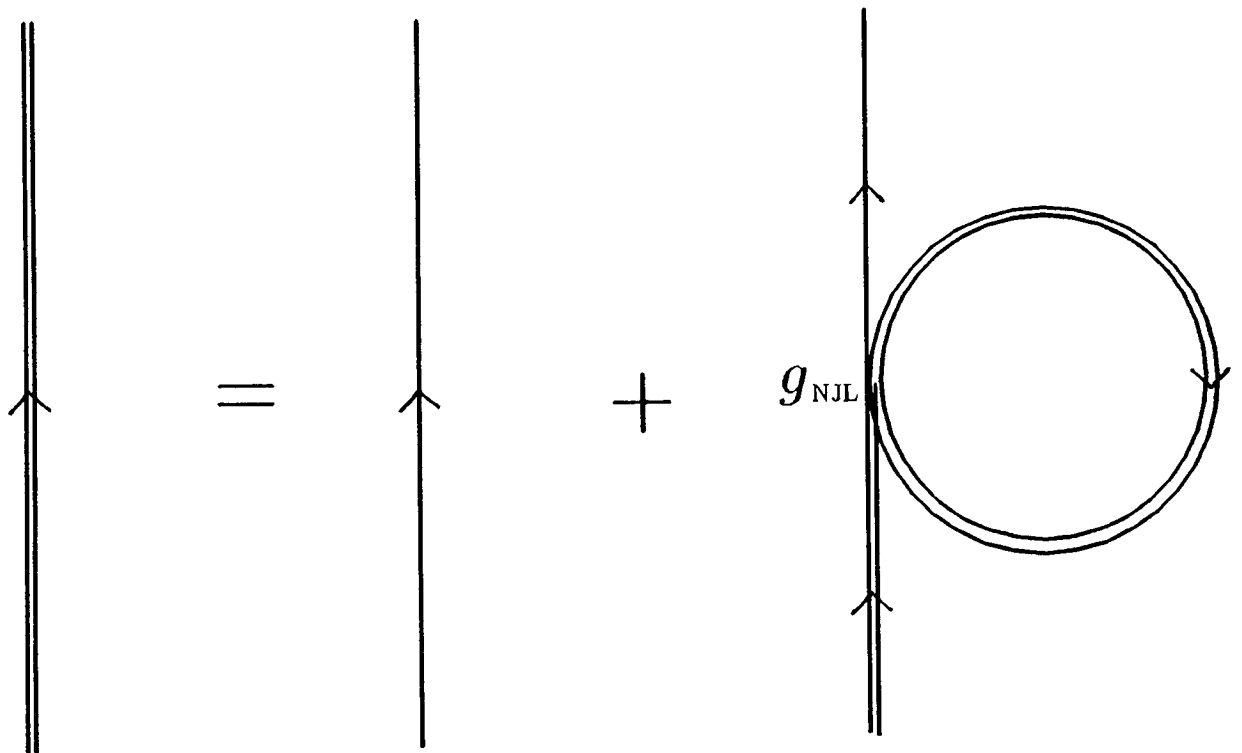


Fig.3(a)

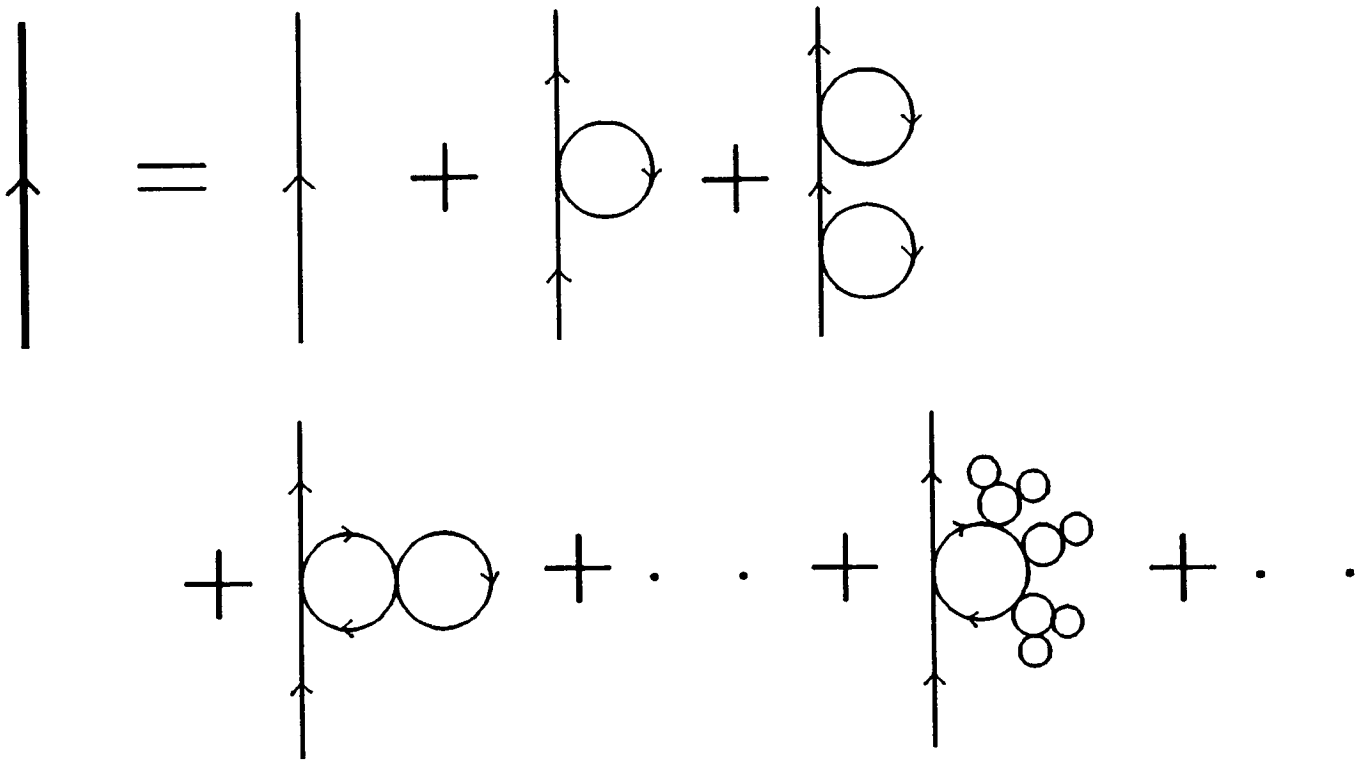


Fig.3(b)

