Lee－Yangの定理の一般化

東大教養物理　浅　野　太　郎

（3月29日受理）

〔1〕 Ising Model の状態和の複素 fugacity Plane に於ける零点が単位円上に限られるとゆう Lee－Yang の定理[1] は，Classical Spin 系には高々一つしか相転移が存在しない事を保証している点と，零点が一本の曲線上にのっており，二次元的な分布の可能性を排除している点に物理的意味がある。実在の多体系は多く固体，液体，気体の三相をもつが，格子気体模型は Lee－Yang 定理の故に高々二相の存在が許されるだけで，格子気体模型，あるいはそれにある種の極限操作をほどこした系についても，Lee Yang 定理がそれが至る所引力である限り任意の相互作用に関して成立つ定理であるだけに，現実の多体系との間に埋めがたい Gap がある事を感じさせる。第二の点については，最近多くの著者達によって，零点が単位円上に分布した系の相転移の熱力学的性質が調べられており，特に Suzuki[2] は，零点が二次元的分布をしている場合には，それが単一曲線上にのみ限られている場合と本質的な相違がある事を指摘している。Classical Spin 系の特性に関して，本質的な性質を与えている定理でありながら，我々の知る限り，それは Spin ½ に限られ，higher spin の場合への拡張は未だ行なわれていない様である。最近，Ono，Suzuki，Karaki，Kawabata[3] 等は計算機を用いて数値計算を行い，Lee－Yang の定数が Spin 1，3/2 の場合にも役立つらしい事を示した。我々は，ここに Spin が 1 の場合に関しては，Lee－Yang の解析的証明が素直に拡張出来る事を示す。

〔1〕 Spin 1 の Classical Spin 系の状態和 Z_n は

$$T_r \quad e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$\mathcal{H} = -\Sigma J_{ij}\,\mu_i\,\mu_j - \frac{1}{2} H \sum_{i=1}^{n} \mu_i \tag{2.1}$$

で与えられ

$$e^{-\Sigma K_{ij}} Z_n(\lambda) = \sum_{\mu=1,-1,0} e^{\Sigma K_{ij}}(\mu_i \mu_{j-1})\,\lambda^{\Sigma \mu_i}$$

$$\lambda = e^{\frac{1}{2}\beta H} \qquad K_{ij} = \beta J_{ij} \tag{2.2}$$

とかける。n－Spin 系について（A，B，C）を（1，2，…… n）の Permutation とし，

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ -1 & i \in B \\ 0 & i \in C \end{cases} \tag{2.3}$$

とすると，

$$e^{-\Sigma K_{ij}} Z_n = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} (r_1!\,r_2!\,r_3!)^{-1} \sum^{(\mathrm{Permutation})}$$

$$\times \prod_{i=1}^{r_1}\prod_{j=1}^{r_3} x(a_i, c_j) \prod_{i'=1}^{r_2}\prod_{j'=1}^{r_3} x(b_{i'}, c_{j'}) \prod_{j''>i''=1}^{r_3} x(c_{i''}, c_{j''})$$

$$\times \prod_{k=1}^{r_1}\prod_{k'=1}^{r_2} x^2(a_k, b_{k'})\,\lambda^{r_1 - r_2} \tag{2.4}$$

ここに

$$x(ij) \equiv e^{-K_{ij}}$$

で，

$$\begin{cases} 0 < x(ij) < 1 \\ x(ij) = x(ji) \end{cases} \tag{2.5}$$

を充す。ここで，$a_i \in A$，$b_i \in B$，$c_i \in C$

また，

$i \in C$ なら $\quad e^{K_{ij}(\mu_i \mu_j - 1)} = \left(e^{-K_{ij}}\right)$

四一一内高。

$$i,j \in \mathrm{A} \quad \text{なら} \qquad e^{K_{ij}(\mu_i\mu_j-1)} = 1$$

$$i \in \mathrm{A},\ j \in \mathrm{B} \quad \text{なら} \qquad e^{K_{ij}(\mu_i\mu_j-1)} = (e^{-K_{ij}})^2$$

