

The Spin Fluctuation and the Conservation Law in Itinerant Ferromagnetism

東大教養 伊豆山 健夫

スピン系の dynamics については, Ising Model とか Heisenberg Model の場合には, 数値実験を含め, かなり研究が進んでいるが, 伝導電子系の spin dynamics については — 例えば遷移金属の磁性を担う d 電子が伝導電子であって格子点に localize してはいないにもかかわらず — その研究が非常に進んでいるとは云い難く, 多くの unsolved problems が残されている。そこでここでは伝導電子系, 又はもう少し問題を specific にして, Fermi 流体 (但し結晶中) の Spin Dynamics を問題にする。RPA は多電子系の Spin Fluctuation について線型化された近似であって, その答えは良く知られているが, Spin Fluctuation の非線型効果 (Mode 間 coupling) は亦多くの興味ある現象をひき起す。強いマイクロ波の Ferromagnetic Resonance の飽和や parametric amplification 等も亦非線型効果ではあるが, これは多体問題的興味が余り感じられないので省略。また, 強磁性基底状態から, 沢山のスピンをひっくり返す事によって作られた励起状態が Spontaneous emission of coherent radiation を行い得るか, 即ち Super-radiant になり得るか, と云った問題も現実性が少いので省略。そこでありきたりの問題に絞ると, Spin Fluctuation の non-linear phenomena は;

- 1) 低温では Spin 波スペクトルの温度変化がどうなるか, 自発磁化の温度変化がどうなるか。スペクトルの巾がどうなるか。
- 2) T_c 近傍では Critical Spin Fluctuation のスペクトルがどうなるか。
- 3) $T > T_c$ で波数 q が比較的大きい Spin Density Wave に現われる振動性 (Sloppy Spin Wave) についてその振動数及び巾がどうなるか。
- 4) もっと q を小さくして行ったときに Spin Dynamics は果して拡散型になるだろうか? T_c の低い金属でも? $T \rightarrow T_c$ で Hydrodynamics は

伊豆山健夫

どの様に乱されるか？。

等々の問題に最も端的に現われている。そして特にフェルミ流体中の Spin Dynamics が Localized Spin 系に於るそれとどの様に違った振舞を示すかに興味がそそがれる。

さて fluctuation に関する non-linear coupling を (explicit にしろ implicit にしろ) 考慮する場合、我々が先ず直面する問題は保存則の問題である。勿論、与えられたハミルトニアンの下で多電子系の運動方程式が正確に解けるものなら、保存則も自動的に充されている訳であるが、相互作用のあるフェルミ流体の運動方程式等、どんな場合にも正確に解けた試しはない。そこで採用する近似は保存則だけは充す様にしておきたいと云う事である。保存則を破っている近似の下では、多くの場合、Spin Fluctuation を入手する事になる。例えば強磁性フェルミ流体中の Spin 波の振動数が波数 q の二乗に比例しなくなったり (small q の場合)、低温に於る frequency spectrum の温度変化に誤まった T のべきが現われたり、高温側から理論的に定めた T_c と低温側から求めた T_c とが一致しなかったり、etc. ...。

それでは或る近似が保存則を充しているか否かを判定するにはどうしたらよいか？ その一つの手段は Ward Identity を拡張する事であって、電子数の保存 (Gauge Invariance) に対し Spin Dynamics の問題では Spin の保存則を対応させればよい。この方は既に何度か述べているので、ここでは今一つの判定条件としての Sum Rule の話しを主にする。これは粒子密度のゆらぎの dynamics については暫々行われている事であって、それを Spin の場合に拡張する訳である。尚ここの話しに於て Spin-orbit interaction は悉くこれを無視する。

§ 1. Sum Rule.

Spin Dynamics を記述するものは reduced dynamical susceptibility :

$$\chi_{\mu\nu}(q, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - \alpha t} \ll M_{\mu}(q, t) : M_{\nu}(-q) \gg$$

$$\operatorname{Re} \chi_{\mu\nu}(q, \omega) \equiv \chi'_{\mu\nu}, \quad \operatorname{Im} \chi_{\mu\nu}(q, \omega) \equiv \chi''_{\mu\nu},$$

但し $\mu, \nu = x, y$ or z 。 $a_{k\sigma}$ を Bloch 軌道の消滅演算子として、

$$M_+(q) \equiv \sum_k a_{k+q\uparrow}^+ a_{k\downarrow},$$

$$M_z(q) \equiv \frac{1}{2} \sum_k (a_{k+q\uparrow}^+ a_{k\uparrow} - a_{k+q\downarrow}^+ a_{k\downarrow}),$$

$$M(q, t) \equiv e^{iHt} M(q) e^{-iHt},$$

$$\langle\langle A(t) : B \rangle\rangle \begin{cases} \equiv i \langle [A(t), B] \rangle, & t > 0 \\ \equiv 0, & t < 0 \end{cases}$$

