氏　　　名	岡（おか）　安（やす）　類（るい）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第2573号
学位授与の日付	平成15年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Entropy of subshifts and the Macaev norm （サブシフトのエントロピーとマサエフノルム）
論文調査委員	（主 査） 助教授 泉　正己　　教 授 河野　明　　教 授 重川一郎

論　文　内　容　の　要　旨

ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素全体 $B(H)$ は環をなす。その自明でないイデアル $\mathfrak{S}$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$ が，任意の A, $B\in B(H)$ と $T\in\mathfrak{S}$ に対して $\|ATB\|_{\mathfrak{S}}\leq\|A\|\|T\|_{\mathfrak{S}}\|B\|$ かつ任意の階数1の作用素 F に対して $\|F\|=\|F\|_{\mathfrak{S}}$ を満たすとき，対称ノルムと呼ばれる。特に $\mathfrak{S}$ が $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$ に関して完備であるとき，$(\mathfrak{S}, \|\cdot\|_{\mathfrak{S}})$ は対称ノルムイデアルと呼ばれる。$B(H)$ の自明でないイデアルはすべてコンパクト作用素全体のなすイデアル $K(H)$ に含まれることが知られており，$T\in\mathfrak{S}$ の対称ノルム $\|T\|_{\mathfrak{S}}$ はその特異値 $\{s(T)_k\}_{k=1}^{\infty}$（$T$ の絶対値作用素 $|T|$ の固有値を大きいものから順に並べたもの）の関数となる。

Voiculescu は互いに交換する有限個の自己共役作用素の組み $\tau=\{T_i\}_{i=1}^N$ の対称ノルムイデアル $\mathfrak{S}$ の元での摂動による同時対角化可能性を議論し，その必要十分条件は次の量が0となることであることを示した。

$$k(\tau)_{\mathfrak{S}}=\operatorname*{Lim\ inf}_{u\in F(H)_1^+}\ \sup_{1\leq i\leq N}\|uT_i-T_iu\|_{\mathfrak{S}}$$

ここで $F(H)_1^+$ は作用素ノルム1以下の正の有限階作用素全体でり，下極限は $F(H)_1^+$ の自然な順序について考える。これは大変深い結果であり，例えば任意の正規作用素がヒルベルト - シュミット作用素での摂動で対角化可能であることがこの結果より導かれる。

一般の作用素の組み τ に対しても $k(\tau)_{\mathfrak{S}}$ は意味を持つが，Voiculescu は特に $\mathfrak{S}$ がマサエフイデアル $C_{\infty}^-(H)$ の時に $k(\tau)_{\infty}^-=k(\tau)_{\mathfrak{S}}$ が興味深い性質を持つことを示した。ここで $C_{\infty}^-(H)$ は対称ノルム

$$\|T\|_{\infty}^-=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s(T)_j}{j}$$

が有限なコンパクト作用素全体である。$k(\tau)_{\infty}^-$ が何らかの意味でのエントロピー的量であることは Voiculescu により指摘されていたが，具体例でその値が決定されているものは次の例を除いて知られていなかった。

(1) $\tau_N=\{T_i\}_{i=1}^N$ がヒルベルト空間 H 上の互いに直交する像を持つ等 長作用素の組みで，$(1-\sum_{i=1}^N T_iT_i^*)H$ が τ_N の生成する C^*-環に対して巡回的であれば $k(\tau_N)_{\infty}^-=\log N$

(2) F_N を生成元 $S=\{g_i\}_{i=1}^N$ の生成する自由群とし，λ を F_N の $\ell^2(F_N)$ 上の左正則表現とする。$\lambda_S=\{\lambda_{g_i}\}_{i=1}^N$ とすると

$$\log N\leq k(\lambda_S)_{\infty}^-\leq\log(2N-1)$$

有限集合 A の無限直積空間 A^Z は直積位相でコンパクト空間となるが，その上に座標のシフト σ が同相写像として作用する。$N=\#A$ とすると (A^Z, σ) は N-フルシフトと呼ばれる力学系となる。X が A^Z の σ-不変閉部分空間であり，σ_X が σ の X への制限であるとき，力学系 (X, σ_X) はサブシフトと呼ばれる。中でも有限個の禁止語を指定することにより定まるサブシフトはマルコフシフトと呼ばれ，サブシフトの重要なクラスである。松本はサブシフト (X, σ_X) に対してフォッ

ク空間 F_X とその上の生成作用素 $\tau_X=\{T_a\}_{a\in A}$ を導入し，その生成する C^*-環の構造の研究を通してサブシフトの研究を行った。

申請者は上の τ_N が N-フルシフトの生成作用素であり，$k(\tau_N)_{\infty}^{-}$ の値 $\log N$ がその位相エントロピー $h(\sigma)$ と一致することに気付き，Voiculescu の結果を一般化して次の定理を得た。

定理１（主論文 Theorem 3.2） 任意のサブシフト（X, σ_X）に対して $k(\tau_X)_{\infty}^{-}\leq h(\sigma_X)$ が成り立つ。さらに almost sofic shift を含むあるサブシフトのクラスに対しては等号が成立する。ここで almost sofic shift とは位相エントロピーの意味でマルコフシフトで近似されるサブシフトのことである。

