動的臨界現象と連分数展開

森　　　肇（九大理）

動的臨界現象においても，①長波長の臨界揺動がmost dominant partとしてcritical behavior をきめるか，②そのmost dominant partの漸近的性質，③その漸近的性質か実際に有効な領域，を明らかにすることが問題である。①の問題のポイントを端的にみるには磁性体におけるNMRの線巾の異常増大の機構を思い出せばよい。NMRの線巾は１個の電子スピン $\delta S_i \equiv S_i - \langle S_i \rangle$ の自己相関関数の時間積分に比例する；

$$\Delta\omega \sim \int_0^\infty \langle \delta S_i(t)\, \delta S_i^o \rangle dt \sim \sum_q \frac{\langle S_q^o\ S_{-q}^o \rangle}{\gamma_q^o} \quad (1)$$

ここに S_q^o は波動ベクトルqのフーリエ成分であり，superscript O はZ成分を表わす。γ_q^o はその減衰常数である。臨界点の近傍ではスピンの対相関関数は波数qの小さい所で異常に大きくなり

$$\langle S_q^o\ S_{-q}^o \rangle \sim \kappa^{-2+\eta}\, Q(q/\kappa) \quad (2)$$

とおける。減衰常数 γ_q^o はqが小さいとき

$$\gamma_q^o \sim \kappa^\theta g(q/\kappa) \quad (3)$$

に従ってcritical slowing-downをおこす。従って(1)のq和は波数の小さな項だけで近似でき，

$$\Delta\omega \sim \kappa^{-(\theta-1+\eta)} \quad (4)$$

がえられる。(1)のq和において時間因子 $1/\gamma_q$ かなければこの和は $\kappa \to o$ においても発散しない。$1/\gamma_q^o$ がqの小さい所で異常に大きくなるために，この和は発散するのである。つまり，波数が小さいときにおこるcritical & kinematical slowing-downのために，(1)の和は波数の小さな項―臨界揺動―によってきまることになる。

このように，critical & kinematical slowing-down という時間放果のために，長波長の臨界揺動がmost dominant partとしてcritical behaviorをきめるということは動的臨界現象のかなり一般的な性質である。このような放果を的確に表現するものとして一般化された連分数展開を採用し，ハイゼンブルグ模型におけるorder parameterのダイナックスおよび緩和o輸送現象の異常を論じた。

磁性体における線型レスポンスは，スピン演算子の緩和関数

$$\Xi_k^{\alpha}(t) = (S_k^{\alpha}(t),\ S_k^{\alpha *}) / (S_k^{\alpha},\ S_k^{\alpha *}) \quad \text{------------(5)}$$

によって表現できる。ここに $\alpha = 0,\ \pm$ である。このラプラス変換は

$$\Xi_k^{\alpha}(Z) = \frac{1}{Z - i\omega_k + \varphi_k(Z)}, \quad \text{------------(6)}$$

$$= \cfrac{1}{Z - i\omega_k^{(0)} + \sum\limits_{q}\sum\limits_{q'} \cfrac{M^{(1)}(q,\ q';\ k)}{Z - i\omega_{qq'}^{(1)k} + \sum\limits_{\gamma}\sum\limits_{\gamma'} \cfrac{M^{(2)}(\gamma,\ \gamma';\ q,\ q';\ k)}{Z - i\omega_{\gamma\gamma'}^{(2)kqq'} + \cdots}}} \quad \text{------------(7)}$$

と一般化された連分数の型にかける。係数ωおよびMはすべてスピンの静的相関関数によってきまる。この連分数の各和においてmost dominantpartはk，κおよび$|Z|$が非常に小さいとき，小さな波数の項によってきまることが示せる。従って，(7)の各和の計算において，含まれている波数はすべて小さいとしてよい。かくて係数ωおよびMに含まれているスピンの静的相関関数に対してstatic scaling law を使って，振動数ωはすべて

$$\omega^{(\eta)} = \kappa^{\lambda} g^{(\eta)}(q\eta/\eta,\ \cdots,\ q'_1/\kappa.\ k/\kappa), \quad \text{------------(8)}$$

$$\lambda = (d + 2 - \eta)/2, \quad \text{------------(9)}$$

の形をもち，分子Mはすべて

$$M^{(\eta)} = (N\kappa^{d})^{-2}\kappa^{2\theta}\,[f'_1 + \delta_{q\eta,\ q'\eta}(N\kappa^{d})\,f'_2, \quad \text{------(10)}$$

$$\theta = (d + 2\eta)/2 \quad \text{------------(11)}$$

の形をもつことか示せる。ここに d は次元数であり，Nはスピンの総数である。

臨界点Tcの上では磁場がないとき振動数ωはすべて0となり，連分数展開(7)は

$$\Xi_{k}^{\alpha}(Z)=\cfrac{1}{Z+\kappa^{2\theta}\iint\cfrac{m^{(1)}(\tilde{q},\tilde{q}';\,k/\kappa)\,d\tilde{q}\,d\tilde{q}'}{Z+\kappa^{2\theta}\iint\cfrac{m^{(2)}(\tilde{\gamma},\tilde{\gamma}';\,\tilde{q},\tilde{q}';\,k/\kappa)\,d\tilde{\gamma}\,d\tilde{\gamma}'}{Z+}}}\quad\text{------- (12)}$$

$$=\frac{1}{\kappa^{\theta}}F\left(Z/\kappa^{\theta},\ k/\kappa\right)\quad\text{------- (13)}$$