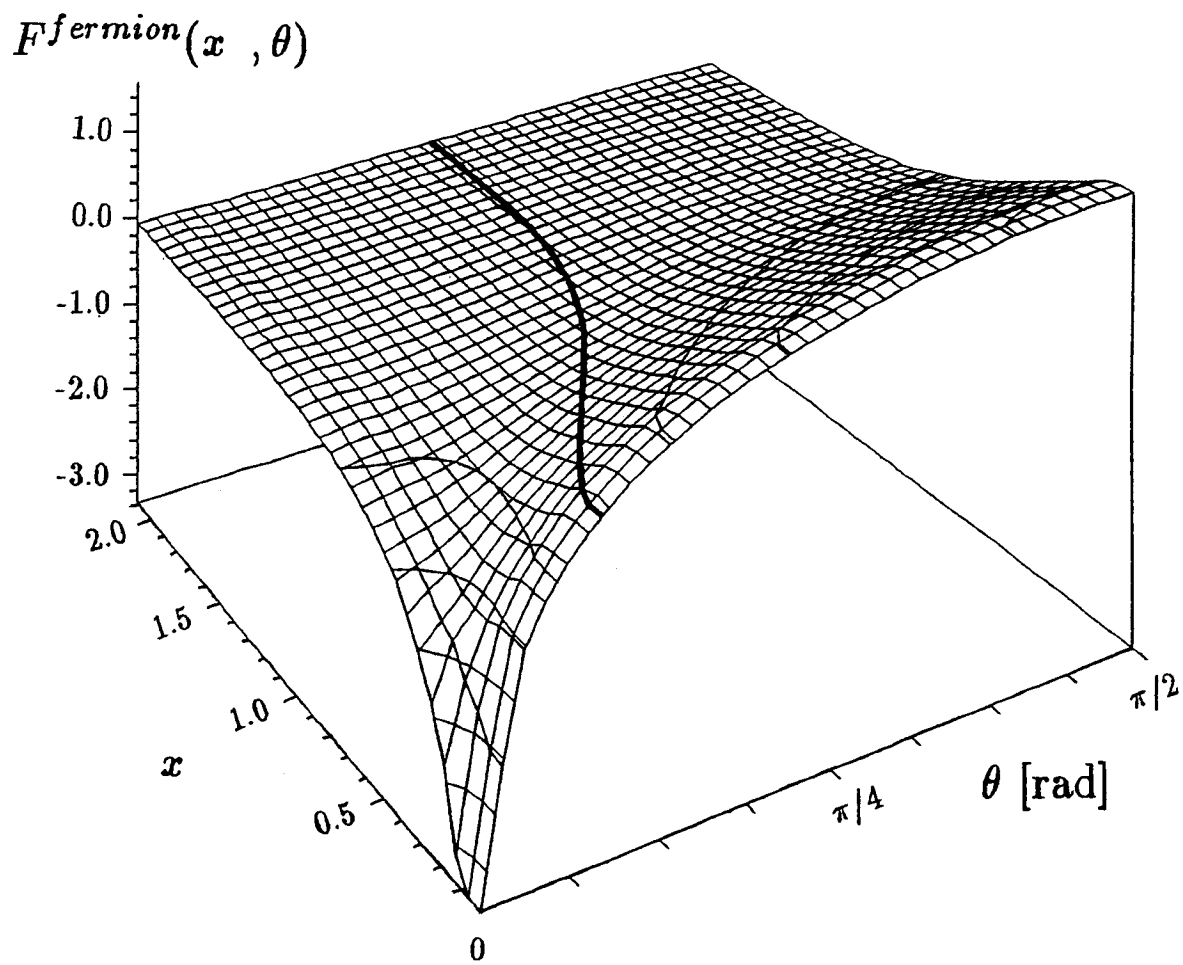


Fig.4(a)