が成立つ事を用いた。我々は Lee, Yang にならって次の函数 F_n を定義する。F_n は，各格子点 i に不均一な磁場 h_i がかかった時の状態和である。

$$F_n(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} (r_1!r_2!r_3!)^{-1} \sum^{\langle \mathrm{Perm} \rangle} \prod_{i=1}^{r_1} \prod_{j=1}^{r_3}$$

$$\times\, x(a_i c_j) \prod_{i'=1}^{r_2} \prod_{j'=1}^{r_3} x(b_{i'}, c_{j'}) \prod_{j''>i''=1}^{r_3} x(c_{i''}, c_{j''})$$

$$\times \prod_{k=1}^{r_1} \prod_{\ell=1}^{r_2} x^2(a_k, b_\ell) \prod_{k'=1}^{r_1} \Lambda_{a_{k'}} \prod_{\ell'=1}^{r_2} \Lambda_{b_{\ell'}} \tag{2.6}$$

$$F_n(\Lambda, \cdots \Lambda) = e^{-\Sigma K_{ij}} Z_n(\Lambda) \tag{2.7}$$

である事は明らかである。

〔2〕 古典 Spin 系の特性は次の漸下式につくされる。

（定理 1 ）
$$F_n(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = x_{12}x_{13}x_{14} \cdots\cdots x_{1n}$$

$$\times\,[\lambda_1 F_{n-1}(x_{12}^{-1}\lambda_2,\ x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots\cdots x_{1n}^{-1}\lambda_n)$$

$$+\,F_{n-1}(\lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n)$$

$$+\,\lambda_1^{-1} F_{n-1}(x_{12}\lambda_2,\ x_{13}\lambda_3 \cdots\cdots,\ x_{1n}\lambda_n)] \tag{2.8}$$

直観的に明らかだが，次の様に証明される。

$$F_n = f_1(\lambda_2 \cdots \lambda_n)\lambda_1 + f_3(\lambda_2 \cdots \lambda_n) + f_2(\lambda_2 \cdots \lambda_n)\lambda_1^{-1} \tag{2.9}$$

とかく。

(イ) $$f_1 = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} (r_1!r_2!r_3!)^{-1} \sum_{\substack{(1\in \mathrm{A}) \\ (a_i \neq 1)}}^{\mathrm{Perm}} \prod_{i=1}^{r_1} \prod_{j=1}^{r_3} x(a_i, c_j)$$

$$\times \prod_{i'=1}^{r_2}\prod_{j'=1}^{r_3} x(b_{i'},c_{j'}) \prod_{j''>i''=1}^{r_3} x(c_{i''},c_{j''}) \prod_{\substack{k=1\\(a_k\neq 1)}}^{r_1}\prod_{\ell=1}^{r_2} x^2(a_k,b_\ell)$$

$$\times \prod_{\substack{k'=1\\(a_{k'}\neq 1)}}^{r_1} x^{-1}(1,a_{k'})\,\Lambda_{a_{k'}} \prod_{\ell'=1}^{r_2}\left(x^{-1}(1,b_{\ell'})\,\Lambda_{b_{\ell'}}\right)^{-1}$$

$$\times \prod_{j=1}^{r_3} x(1,c_j)\prod_{k'=1}^{r_1} x(1,a_{k'})\prod_{\ell=1}^{r_2} x(1,b_\ell)$$

$$= x_{12}x_{13}\cdots x_{1n}\Big[\sum_{r_1'+r_2+r_3=n-1}(r_1'!\,r_2!\,r_3!)^{-1}\sum^{\mathrm{Perm}}\prod_{i=1}^{r_1'}\prod_{j=1}^{r_3}$$

$$\times\, x(a_i,c_j)\prod_{i'=1}^{r_2}\prod_{j'=1}^{r_3} x(b_{i'},c_{j'})\prod_{j''>i''=1}^{r_3} x(c_{i''},c_{j''})$$