である。簡単の為、伝導電子帯には縮退がないとしたが、仮に縮退があっても以下の話しを拡張する事は容易である。バンド間の遷移は無視して、Spin Current は

$$J_+(q) = \sum_k (D_q \epsilon(k)) a_{k+q\uparrow}^+ a_{k\downarrow},$$

$$J_z(q) = \sum_k (D_q \epsilon(k)) \frac{1}{2} (a_{k+q\uparrow}^+ a_{k\uparrow} - a_{k+q\downarrow}^+ a_{k\downarrow}),$$

etc.. 但し

$$D_q \equiv \frac{\partial}{\partial k} \left(1 + \frac{q^2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial k_{\parallel}^3} + \dots \right) \\ + q \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k_{\parallel}^2} + \frac{q^2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial k_{\parallel}^4} + \dots \right),$$

k_{\parallel} は k の q 方向への射影。 $\epsilon(k)$ は energy of the Bloch state.

Dynamical susceptibility の代りに Matsubara Green 関数 ;

$$\langle T [M_{\mu}(q, u) M_{\nu}(-q)] \rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{\zeta} \Phi_{\mu\nu}(q, \zeta)$$

但し $\zeta = 2\pi i n / \beta$

$$M(q, u) \equiv e^{uH} M(q) e^{-uH}$$

伊豆山健夫

を用い、 $\Phi(q, \zeta)$ を実軸を除く ζ -平面の上半面及び下半面に解折接続し、
 $\Phi_{\mu\nu}(q, \omega + i0^+) = \chi_{\mu\nu}(q, \omega)$ によって χ を求める。外部磁場 H の下で保存則

$$i \dot{\mathbf{M}}_{\pm}(q, t) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\pm}(q, t) \pm \omega_H \mathbf{M}_{\pm}(q, t),$$

$$i \dot{\mathbf{M}}_z(q, t) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_z(q, t),$$

を用いると (但し $\omega_H \equiv \mu_B H$) 次の Sum - Rule が得られる。

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \chi''_{+-}(q, \omega) = M$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \chi''_{-+}(q, \omega) = -M$$

(I)

但し $M \equiv \langle \mathbf{M}_z(0) \rangle$, また \int は $\int_{-\infty}^{\infty}$ を意味する。

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{\pi} \omega \frac{\chi''_{+-}(q, \omega) + \chi''_{-+}(q, \omega)}{2}$$

$$= 2\omega_H M + \frac{N}{2m} q^2 + O(q^4)$$

(II)

$$\text{但し } \frac{N}{m} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial^2 \epsilon(\mathbf{k})}{\partial k_{\parallel}^2} n_{\mathbf{k}},$$

$$n_{\mathbf{k}} \equiv \langle a_{\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{\mathbf{k}\uparrow} + a_{\mathbf{k}\downarrow}^+ a_{\mathbf{k}\downarrow} \rangle, \quad N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$$

は全電子数、即ち m は平均有効質量。

$\epsilon(\mathbf{k})$ が parabolic なら任意の q に対し右辺は q^2 まででおしまい。

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{\pi} \cdot \frac{\omega}{q^2} \chi''_{zz}(q, \omega) = \frac{N}{m}$$

(III)

parabolic band なら任意の q について上式が成立。

また

$$\begin{aligned} \Phi_{+-}(0, \zeta) &= -\frac{2M}{\zeta - \omega_H} \\ \Phi_{-+}(0, \zeta) &= \frac{2M}{\zeta + \omega_H} \end{aligned} \quad (IV)$$

は自明。

Isothermal susceptibility は $\chi_{\mu\nu} \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\omega \rightarrow 0} \chi_{\mu\nu}(q, \omega) \right\}$ 。

§ 2. Expression for $\chi_{\mu\nu}(q, \omega)$

Matsubara Green 関数はダイアグラム展開されて

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma} + v \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^+ a_{\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{l}-\mathbf{q}\downarrow} a_{\mathbf{l}\downarrow} - \omega_H M_z(0),$$

の場合,

$$\Phi_{+-}(q, \zeta) = \sum \text{Diagram} = \frac{\Gamma_{MM}(q, \zeta)}{1 - \Gamma_{MM}(q, \zeta)},$$