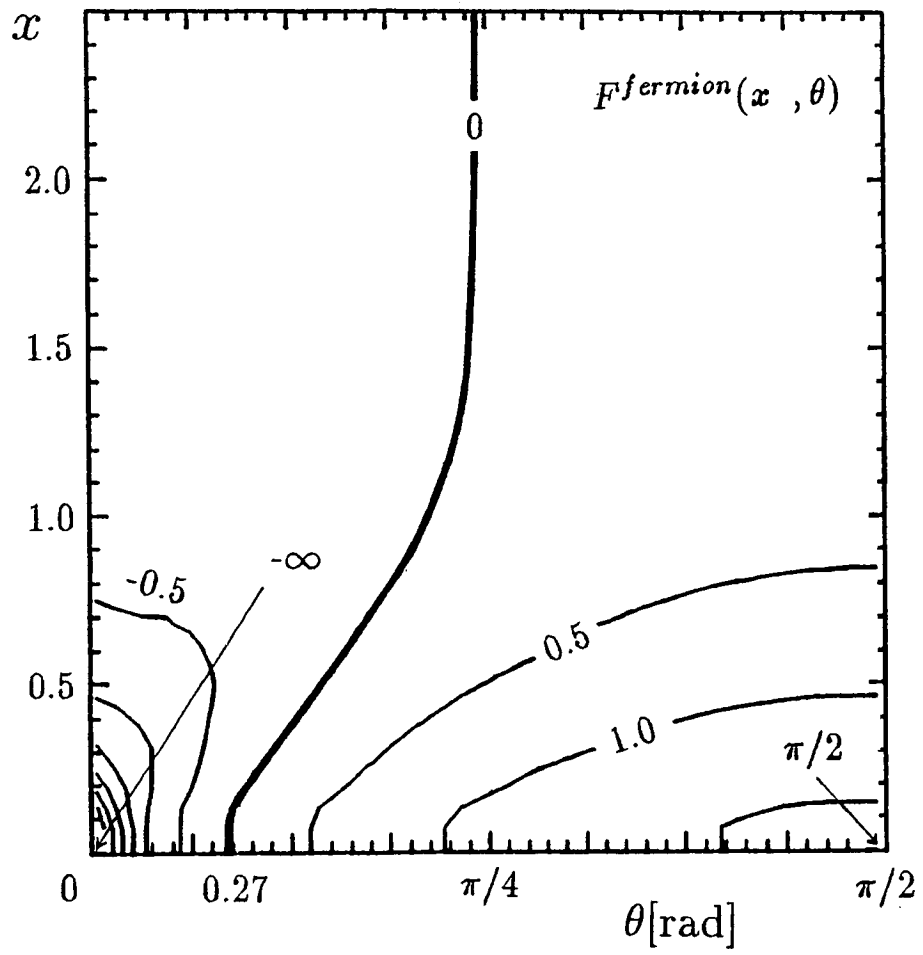


Fig.4(b)

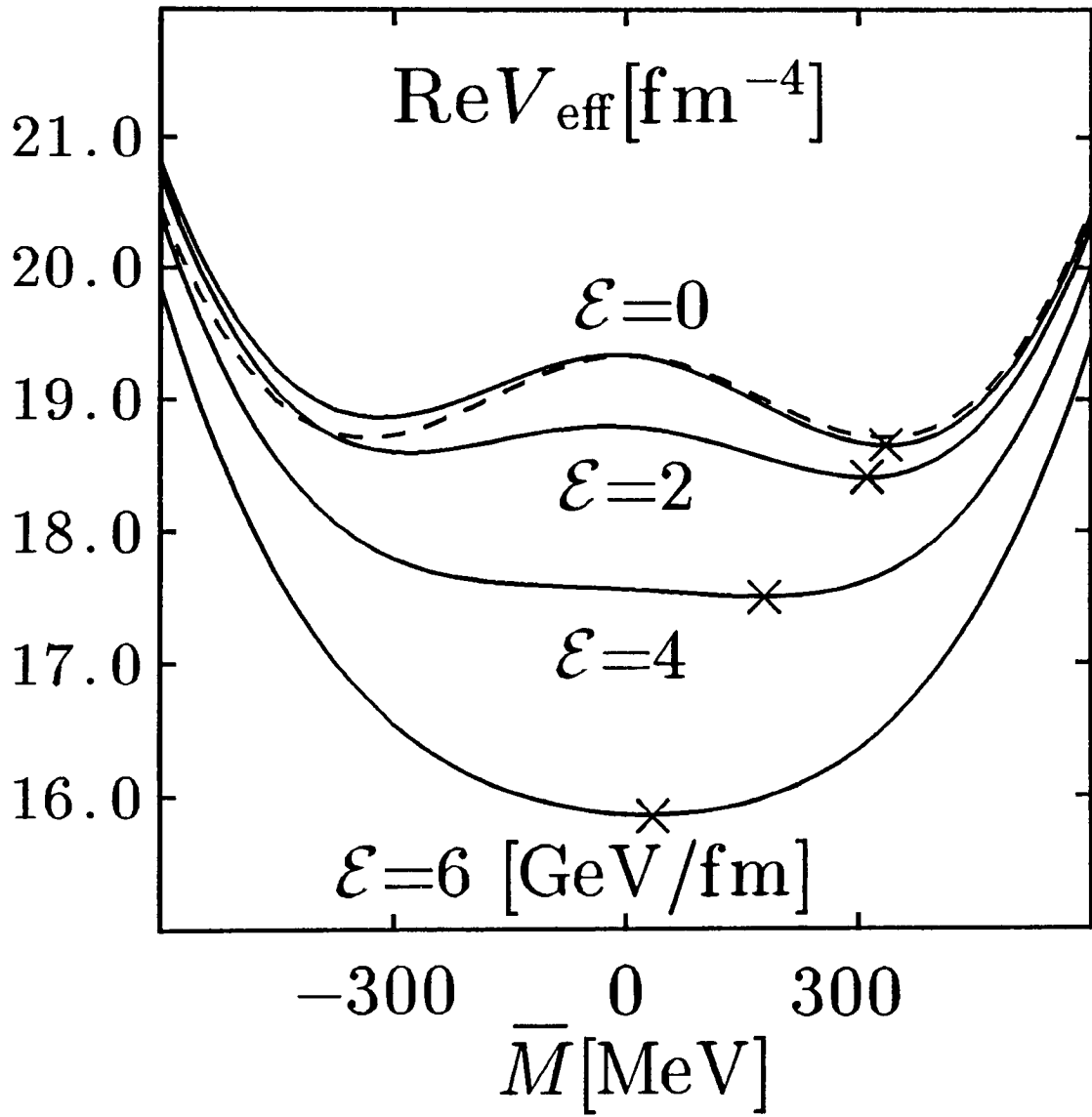


Fig.5(a)