$$\times \prod_{k=1}^{r_1'}\prod_{\ell=1}^{r_2} x^2(a_k,b_\ell)\prod_{k'=1}^{r_1'} x^{-1}(1\ a_{k'})\,\Lambda_{a_{k'}}$$

$$\times \prod_{\ell'=1}^{r_2}\left(x^{-1}(1,b_{\ell'})\,\Lambda_{b_{\ell'}}\right)^{-1}\Big]$$

$$= x_{12}\cdots x_{1n}F_{n-1}(x_{12}^{-1}\Lambda_2\cdots x_{1n}^{-1}\Lambda_n)$$

(ロ) 同様にして,

$$f_2 = \sum_{r_1+r_2+r_3=n}(r_1!\,r_2!\,r_3!)^{-1}\sum_{(1\in B)}^{\mathrm{Perm}} I\prod x(a_i,c_j)$$

$$\times \prod\prod_{(b_{i'}\neq 1)} x(b_{i'},c_{j'})\prod x(c_{i''},c_{j''})\prod\prod_{(b_\ell\neq 1)} x^2(a_k,b_\ell)$$

$$\times \prod x(a_k,1)\,\Lambda_{a_k}\prod x^{-1}(1,b_\ell)\,\Lambda^{-1}_{b_\ell}$$

$$\times \prod x(1,c_j)\prod x(1,b_\ell)\prod x(a_k,1)$$

$$= x_{12}\cdots\cdots x_{1n}F_{n-1}(x_{12}\Lambda_2\cdots x_{1n}\lambda_n)$$

(ハ)

$$f_3 = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} (r_1!\,r_2!\,r_3!)^{-1} \sum_{1 \epsilon C}^{\mathrm{Perm}} \prod_{(c_j \neq 1)} \prod x(a_i, c_j)$$

$$\times \prod_{(c_j' \neq 1)} \prod x(b_i', c_j') \prod_{(i'', j'' \neq 1)} \prod x(c_i'', c_j'')$$

$$\times \prod \prod x^2(a_k, b_\ell) \prod \Lambda_{a,k} \prod \Lambda^{-1}_{b_\ell}$$

$$\times \prod x(a_i, 1) \prod x(b_i', 1) \prod x(1, c_j'')$$

$$= x_{12} \cdots x_{1n} F_{n-1}(\Lambda_2 \cdots \Lambda_n)$$

（定理１の証終）

〔3〕 求める定理を証明する為には，Lee－Yang の補助定理[1)]が Spin 1 の場合にも成立つ事を示せば良い。即ち，

（定理２） $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ が

$$F_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = 0 \tag{3.1}$$

を充し，また

$$|\lambda_k| \geqq 1 \quad (k=1, 2, \cdots n) \tag{3.2}$$

ならば，

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n| \tag{3.3}$$

である。

数学的帰納法で証明する。$n=1$ の時

$$F_1(\lambda) = \lambda + 1 + \lambda^{-1} \tag{3.4}$$

だから定理の成立は自明である。$n=2$ の時も（定理２）は成立する事は Appendix に示す。ここで次の仮説＜Ｈ１＞，＜Ｈ２＞をおき，＜Ｈ２＞

が自己矛盾に導く事を証明する。

＜Ｈ１＞　$n-2$ 及び $n-1$ については（定理２）が成立する。

＜Ｈ２＞　$$F_n(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0 \tag{3.5}$$

を充し，$|\lambda_1| > 1$，$|\lambda_2| \geqq 1 \cdots |\lambda_n| \geqq 1$ である様な $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ が存在する。

（定理１）を用いれば，$(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)$ が（3.5）を充す時には，

$$\lambda_2 F_{n-1}(x_{12}^{-1}\lambda_1, x_{23}^{-1}\lambda_3 \cdots x_{2n}^{-1}\lambda_n) + F_{n-1}(\lambda_1, \lambda_3 \cdots)$$
$$+ \lambda_2^{-1} F_{n-1}(x_{12}\lambda_1, x_{23}\lambda_3 \cdots x_{2n}\lambda_n) = 0 \tag{3.6}$$