但し

$$\Gamma_{MM}(q, \zeta) = \sum \text{Diagram}$$

たった一つの $\rightarrow \cdots \leftarrow$ を消す事によって
2つに分離してしまわない = Irreducible

同様

$$\Gamma_{JM}(q, \zeta) = \sum \text{Diagram}$$

Irreducible Diagram

伊豆山健夫

並びに

$$\Gamma_{JJ}(q, \zeta) = \Sigma \text{ Irreducible Diagram}$$

を導入し, $\Gamma_{JM}(q, \zeta) = \Gamma_{MJ}(q, \zeta)$ for small q , を用いると, 連続の式より

$$\Gamma_{M_+, M_-}(q, \zeta) = - (2M/\zeta - \omega_H - 2vM) + q^2 \left\{ \Gamma_{J_+ J_-}(q, \zeta) - \frac{N}{2m} \right\} / (\zeta - \omega_H - 2vM)^2$$

が得られる。

$$\Phi_{+-}(q, \zeta) = \frac{-2M(\zeta - \omega_H - 2vM) - q^2 \left[\frac{N}{2m} - \Gamma_{J_+ J_-}(q, \zeta) \right]}{(\zeta - \omega_H)(\zeta - \omega_H - 2vM) + vq^2 \left[\frac{N}{2m} - \Gamma_{J_+ J_-}(q, \zeta) \right]}$$

$$\Phi_{-+}(q, \zeta) = \frac{2M(\zeta + \omega_H + 2vM) - q^2 \left[\frac{N}{2m} - \Gamma_{J_- J_+}(q, \zeta) \right]}{(\zeta + \omega_H)(\zeta + \omega_H + 2vM) + vq^2 \left[\frac{N}{2m} - \Gamma_{J_- J_+}(q, \zeta) \right]}$$

etc. が得られる。但し q^4 の項は無視。

$H \rightarrow 0$ の ferromagnetic state $M \neq 0$ に於けるスピンの波 spectrum は $\chi_{+-}(q, \omega)^{-1} = 0$ より

$$\omega = \frac{q^2}{2M} \left\{ \frac{N}{2m} - \Gamma_{J_+ J_-}(0, 0) \right\}$$

となる。 $\Gamma_{JJ}(0, 0)$ は real で, これから

$$\lim_{q \rightarrow 0} \omega \propto q^2, \quad q^2 \text{ の order まで巾がない。}$$

等が証明された事になる。上の Exact Expression が RPA のスピンの波表式と似ている事に注目。

dynamical susceptibility の一般式の中に登場する唯一の unknown factor $\Gamma_{JJ}(q, \zeta)$ の性質を押えて行く事が今後の課題である。

$$1) \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Gamma_{JJ}(q, \zeta) \right\} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ \lim_{q \rightarrow 0} \Gamma_{JJ}(q, \zeta) \right\} = \text{finite},$$

if $M \neq 0$.

$$2) \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\Gamma_{JJ}(q, \zeta) - \frac{N}{2m} \right] \right\} = \left(\frac{\zeta}{q} \right)^2 \frac{\chi}{1+v\chi}$$

if $M=0, H=0$. (χ : isothermal susceptibility)

$$3) \lim_{q \rightarrow 0} \Gamma_{JJ}(q, 0) + \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \Gamma'_{JJ}(0, \omega) / 1+v\chi \right) \\ = (N/2m) (v\chi / 1+v\chi)$$

guarantees the sum rule (II), if $M=0, H=0$.

4) q が小さいとき, sum Rule (I) は Spin Wave Pole によって exhaust される。

この最後のコメントは特に重要であって, sum rule を充すという事が, 大きな ω の $\chi(q, \omega)$ をも巻き込んだ要請であって, small frequency, large wave-length の fluctuation に興味がある場合, sum rule など充さない表式があっても充分用が足りるのであろう, という期待が正しくない事を示している。

$$5) \text{RPA } \Gamma_{+-}(q, \zeta) \equiv \Gamma_{MM}(q, \zeta) = -\frac{1}{\beta} \sum_{k, z} G_{\uparrow}^{(0)}(k, z) \\ \times G_{\downarrow}^{(0)}(k+q, z+\zeta)$$

は sum rule を充している ($q \rightarrow 0$)。

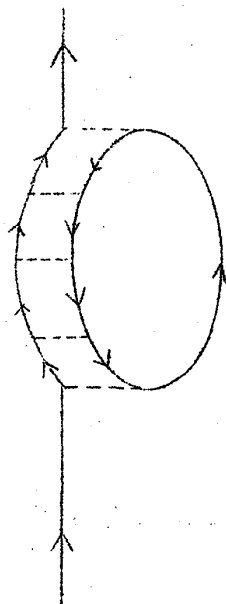
$$6) \text{近似 } \Phi_{+-}(q, \zeta) = \Gamma_{+-}(q, \zeta) / 1 - v\Gamma_{+-}(q, \zeta)$$

with

$$\Gamma_{+-}(q, \zeta) = -\frac{1}{\beta} \sum_{k, z} G_{\uparrow}(k, z) G_{\downarrow}(k+q, z+\zeta)$$