とかける。ここにF（X，Y）はk，κ，Zを含まないある関数である。ラプラス逆変換を行えば

$$\Xi_{k}^{\alpha}(t)=G\left(t\kappa^{\theta},\ k/\kappa\right)\quad\text{------- (14)}$$

かえられる。スピンの集団運動は Ξ_{k}^{α}（Z）の極できまるか，その複素振動数は

$$Z_{k}=\kappa^{\theta}\,g\,(k/\kappa)\quad\text{------- (15)}$$

を形をもたねばならないことかわかる。(3)は(15)の特別な場合に当る。(14)および(15)は dynamic scaling laws か成立つことを示している。

転移点の下でも，$\eta=0$のときには$\lambda=\theta$となり(14)および(15)か成立つことかわかる。しかし，$\eta\neq0$のときには，このような scaling laws は成立しない。$k\ll\kappa$では，縦成分の減衰常数は

$$\gamma_{k}^{o}\sim k^{2\eta}\ (1+\kappa)/2\quad\text{------- (16)}$$

となり，構成分では振動数

$$\omega_{k}\sim k^{2\kappa}\ (1-\eta)/2\quad\text{------- (17)}$$

をもった鋭いスピン波か存在することとなる。

ESRを論ずるときにはスピンを保存しない相互作用か存在する。一軸性異方性を考え，その常数をDとすれば，それか小さいときには，(14)を拡張し

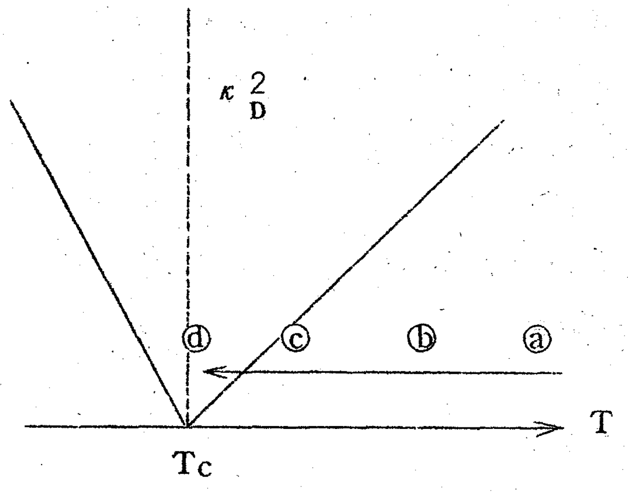
た形

$$\Xi^{\alpha}_{k}(t) = G(t\kappa^{\theta},\ k/\kappa,\ \kappa_D/\kappa) \quad \text{---------} \quad (18)$$

か成立つ。ここにκ_D は$\sqrt{D}$ に比例した波数の次元をもつ常数であり，また磁場を無視した。波数κが 0 のときには

$$\Xi^{+}(t) = G(t\kappa^{\theta},\ \kappa_D/\kappa) \quad \text{---------} \quad (19)$$

となり，これに基ずいてＥＳＲの巾の温度変化を論ずることかできる。いま下図のように高温側からTc に近ずくときを考える。ⓐは十分高温でトルクの運動は短波長の熱運動できまり，exchange narrowing のために巾は小さく $\Delta\omega \sim D^2/J$ の程度である。Tc に近ずくとき，強磁性体の場合，critical slowing-down のため巾はますます狭くなり，その温度変化はまず$\Delta\omega \sim \kappa^{2}$でふえられる。さらに近ずいて，トルクの運動も臨界揺動できまるとき，図のⓑでは，



$$\Delta\omega \sim \kappa_D^{2}\,\kappa^{1/2} \quad \text{(weak narrowing)} \quad \text{---------} \quad (20)$$

となる。ただしこのとき line shape はLorentzian でなくなり，多分gaußian となる。ⓒのところでは，このnarrowing は完全にとまり

$$\Delta\omega \sim \kappa_D^{4}\,\kappa^{-3/2} \quad \text{---------} \quad (21)$$

に従って巾は大きくなる傾向をもつ。しかしTc の直上，ⓓでは，このbroadening もとまり

$$\Xi^{+}(t) = G(t\kappa_D^{\theta}) \quad \text{---------} \quad (22)$$

となる。この関数Gは未だ求まっていないか，岡本さんの所で論議されるように，line shape か構造をもつようになると考えられる。

反強磁性体の場合には critical narrowing はおこらない。それは一様な磁化か臨界変数でないことによる。トルクの critical slowing-down のために exckange narrowingかきかなくなり，巾は広かる一方で critical regime ⓓに到達する。ⓐのところでは$\Delta\omega \sim \kappa^{-2}$に従って，ⓑのところ

では$\triangle\omega \sim \kappa_D^6 \kappa^{-q/2}$に従って巾は広かり，ⓒおよびⓓでは (22) のようになる。

磁性体の場合にはdynalic scaling laws の意味と有効性の限界かはっきりしたといってよい。従って，緩和・輸送現象の異常性を具体的に議論できる段階に達した。上記ではESRについて定性的な話をしたわけであるか，定量的な話もある程度できる筈である。

臨界気体，臨界溶液，液体ヘリウムについての理論的研究か必要である。上述のようにorder paramerer のダイナミックスおよび異常輸送現象を論ずるとき，臨界揺動によるmost dominant partを正しくとり出すことか最も重要であるか，モーメント法ではcritical & Kinematical slowing-down のような時間効果を正しくとり入れることかできないので，ここでは一般化された連分数展開法を提案したわけである。われわれのグループはこの方法による組織的な研究を計画している。