【 43 】

氏　　　名	山　崎　愛　一（やま さき あい いち）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 1762 号
学位授与の日付	平成 8 年 5 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Cancellation of Lattices and Approximation Properties of Division Algebras （格子の簡約定理と斜体の近似定理）
論文調査委員	（主　査） 教　授　土方弘明　　教　授　丸山正樹　　教　授　吉田敬之

論　文　内　容　の　要　旨

申請論文は，Dedekind 環 R 上の整環 Λ の表現論（$=\Lambda-$lattice の理論），その関連に於て，特に R の商体 K 上の多元環 B の乗法群 $B^{\times}$ の強近似定理について，いくつかの重要な結果を与えた。

整環の表現論は，現代代数学の源流であるところの Dedekind のイデアル論の直接的発展形態であるが，その現状は，決して満足できるものではない。

特徴的なのは，任意の可換環上の多元環について成り立つ加群の一般論と，Dedekind 環の中でも特別なもの，即ち商体 K が大域体（＝数体または有限体上の 1 変数代数関数体）であるもの，について唯知られている“深い結果”との差が甚しく，その状態が1970年頃（Swan Roiter 時代）よりそのまま放置されていたことである。

申請論文が関与している次の問題はその典型的な例である。

以下記号が必要となる，$\otimes$ は全て R 上。

$R_P:=$R の p －進完備化　　$\hat{R}:=\Pi R_p$（全ての極大イデアル p 上の直積）

$L:\Lambda-$lattice　　$\Gamma:=\mathrm{End}_{\Lambda}L$　　$B:=\Gamma\otimes K$

$\hat{\Gamma}:=\Gamma\otimes\hat{R}$　　$\hat{B}:=B\otimes\hat{R}$

$B^{\times}\supset E(B):=$Ker of reduced norm（B が K 上分離的のとき）。

L（または B）の性質として次の 3 つを考える。

(c)（ある $n\geqq 0$ があって）$L\oplus L^n\simeq M\oplus L^n\Rightarrow L\simeq M$,

(a) $E(B)$は$E(\hat{B})$と中で dense,

(e) R の極大イデアルから来ない K の素点 v で $B\otimes K_v$ が斜体でないものがある。

このとき大域体（且つ B が K 上分離的）の場合に唯知られている重要定理として，次の 2 つがあった。

Jacobinski の簡約定理：(a)$\Rightarrow$(c)

Eichler-Kneser の強近似定理：(a)$\Leftrightarrow$(e)

さて，数年前土方は次の事実に気がついた。

（Ⅰ）群 $E(B)$ を Veserstein の群 $\tilde{E}(B)$ で置き換える。即ち条件（a）を次の（$\tilde{a}$）で置き換える。

（$\tilde{a}$）$\tilde{E}(B)$ は $\tilde{E}(\hat{B})$ の中で dense

このとき，（$\tilde{a}$）$\Rightarrow$（c）は（K，B についての仮定なしで）常に成立する。

（Ⅱ）B がある K－多元環 C 上の行列環 $B=Mn(C)(n \geqq 2)$ の形なら（$\tilde{a}$）は常に成立する。

従って，（B が（Ⅱ）の形でないとき）性質（$\tilde{a}$）が成り立つための条件を見出すことは，極めて自然且つ重要な問題となった。

申請論文は，この問題を考察して著しい結果を得た。申請者は（$\tilde{a}$）と並んで次の 2 つの条件を導入した。

(a')　$\tilde{E}(\hat{B})$ は $B^{\times}$ の閉包($\mathrm{in}\hat{B}^{\times}$)に含まれる。

(a'')　$\tilde{E}(\hat{B})$ は $B^{\times}\hat{R}^{\times}$ の閉包に含まれる。

従って，（$\tilde{a}$）$\Rightarrow$(a')$\Rightarrow$(a'') である。

得られた結果は次の通り：

(1)　（c）$\Leftrightarrow \tilde{E}(\hat{B}) \subset \hat{\Gamma}^{\times}B^{\times}$

(2)　(a'')$\Leftrightarrow$($B \simeq \mathrm{End}_{\Lambda}L \otimes K$ となる）全ての L に対し（c）

(3)　$J(B) := B$ の Jacobson radical

$$B/J(B)=\bigoplus_{i=1}^{m} Mn_i(D_i),\quad D_i \text{ は斜体}$$

$n_i=1(1 \leqq i \leqq n)$ $n_i \geqq 2(n < i \leqq m)$ と書くとき B が(a') を充す $\Leftrightarrow$ $D_i(1 \leqq i \leqq n)$ が(a')を充す

B が（$\tilde{a}$）(or(a''))を充す $\Rightarrow$ $D_i(1 \leqq i \leqq n)$ が（$\tilde{a}$）(or(a'')) を充す

(4)　K が PF－体（即ち数体または 1 変数代数関数体）のとき：(a'')$\Rightarrow$（e）

(5)　K が実数体上の 1 変数代数関数体のとき：（e）$\Rightarrow$（a）

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

一般の環 C に対し，Vaserstein の群 $\tilde{E}(C)$ とは，生成元によって，次のように定義される：

$\tilde{E}(C) := <(1+xy)(1+yx)^{-1} \mid x, y \in C \quad 1+xy \in C^{\times}>$

この群は，多くの予想を一挙に解決して代数的 K－理論の第 1 期を終結された Vaserstein の論文（1969）で導入された。そこには，C が半局所環の場合に証明された Key Lemma がある。

申請論文の結果(1)は，この Key Lemma が半局所環と限らない $\hat{\Gamma}$ 及 $\hat{B}$ についても成り立つことを示して得られた。環論としても，それ自体興味ある結果である。

申請論文の結果(4)は，条件 (a'') を用いることによって，一般の PF－体に対し，極めて自然な証明を与えている。従来の Eichler-Kneser 定理の証明が，徹頭徹尾局所コンパクト性に依存しているのに対比して，拡張したこと以外にも，より自然な証明を与えたという意味がある。

申請論文の結果(5)は，群論的手段により，一般の場合を，既に参考論文で解決されている特殊な場合，即ち K が実数体上の 1 変数有理関数体である場合に帰着することによって得られている。猶有理関数体のときの証明は，概ね実数体の特殊性を使った解析的手段によっている。

また，簡約定理(c)の成否について，Swanが多くの頁を費やして例を計算しているが，申請論文の結果(1)(2)は併せて，その条件を明解に書き切っている。

このように，申請者の結果は，今迄のところ，全て，大域体の場合の見事な拡張となっている。ところが，証明法は，類体論の成立している大域体のときの方法は全く適用できず，各段階で独自の工夫を行っている。その工夫の種類は多様で，研究者としての適性を，また既に研究者と呼んでもよい能力を示している。申請者は博士後期課程在学3年未満でありますが，申請論文は，特例として博士（理学）の学位論文を認定するに十分なるものと判断致します。