

Two-dimensional distribution of zeros of the partition function in the complex field plane

鈴木 増 雄 (東大物性研)

§ 1 Introduction

状態和の零点分布を複素温度平面で考えた場合¹⁾と全く同様に, complex field plane でも, 二次元的な零点分布を考えることが出来る。強磁性体の場合には, 一般に, 零点は fugacity plane の単位円周上にあつて, ^{2~5)} 一次元分布をしているようであるから, ここでは, 強誘電体のモデルを念頭に置いて, 議論することにする。

今, electric (or magnetic) field を E (一つの成分のみに着目する), dipole moment (or Bohr magneton) を d とし, パラメータ

$$\omega = e^{2Ed/kT} \quad \text{----- (1)}$$

を用いると, 多くの場合, 状態和は, その零点 $\{\omega_k\}$ によって,

$$\mathcal{E}_N(\omega, Z) = \mathcal{E}_N(0, Z) \prod_k (1 - \omega/\omega_k) \quad \text{----- (2)}$$

と表わされる。但し, ここに, Z は, 温度を表わす適当なパラメータである ($Z = Z(T)$)。従つて, 自由エネルギーは,

$$\begin{aligned} F(\omega, Z) &= -KT \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{E}_N(\omega, Z) \\ &= F(0, z) - kT \iint \log \left(1 - \frac{w}{u+iv}\right) g_E(u, v) du dv \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

となる。 $g_E(u, v)$ は, w -plane での零点分布関数を表わす。これは, 明らかに, 次の性質を充たす:

$$g_E(u, -v) = g_E(u, v) \quad \text{----- (4)}$$

依つて,

$$F(w, z) - F(0, z) = -\frac{kT}{2} \iint \log \left[\frac{(w-u)^2 + v^2}{u^2 + v^2} \right] g_E(u, v) du dv \quad (5)$$

と書ける。

polarizability や比熱の異常性を議論するには、正の実軸近傍の零点分布の様子だけかわかればよい。以下では、計算を容易にするために、中心対称な分布を扱うことにする。これは、正の実軸近傍で、二次元的分布をしている場合の典型的な例になる。KDPモデルでは、katsuraの有限格子の数値計算によると、この傾向を示している。そこで、

$$g_E(u, v) = g_E(r) \quad (6)$$

とおくと、自由エネルギーは、

$$F(w, z) - F(0, z) = -\frac{kT}{2} \iint \log \left[\frac{w^2 + r^2 - 2wr \cos \varphi}{r^2} \right] g_E(r) r dr d\varphi \quad (7)$$

となる。polarizationは、

$$P = -\frac{\partial F}{\partial E} = 4\pi d \int_0^\infty g_E(r) r dr \quad (8)$$

によって与えられる。故に、polarizabilityは、

$$\chi = \frac{dP}{dE} = \frac{d^2}{kT} \cdot 2\pi \omega(E) \int_0^\infty g_E(r) r dr \quad (9)$$

となり、零点分布関数そのものものによって表わされ、分布関数の発散が、そのまま、polarizabilityの発散となって現われる。これらは、複素温度平面での比熱の異常性の議論と全く同様な事情になる。

§ 2 An Example of the modified KDP model in the presence of electric field

Wu は、Slater の KDP model に、一つ制限をつけ加え、(1, 1)方向の分極は禁止されるという条件の下に、電場 $\mathbf{E} = (E, 0)$ の存在する時は、

自由エネルギーが、次式で与えられることを厳密に示した（モデルの詳細については、原著論文⁶⁾ 並びに、物性研究 Vol. 9 No. 2. B8 参照。もっと一般の E についても解いている）；

$$\log \Xi = \frac{N}{8\pi^2} \int d\theta \int d\varphi \log f(\theta, \varphi, \omega, z) d\theta d\varphi - \frac{N(\varepsilon + Ed)}{kT} \quad (10)$$

但し、

$$f(\theta, \varphi, w, z) = |we^{i\theta} + ze^{i\varphi} + 1|^2 \quad (11)$$

依って、零点は、

$$we^{i\theta} + ze^{i\varphi} + 1 = 0 \quad (12)$$

に与えられる。

さて、 $w = u + iv$, $z = x + iy$ とおいて、 (x, y, u, v) の四次元空間（複素外場，複素温度）で考えると、 θ, φ を固定した時、零点は、四次元空間の超平面になっている。 θ, φ を動かすと、零点集合は、四次元空間の subspace をなしており、

(i) $y = 0$ の三次元空間への射影 或いは切口が、普通に扱っている complex field plane での零点分布であり、

(ii) $v = 0$ の切口が、複素温度平面での零点分布 $g_T(u, Z)$ になる。

今のモデルでは、(12) から、わかるように、 w -plane と z -plane は全く、対称的になっており、分布関数は、

$$\begin{aligned} g_E(w; z) &= \frac{2}{8\pi^2} \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(u, v)} = g_E(r = |w|; z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (1-z)^2}} \frac{1}{\sqrt{(z+1)^2 - r^2}}, \quad (13) \end{aligned}$$