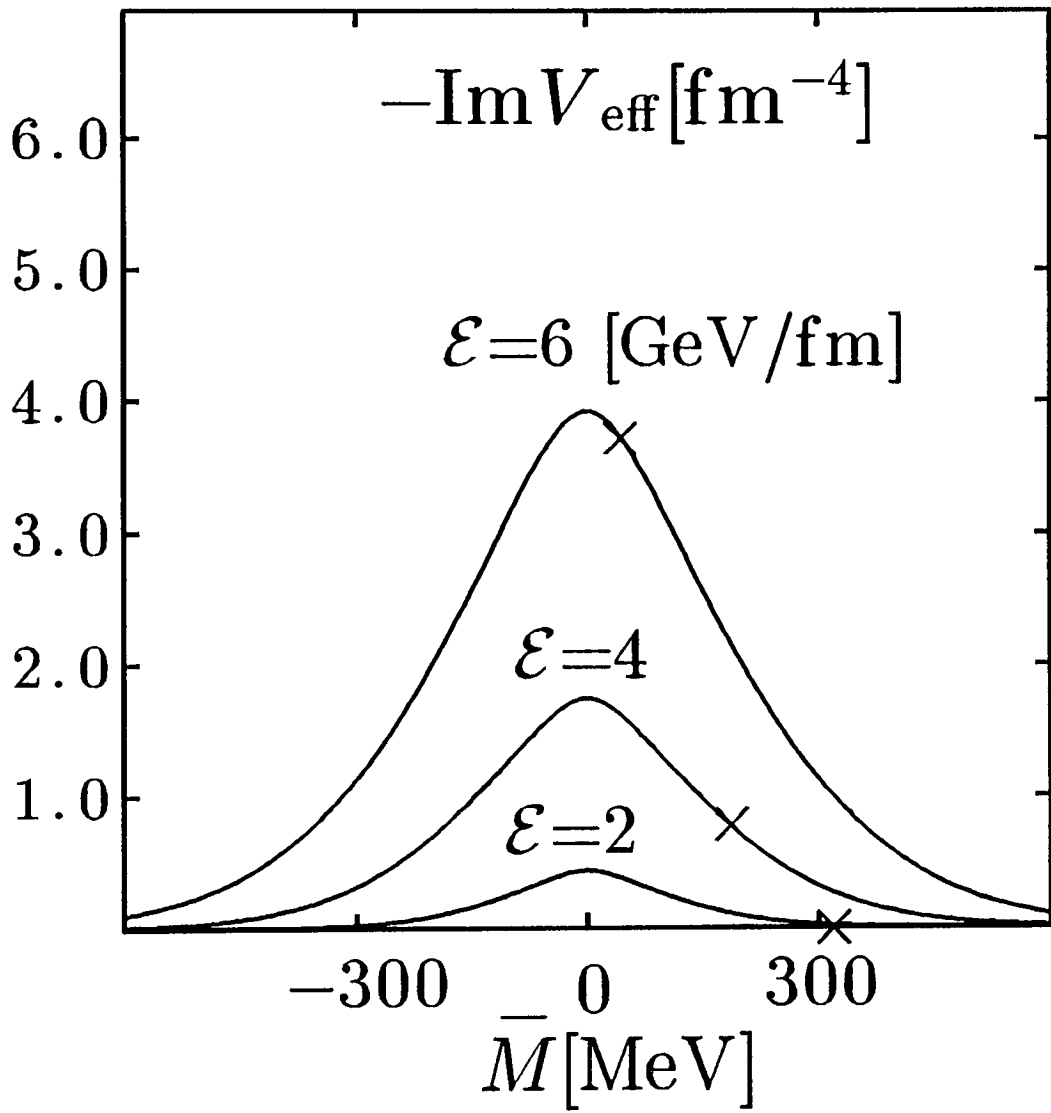


Fig.5(b)