が成りたつ。λ_2 について解けば，

$$\lambda_2 = \frac{-F_{n-1}(\lambda_1, \lambda_3 \cdots) \pm \sqrt{F_{n+1}^2(\lambda_1, \lambda_3 \cdots) - 4F_{n-1}(x_{12}^{-1}\lambda_1)F_{n-1}(x_{12}\lambda_2)}}{2F_{n-1}(x_{12}^{-1}\lambda_1, x_{23}^{-1}\lambda_3 \cdots)} \tag{3.7}$$

（3.7）にもう一度（定理１）を適用すれば，

$$\lambda_2 = \frac{-\lambda_1 F_{n-2}(x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots) \pm \lambda_1\sqrt{E + \varepsilon}}{2\, x_{12}^{-1}\lambda_1 F_{n-2}(x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots) + \varepsilon} \tag{3.8}$$

ここにＥは，

$$E = F_{n-2}^2(x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots) - 4F_{n-2}(x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots)$$
$$\times F_{n-2}(x_{23}x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots)$$

また，

$$\lim_{|\lambda_1| \to \infty} \varepsilon / \lambda_1 = 0 \tag{3.9}$$

函数と見なすとすれば，$|\lambda_1| \to \infty$ の時，λ_2 は極限値 ρ_2 に達するだろう。この時 $|\rho_2| < 1$ である。何故なら（3.8）の分母の λ_1 の係数は，$x_{13}^{-1}x_{23}^{-1}|\lambda_3| > 1 \cdots$ であるので，＜Ｈ１＞の故に零にはなり得ない。

そこで，ρ_2 は次式を充す事になる。

$$\rho_2 = \frac{-F_{n-2}(x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots) \pm \sqrt{E}}{2x_{12}^{-1}F_{n-2}(x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots)} \tag{3.10}$$

(3.10) を書き直せば，

$$x_{12}^{-1}\rho_2 F_{n-2}(x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots)[x_{12}^{-1}\rho_2 F_{n-2}(x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}\lambda_3) + F_{n-2}(x_{13}^{-1}\lambda_3) + x_{12}\rho_2^{-1}F_{n-2}(x_{23}x_{13}^{-1}\lambda_3)] = 0 \tag{3.11}$$

これに（定理１）を用いれば，

$$x_{12}^{-1}\rho_2 F_{n-2}(x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots) F_{n-1}(x_{12}^{-1}\rho_2, x_{13}^{-1}\lambda_3 \cdots) = 0 \tag{3.12}$$

＜Ｈ１＞を考えれば，$x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}|\lambda_3| > 1$,

$x_{13}^{-1}|\lambda_3| > 1 \cdots x_{1n}^{-1}| > |$ だから，

$x_{12}^{-1}|\rho_2| \leqq |$ でなければならぬ。これから，

$$|\rho_2| < x_{12} < 1 \tag{3.13}$$

が得られる。以下 Lee－Yang と全く同じ道をたどる事が出来る。即ち，λ_3, $\lambda_4 \cdots \lambda_n$ で固定しておいて $|\lambda_1|$ を増やしてゆくと，$|\lambda_2|$ は，１より大きい値から出発して，＜Ｈ２＞ $|\lambda_1| \to \infty$ では１より小さい値に収束する。

この間 (3.7) の分母は＜Ｈ１＞によって零にならない事が保証されているから，$|\lambda_2|$ は連続的に変化する。従って，途中どこかで $|\lambda_2| = 1$ になる。即ち，λ_1', λ_2', $\lambda_3 \cdots \lambda_n$ が存在して，

$$F_n(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3 \cdots \lambda_n) = 0 \tag{3.14}$$