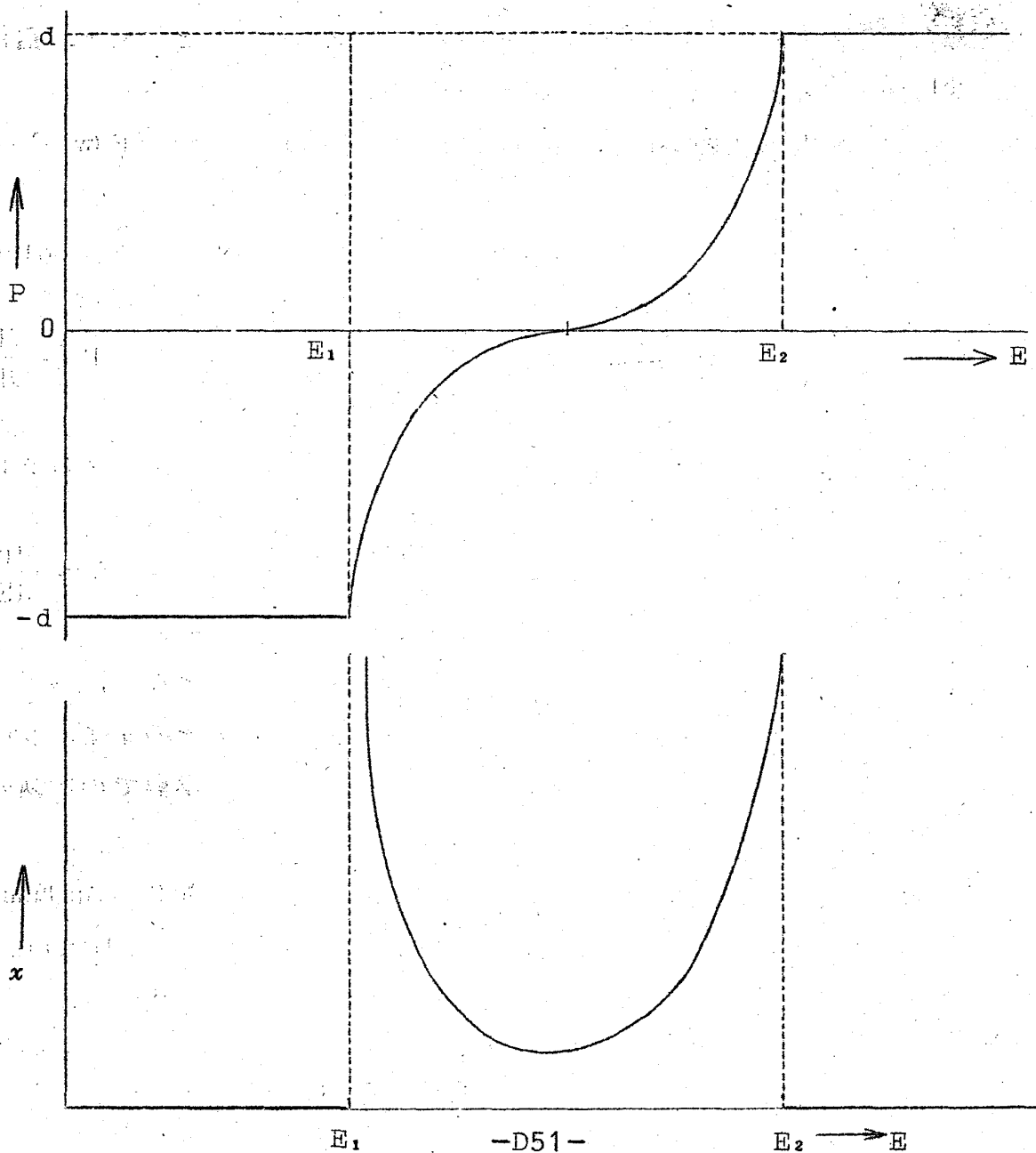
$$g_T(z; w) = g_E(z; w) \quad (14)$$

となる。これから、直ちに、polarizability の異常性は、比熱の異常性と全く同じになり、

$$\begin{cases} \chi_0 \sim C_V \sim (T - T_c)^{-1/2} & \text{for } T > T_c, \\ \chi_0 = C_V = 0 & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (15)$$

となる。

注意すべきことは、(13)の分布関数は、二つの singular points を持っており、それに対応して、polarizability χ は、温度を $T_c (= \varepsilon / k \log 2)$ 以下に固定して、電場を強くして行くと、図のように二ヶ所で発散する。即ち、転移点が二つ存在する。一つは、 $(-1, -1)$ 方向への完全分極であり、もう一つは、電場の強さか、異方的な coupling energy に打ち勝って、 $(1, 1)$ 方向への完全分極を起す点になっている。



§ 3 Discussions

前節では、KDPモデルの解を利用して、一つの例について、複素温度・電場の空間での零点分布と比熱・分極率の異常性との関係を議論をしたのであるが、もっと一般の場合にも、四次元空間の零点分布の解析性によって、物理量の異常性が説明されると思われる。

References

- 1) M.Suzuki, Prog.Theor.Phys. 38 (1967) 1243.
- 2) T.D.Lee and C.N.Yang, Phys. Rev. 87 (1952), 410.
- 3) S.Katsura, Phys.Rev. 127 (1962) 1508.
- 4) M.Suzuki, prog. Theor. Phys. 38 (1967) 1225.
- 5) M.Suzuki and C. Kawabata, (to be published).
- 6) F.Y.Wu, Phys Rev.Letters 18 (1967) 605; and preprint.