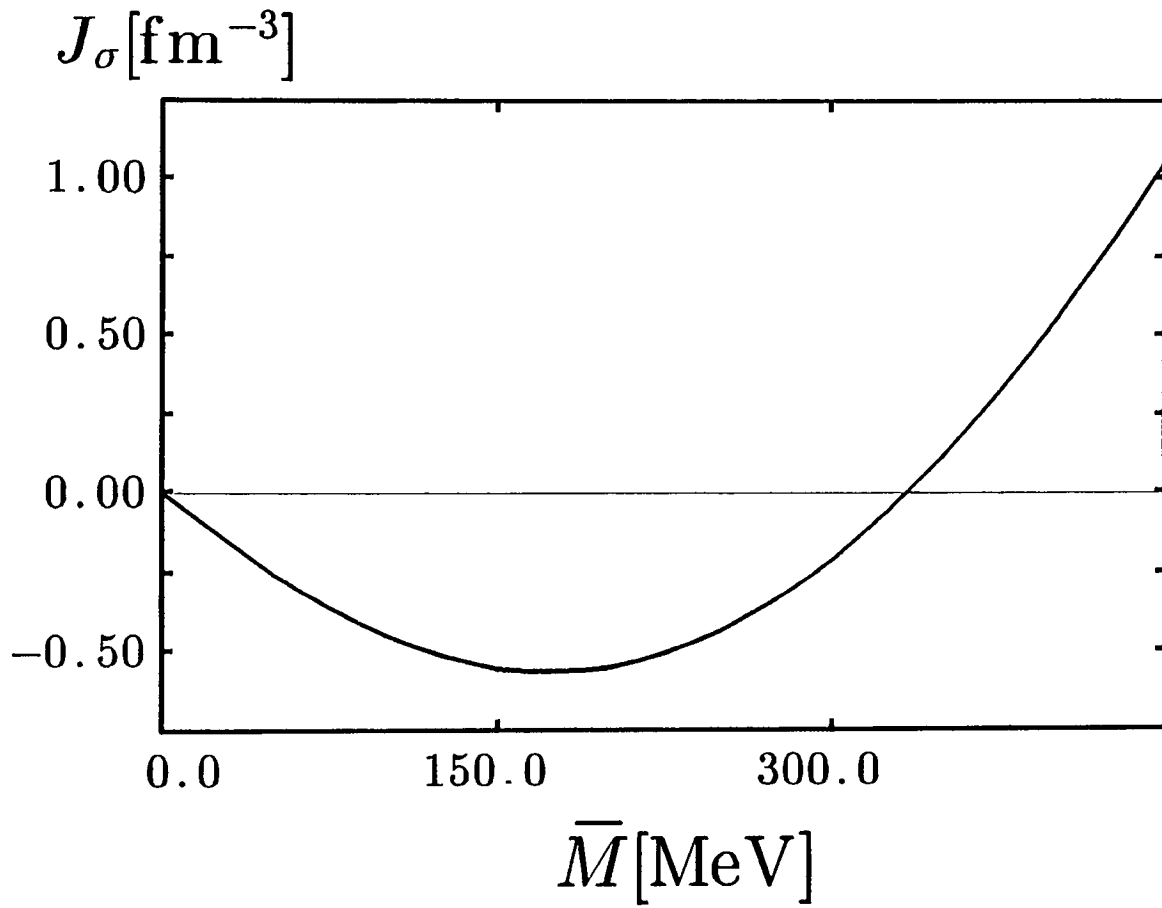


Fig.6

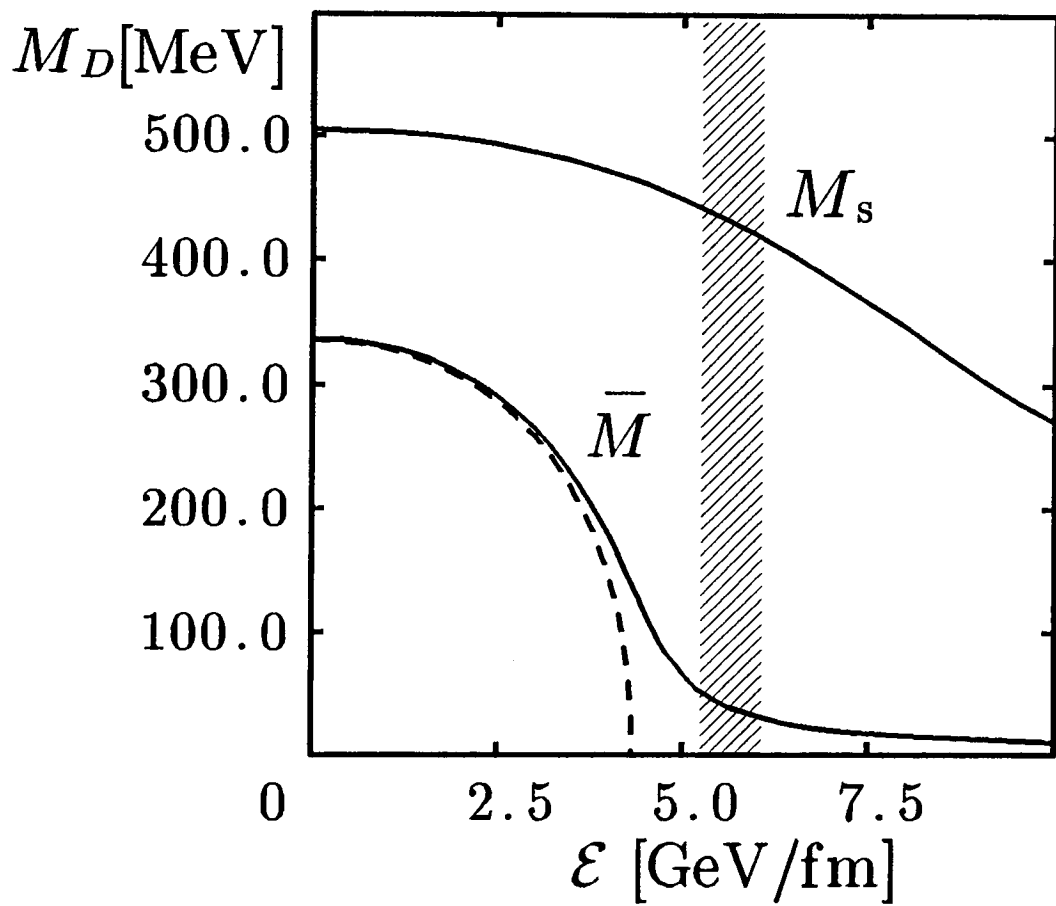


Fig.7

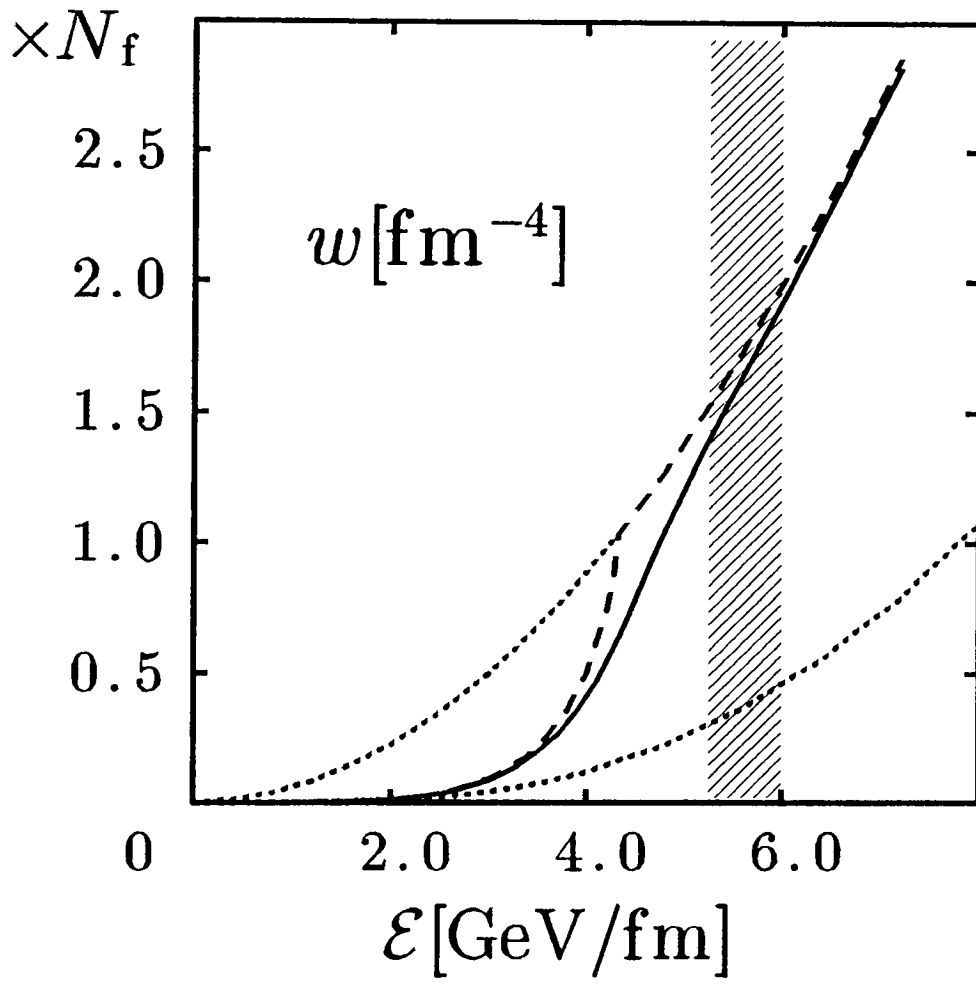