を充し，かつまた

$$|\lambda_1'| > 1, \quad |\lambda_2'| = 1 \quad |\lambda_3| \geqq 1 \cdots |\lambda_n| \geqq 1 \tag{3.15}$$

である。今度は $\lambda_2', \lambda_4 \cdots \lambda_n$ を固定しておいて，λ_3 を λ_1 の函数と見なして同じ操作を行えば，$|\lambda_3| = 1$ に出来る。このやり方をくり返して終には，次の性質を充す $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ が存在する事になる。

$$F_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = 0 \tag{3.16}$$

$$|\lambda_1| > 1 \tag{3.17}$$

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \cdots\cdots = |\lambda_n| = 1 \tag{3.18}$$

〔4〕 (3.16) (3.17) (3.18) を充す $\{\lambda_k\}$ が存在しない事を示せば証明は終る。まず次の補助定理から始めよう。

（定理3） $r > 1$ と実数の $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$ が

$$F_n(r\, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n}) = 0 \tag{4.1}$$

を充すなら，次の不等式が成りたつ。

$$\left| \frac{F_{n-1}(e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n})}{F_{n-1}(x_{12}^{-1} e^{i\theta_2}, \cdots x_{1n}^{-1} e^{i\theta_n})} \right| > 2 \tag{4.2}$$

（証明） (4.1) を r に関して解いて，

$$r\, e^{i\theta_1} F_{n-1}(x_{12}^{-1} e^{i\theta_2}, \cdots x_{1n}^{-1} e^{i\theta_n}) + F_{n-1}(e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n})$$

$$+ r^{-1} e^{-i\theta} F_{n-1}(x_{12} e^{i\theta_2}, \cdots x_{1n} e^{i\theta_n}) = 0 \tag{4.3}$$

$F_m(\lambda_1 \cdots \lambda_m)$ が次の二つの性質をもつ事は明きらかである。

$$F_m(\lambda_1, \cdots \lambda_m) = F_m(\lambda_1^{-1}, \cdots \lambda_m^{-1}) \tag{4.4}$$

$$F_m^{*}(\lambda_1, \cdots \lambda_m) = F_m(\lambda_1^{*} \cdots \lambda_m^{*}) \tag{4.5}$$

この二式から

$$F^{*}_{n-1}(x_{12}^{-1}e^{i\theta_2}, \cdots x_{1n}^{-1}e^{i\theta_n}) = F_{n-1}(x_{12}e^{i\theta_2}, x_n e^{i\theta_n}) \tag{4.6}$$

が成りたち，また，$F_n(e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n})$ は実数である事が分かる。これを用いれば（4.3）は次の様に書き直せる。

$$Z^2 + \frac{F_{n-1}(e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n})}{|F_{n-1}(x_{12}^{-1}e^{i\theta_2})|} Z + 1 = 0 \tag{4.4}$$

ここに

$$Z = r \exp\left[i\theta_1 + i \arg F_{n-1}(x_{12}^{-1}e^{i\theta_2}) \right] \tag{4.5}$$

とおいた。この二根を α，β とすると，

$$\alpha = \beta^{-1} \tag{4.6}$$

また，$\beta = \alpha^{*}$ または，$\beta = \beta^{*}$ の何れかが成りたつ。もし $\beta = \beta^{*} > 1$ ならば，（4.4）は実根をもたねばならぬが，その実根条件は，不等式（4.2）である。また，$\beta = \alpha^{*}$ ならば，（4.6）より

$$|\alpha| = |\beta| = 1$$

となってしまい $r > 1$，即ち，$|z| > 1$ と矛盾する。

（証　終）

以上の準備をしておいて，最後の定理の証明を行う。

（定理４）　$F_m(\lambda_1, \cdots \lambda_m)$ が（定理２）を充すならば，次の不等式が成りたつ。

$$|F_m(t_1 e^{i\theta_1}, \cdots t_m e^{i\theta_m})| \geqq |F_m(e^{i\theta_1}, \cdots e^{i\theta_m})| \tag{4.7}$$