は $G_{\sigma}(k, z)$ が巾のある quasi-particle spectrum を与える場合, 決して sum rule を充さない。そもそも (IV) が充されない。もっと簡単に, $H=0, M=0$ で $\Phi(0, \zeta)$ が 0 にならない。

§ 3. Critical Fluctuation



$T > T_c$ での Critical fluctuation を論ずる為 $G(k, z)$ の mass-operator に左図の自己エネルギーを考慮したらどうなるか。筆者の papers (J. Appl Phys. 及び Progress L.) にある様な変分法を用いたにせよ何にせよ, dynamical susceptibility が 6) の形式で書き上げられてしまえば, Sum rule は充されなくなるので, critical dynamics を論ずるのはいささか気が引けるが, $\chi(q, 0)$ の記述には本質的な誤まりは無からう。 $T = T_c + 0$ で $\chi(q, 0)$ は $1/q^2$ には決してなり得ない。 $1/q^{2-\eta}$ ($\eta > 0$) でなければならぬ, と云う事は 6) の範囲では厳密に導びかれる。

§ 4. Sloppy Spin Waves

Heisenberg Model の場合, $T > T_c$ での Sloppy Spin Wave の image は明瞭に描かれる。Spin 間に働く強磁性的交換相互作用のため, 一つの cluster 内では全スピンの同一方向に揃ってしまう様な local order が想像される。その様な local order は熱運動によってきまたげられ, 時間的にも空間的にもゆらいだものになる。然し $|T - T_c| \ll T_c$ ではゆらぎは極めてゆるやか。その様な cluster の大きさは correlation length ξ で特徴付けられる。このとき $q\xi \gg 1$ なる波数 q のスピン波を cluster 内部に励起する事が出来る。それは減衰振動となるが, その振動数は $T = 0^\circ\text{K}$ に於る同じ波数 q のスピン波のそれと同じ位であろう。何となれば大きさ ξ の cluster は ferromagnetic ground state にあるものと考えられるから。以上は Heisenberg Model では各原子スピンの大きさが一定であると云う事実に基いている。(Brout の $1/z$ は理解出来ない。)

Itinerant ferromagnet でも確かに local order を示す cluster を連想する事も, 亦, その中で $q\xi \gg 1$ なるスピン波の減衰振動を予想する事も出来るけれども, その振動数がどうなるかについて不明な点がある。

The Spin Fluctuation and the Conservation cluster 内の spin density の絶対値が, Heisenberg model の場合の様に, 一定 ($T=0$ に於る値) と考えてよいのかどうかという点である。即ち [1] exchange splitting が cluster 内部では $T=0$ のときのそれと殆ど等しく, ただスピン量子化軸だけが cluster 毎に異なるものなのか, [2] exchange splitting の絶対値自身も亦 cluster 毎に異なる様な場合もあり得るのか否か, 未だ解っていない。

§ 5. Hydrodynamics vs. Kinematics

$T > T_0$ での spin density wave の relaxation mechanism に, Itinerant Ferromagnet と Heisenberg Ferromagnet の間で相違が見られるか否か。後者の場合, スピンのゆらぎの長波長成分の運動は拡散方程式によって記述されると考えられる。但し [nearest neighbour distance] $\ll q^{-1} \ll \xi$ の場合。これに反し Fermi 流体の場合, 波長 $q^{-1} \ll \ell$ (= mean free path of electrons) なる SDW を作ると, 速さ $\sim v_F$ で動く電子がこの SDW を担っているので, SDW は $1/qv_F$ なる時間内に崩れてしまう。(kinematical regime) 然しもっと長波長 $q^{-1} \gg \ell$ なる SDW を考えると, 再び拡散型の decay mechanism が主要な dynamics となる。(hydrodynamical regime) Kinematical regime では $\chi''(q, \omega)$ を ω の関数として描いた場合, その巾は q に比例する。Purely kinematical relaxation による巾であって Lorentz 型でも Gau β 型でもない。RPA expression を見よ。RPA では $\ell = \infty$ で, 確かに $\chi''(q, \omega)$ は $\omega = 0$ の周囲に q に比例する巾をもっている。($q \ll k_F$)。Kinematical regime はむしろ低温の He^3 液体に著しく現われるであろう。尚, $T \rightarrow T_0$ に於る critical slowing down はどちらの regime にも現われる。Dynamical scaling law が当てはめられない一つの例である。