Fig.8

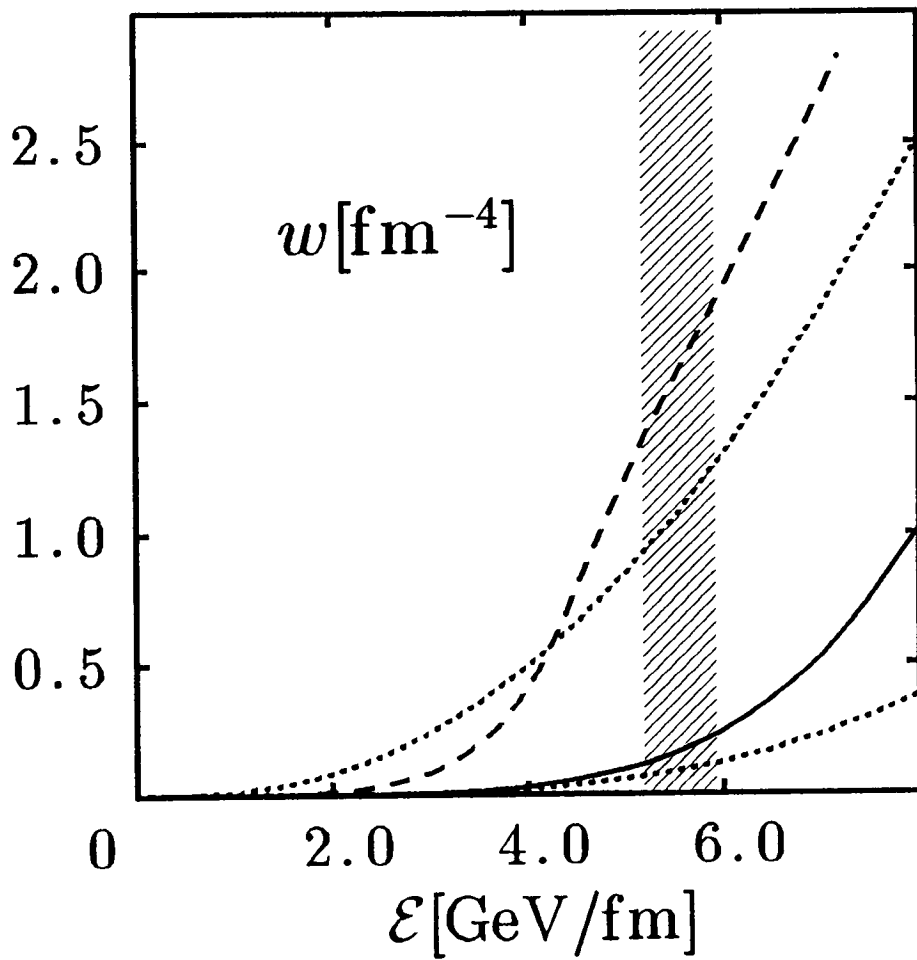


Fig.9

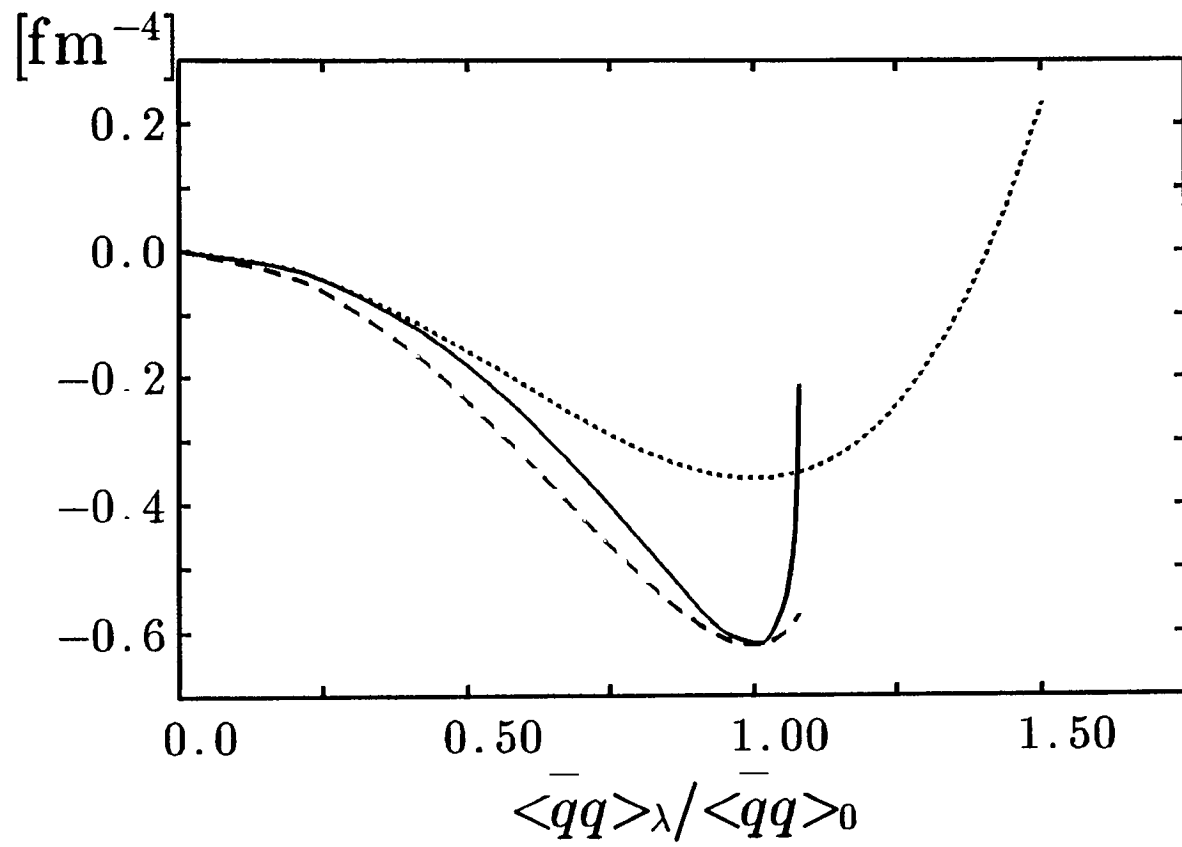


Fig.10(a)

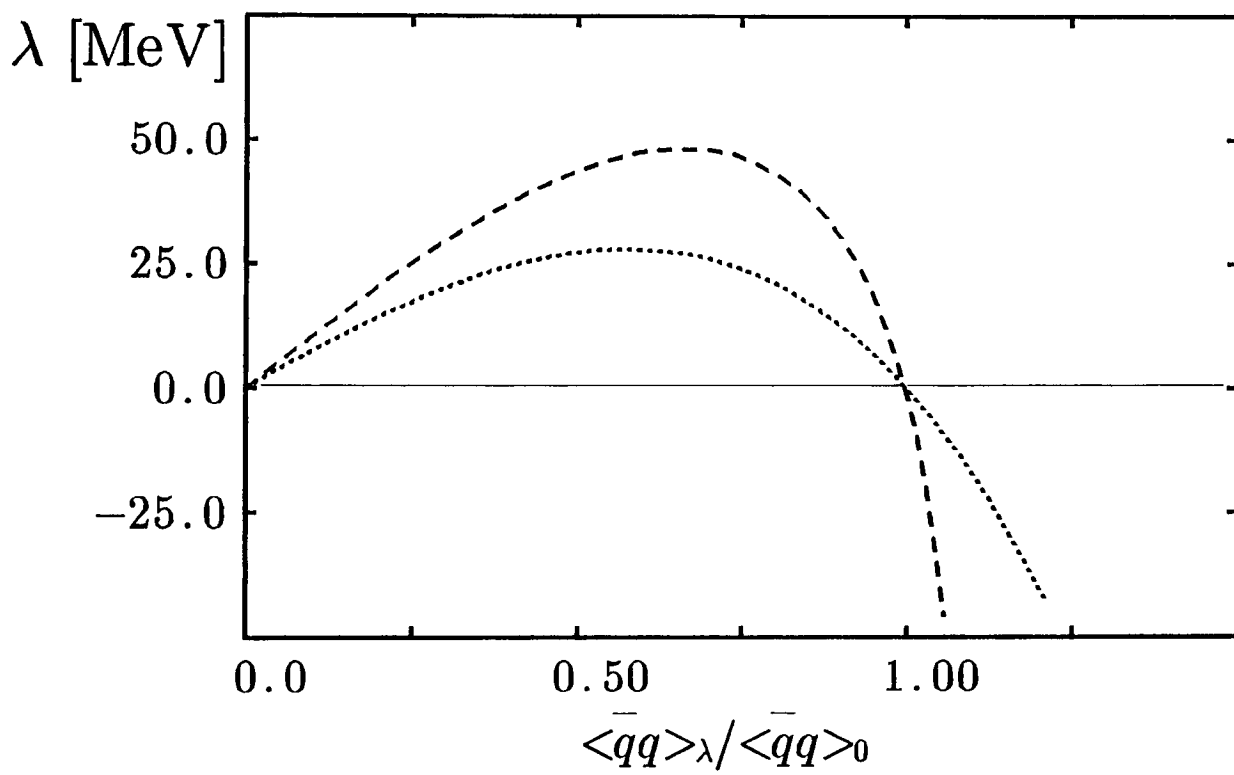


Fig.10(b)

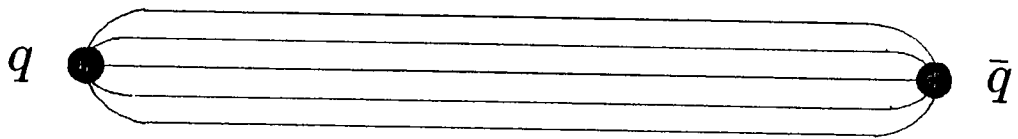


Fig.11(a)

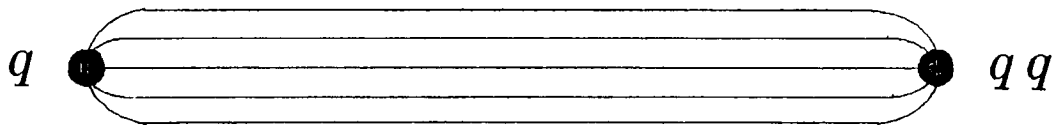


Fig.11(b)