ここに $t_1, t_2, \cdots t_m$ は　$t_k \geqq 1$ を充す任意の実数であり，$\theta_1, \cdots \theta_m$ は

実数である。

（証明）

$t_2, t_3, \cdots t_m \geqq 1$ と $\theta_1 \cdots \theta_m$ を固定しておいて，$F_m(\lambda_1, t_2e^{i\theta_2}, \cdots t_m e^{i\theta_m})$ を λ_1 の函数と考える。この時，（定理１）から，$\lambda_1 F_m$ は λ_1 の二次函数であり，また，$t_2 \geqq 1$，$t_3 \geqq 1$，$\cdots$ $t_m \geqq 1$ である事，F_m は（定理２）に従う事を考えれば，その二根は共に単位円の内部になければならぬ。即ち，$F_m(\lambda_1)$ は次の形をしている。

$$F_m(\lambda_1) = A(\lambda_1 - a e^{i\phi_1})(\lambda_1 - b e^{i\phi_2}) / \lambda_1 \qquad (4.8)$$

ここに A，a，b，ϕ_1，ϕ_2 は $t_2 \cdots t_m$，$\theta_1 \cdots \theta_m$ の函数であって λ_1 を含まない。また，$0 < a \leqq 1$，$0 < b \leqq 1$ である。(4.8) について次の不等式が成り立つ事は容易に分かる。

$$|F_m(t_1 e^{i\theta_1})| \geqq |F_m(e^{i\theta_1})| \qquad (4.9)$$

実際，(4.8) から

$$|F_m(t_1 e^{i\theta_1})| / |A| = \left|\sqrt{t_1} - \frac{a}{\sqrt{t_1}} e^{i\phi}\right| \times \left|\sqrt{t_1} - \frac{b}{\sqrt{t_1}} e^{i\phi'}\right| \qquad (4.10)$$

一方，$t_1 \geqq 1$，$1 \geqq a > 0$ であれば，

$$\left|\sqrt{t_1} - \frac{a}{\sqrt{t_1}} e^{i\phi}\right|^2 = t_1 + \frac{a^2}{t_1} - 2a \cos\phi$$

$$\geqq 1 + a^2 - 2a\cos\phi = |1 - a e^{i\phi}|^2 \qquad (4.11)$$

なので，

$$|F_m(t_1 e^{i\theta_1}, t_2 e^{i\theta_2})| \geqq |F_m(e^{i\theta_1}, t_2 e^{i\theta_2}, \cdots t_m e^{i\theta_m})| \qquad (4.12)$$

が成りたつ。この操作をくり返せば，

$$|F_m(t_1 e^{i\theta_1}, \cdots t_m e^{i\theta_m})| \geqq |F_m(e^{i\theta_1}, \cdots e^{i\theta_m})| \quad (4.13)$$

が成立。（証　終）

さて，＜Ｈ１＞によれば，$m = n-1$ の時には，F_m は（定理２）を充たさねばならない。従って（定理４）によって不等式（4.8）が成り立つ。ところが（定理３）によれば，この時は，（4.2）が充たされず，（3.16）（3.17）（3.18）を充たす（$\lambda_1 \cdots \lambda_n$）は存在しない。こうして，始めの仮説＜Ｈ１＞＜Ｈ２＞は自己矛盾を含む事が分った。即ち，（定理２）の成立が証明されたのである。

〔5〕　この証明のやり方から分る様に，Ising　model の状態和の解析的性質を最も強く規定しているのは（定理１）で表わされる漸下式である。この漸下式は更に一般の場合にもその拡張形が存在し，それから任意の Spin に関する Lee－Yang の定理が証明されうるのではないかと思われる。しかし，ここに記した方法では，おそらく Spin $\frac{3}{2}$ くらいが限度であると思われ，また例え，Spin $\frac{3}{2}$，2，$\frac{5}{2}$ と次々に証明してゆけたとしても任意 Spin に関する証明を得る事は不可能である。この為には，これらの漸下式の系列がもっている性質に対する更に深い理解が必要であろう。我々はとりあえず，次には Spin $\frac{3}{2}$ の場合を調べたいと思っている。