Γ を有限生成集合 S により生成される有限生成群とし，$l_S(\gamma)$ を $\gamma\in\Gamma$ の語長（word length）とする。S_nを $l_S(\gamma)=n$ を満たす Γ の元全体として，

$$v_S=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\#S_n}{n}$$

とする。申請者はマルコフシフトの場合の計算結果を用いてさらに次を示した。

定理２（主論文 Proposition 4.2） I を有限集合，H を有限群，$G_i(i\in I)$ を H を含む有限群または $Z\times H$ とし，Γ を融合積 $*_H G_i$ とする。G_i が有限群のときは $S_i=G_i$，$H\times Z$ のときは $S_i=\{1,\ -1\}\times H\subset G_i$ とし，$S=\cup_{i\in I}S_i$ とする。このとき $k(\lambda_S)_{\infty}^{-}=vs$ が成り立つ。特に Γ が自由群 F_N で S が標準的生成集合のときは $k(\lambda_S)_{\infty}^{-}=\log(2N-1)$ が成り立つ。

論文審査の結果の要旨

ヒルベルト空間 H 上の有限個の有界作用素の組み $\tau=\{T_i\}_{i=1}^{N}$ の Voiculescu 不変量 $k(\tau)_{\mathfrak{S}}$は，当初は摂動による同時対角化の障害として導入された。τ の対称ノルムイデアル$\mathfrak{S}$での摂動による対角化可能性は，$k(\tau)_{\infty}^{-}$ が０になるか否かで判定されるが，$k(\tau)_{\infty}^{-}$ が０にならない場合でも（つまり対角化可能でない場合でも），多くの場合 $k(\tau)_{\mathfrak{S}}$ の値自体が興味深い量であることが知られている。例えば$\mathfrak{S}$が対称ノルム

$$\|T\|_{N}^{-}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s_j(T)}{j^{1-1/N}}$$

が有限なコンパクト作用素全体であるとき，τ のスペクトル測度の絶対連続部分と $k(\tau)_{\infty}^{-}$ の値との関係が，Voiculescu により指摘されている。

τ が互いに交換する自己共役作用素とは限らない一般の作用素の組みの場合，Voiculescu 不変量 $k(\tau)_{\mathfrak{S}}$の摂動論的意味はまだ明らかではない。しかし$\mathfrak{S}$がマサエフイデアル $C_{\infty}^{-}(H)$ であるときの Voiculescu 不変量 $k(\tau)_{\infty}^{-}$ は興味深い性質を持つことが知られている。$k(\tau)_{\infty}^{-}$ は常に有限値であり，

$$k(\oplus_{i\in I}\tau_i)_{\infty}^{-}=\sup_{i\in I}\{k(\tau_i)_{\infty}^{-}\}$$

が成り立つ。I が $C_{\infty}^{-}(H)$ より真に大きな対称ノルムイデアルのときは，$k(\tau)_I=0$ となる。また Voiculescu は，Kolmogorov-Sinai エントロピーや離散群上のランダムウォークのエントロピーと $k(\tau)_{\infty}^{-}$ との関係を指摘している。しかし $k(\tau)_{\infty}^{-}$ の値の計算はその定義からもわかるように一般に大変難しく，（０以外の）値が知られている例は Voiculescu による次の結果を除いて知られていなかった。

(1) $\tau_N=\{T_i\}_{i=1}^{N}$ がヒルベルト空間 H 上の互いに直交する像を持つ等長作用素の組みで，$(1-\sum_{i=1}^{N}T_iT_i^*)H$ が τ_N の生成する C^*-環に対してして巡回的であれば $k(\tau_N)_{\infty}^{-}=\log N$

(2) F_N を生成元 $S=\{g_i\}_{i=1}^{N}$ の生成する自由群とし，λ を F_N の $\ell^2(F_N)$ 上の左正則表現とする。$\lambda_S=\{\lambda_{g_i z2}\}\}_{i=1}^{N}$ とすると

$$\log N\leq k(\lambda_S)_{\infty}^{-}\leq\log(2N-1)$$

申請者の主論文 Theorem 3.2 は，上の(1)の結果の力学系的意味を明らかにし，さらに非常に大きなクラスのサブシフト（X, σ_X）に対して，その生成作用素の $\tau_X=\{T_a\}_{a\in A}$ の Voiculescu 不変量 $k(\tau)_{\infty}^{-}$ の値を完全に決定し，それが位相エント

ロピーに一致することを示したものである。この結果は(i)一般に計算が困難な $k(\tau)_{\infty}^{-}$ の値を大きなクラスの例について決定したこと，(ii) $k(\tau)_{\infty}^{-}$ の値が単に“エントロピー的量”であるというだけでなく，多くの例で実際に位相エントロピーと一致することを示したこと，という二つの重要性を持つ。申請者の方法は，$k(\tau)_{\infty}^{-}$ の値を下から評価するために力学系（X, σ_X）の不変測度を巧みに使うものである。これは他の場合の計算の対しても測度が何らかの役割を果たす可能性を示唆している。

申請者はさらに主論文 Proposition 4.1 で，上記の(2)の場合に $k(\lambda_S)_{\infty}^{-}=\log(2N-1)$ が成り立つことを示し，さらに参考文 1 で扱ったクラスの融合積群 Γ とその生成集合 S に対して $k(\lambda_S)_{\infty}^{-}$ が（Γ, S）の logarithmic volume と呼ばれる量と一致することを示した。この結果は，有限生成群とその生成集合に対してその Voiculescu 不変量がどういう意味を持つかという問題を，特定のクラスの群に対して解決した最初のものである。この種の結果がさらに広いクラスである双曲群対して成り立つかどうかは今後の興味深い課題である。

申請者の結果は，Voiculescu の深い洞察に対しそれが正しいことへの大きな裏づけを与えるものであり，記号力学系，離散群と作用素論の間のこれまで知られていなかった関係を明らかにするものである。以上のことから，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。