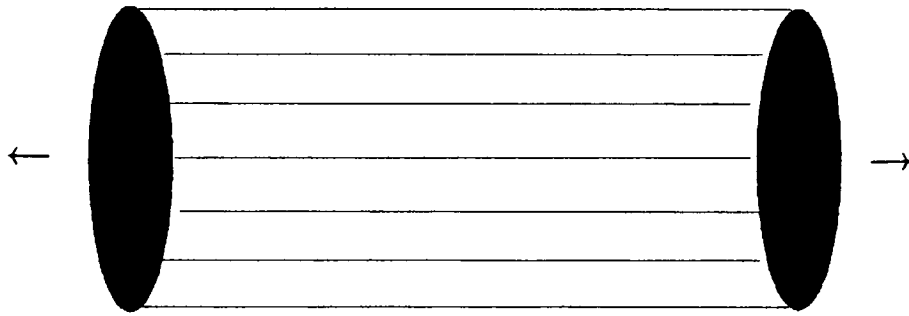


Fig.12(a)

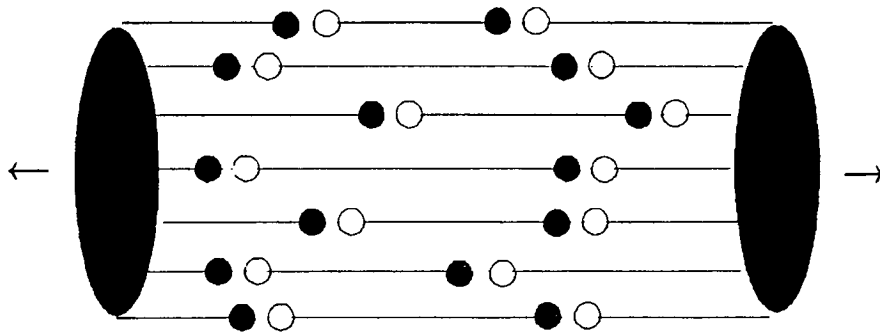


Fig.12(b)

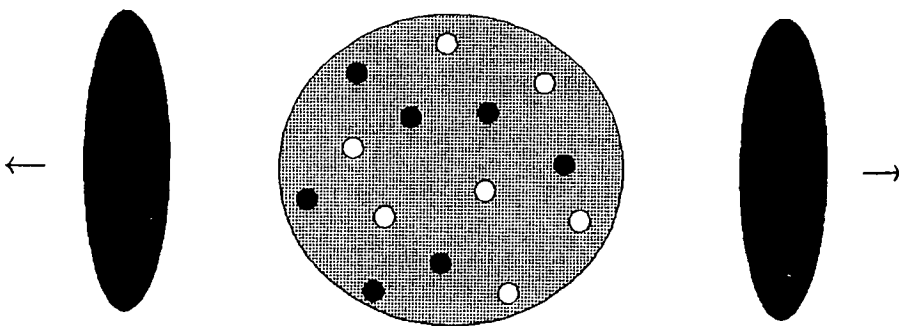


Fig.12(c)

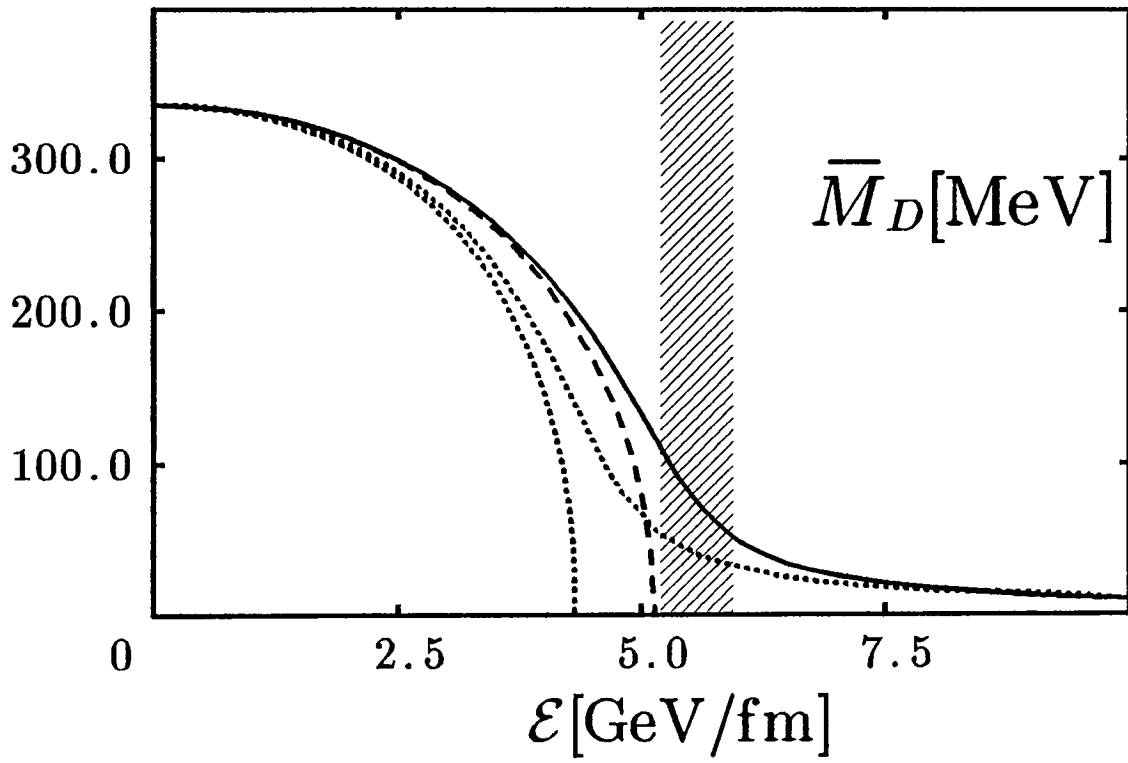


Fig.13