全ての面について貴重な御助力を給わった金沢先生に感謝します。更にこの様な問題が存在する事を指摘され，貴重なヒントを与えて下さった小野先生，鈴木先生，川端先生及び唐木氏に感謝します。

（Appendix）　$n = 2$ の場合，

$$\lambda_1\lambda_2 F_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2^2(\lambda_1^2 + x\lambda_1 + x^2) + x\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1)$$

$$+ x^2\lambda_1^2 + x\lambda_1 + 1 \equiv f(\lambda_2) \quad (A,1)$$

$|\lambda_1| \geqq 1$ の時 $f(\lambda_2)$ の根が共に単位円の内側にある事を示す。代数学でよくしられた次の定理[4]を利用する。

（定理　A 1）　多項式 $f(x)$，$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

の根が全て単位円内にある為の必要十分な条件は，次に定義する Bézout の行列Bが定正値である事がある。

$$B=\begin{bmatrix} b_{1n} & \cdots & b_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{nn} & \cdots & b_{n1} \end{bmatrix} \qquad (A,2)$$

行列要素 b_{ij} は，次式で定義される。

$$(a_0x^n+\cdots+a_n)(a_n^*y^n+\cdots+a_0^*)-(a_0y^n+\cdots+a_n)$$
$$\times(a_n^*x^n+\cdots+a_0^*)=(x-y)\Sigma b_{n-i,n-j}x^iy^j \qquad (A,3)$$

我々の場合 b_{ij} は次式で与えられる。

$$b_{12}=b_{21}=(1-x^2)(r^2-1)[(1+x^2)(r^2+1)+2xr\cos\theta] \qquad (A,4)$$

$$b_{11}=b_{22}^*=x(1-x)(r^2-1)[(1+x)(r^2+1)+(e^{i\theta}+xe^{-i\theta})r] \qquad (A,5)$$

ここに，$\lambda_1\equiv re^{i\theta}$，$x\equiv x_{12}$

また，$r\geqq 1$，$1>x>0$　である。

対角要素 b_{12} が常に正である事は明らかである。のみならず我々は，det B も，また，正である事を証明する事が出来る。

det B は次の様に書ける。

$$\det B/r^2(1-x)^2(r^2-1)^2x^3=(u+2)(u^2-1)\omega^2$$
$$+2(u+2)(2u-1)\cos\theta\,\omega+4(u+1)\cos^2\theta-(u-2) \qquad (A,6)$$

ここに，

$$u \equiv x + x^{-1} > 2 \qquad \omega \equiv r + r^{-1} > 2 \qquad (A,7)$$

(A,6) は，ω の函数として，

$$\omega = -(2u-1)\cos\theta\,(u^2-1)^{-1}$$

を頂点とする放物線だが，$u > 2$，では，これは２を超えない。

従って (A,6) は $\omega = 2$ で最小になる。結局，次の不等式を証明すればよい。

$$4(u+1)\cos^2\theta + 4(u+2)(2u-1)\cos\theta$$

$$+\ 4(u+2)(u^2-1) - (u-2) > 0 \qquad (A,8)$$

(A,8) の左辺は，$\cos\theta$ の二次式だからその判別式 D を調べると，

$$D = -16(2u+5)(u-2) < 0 \qquad (u > 2)$$

だから，(A,8) は常に成り立つ。エルミート行列が正値である為の必要十分条件は，その全ての主座行列式が正である事だから，証明は終った。

(References)

1. T.D.Lee and C.N.Yang: P.R. 87 410 (1952)
2. M.Suzuki : Prog. Theor. Phys. 38 1243 (1967)
3. S.Ono, M.Suzuki, C.Kawabata and Y.Karaki : Private Communication
4. 高木貞治：代数学講議 461 (1946) 共立出版，神田，東京