# ボーズ気体の相転移

阪大教養　西山敏之
菅野正吉

運動量零（k＝0）の一粒子状態を占める粒子数を $n_0$ としたとき，ハミルトニアンHのボーズ粒子系の free energy は

$$F(n_0,\xi) = -\beta^{-1}\{\log[T_r'\exp(-\beta H-\xi N')]+\xi(N-n_0)\}$$

によって求められる。$\xi$ は Lagrangian multiplier，$\beta$ は温度の逆数，Nは全粒子数，$N' = \sum_{k\neq 0}' N_k$ で $N_k$ は粒子数演算子，$T_r'$ は $n_0$ を一定としたときのすべての粒子配置について跡をとることを意味する。$n_0$ と $\xi$ は $\partial F/\partial\xi = 0$ および F が $n_0$ の関数として最小値をとる条件から定められる。この点で $\partial F/\partial n_0 = 0$ ならば $-\beta^{-1}\xi = \langle\partial H/\partial n_0\rangle$ が成りたつ。$\langle A\rangle$ は A の平均値 $T_r'[A\exp(-\beta H-\xi N')]/T_r'\exp(-\beta H-\xi N')$ を表わす。hard sphere gas（直径a）に対し，free energy を a について，一次の項まで求めると Lee-Yang，Huang[1]の結果と同じく転移は一次となり転移点で $n_0$，圧力が共に不連続となる。この結果を改良するため，2体問題の解を用いて定められる有効ポテンシャル（境界条件を除き散乱行列[2]と一致する。）から求めた scattering length a（hard sphere の場合はその直径）について2次の項まで正確に free energy を計算すれば，$f=\beta F/N$，$x={}^{n_0}/_N$ おいて，

$$f(\xi,x) = 2a\rho\lambda^2 - a\rho\lambda^2x^2 - (1/\rho\lambda^3)g_{\frac{5}{2}}(\xi) - 4a^2\rho\lambda x^2 g_{\frac{1}{2}}(\xi)$$
$$-(16a^2x/\lambda^2)f_1(\xi) - (32a^2/\rho\lambda^5)f_2(\xi)$$

を得る。$\lambda$ は thermal wave length，$\rho$ は粒子密度，$f_1(\xi) = -\Pi\log\xi + 0(1)$，$f_2(\xi) = \pi^{3/2}\xi^{1/2}\log\xi + 0(\xi^{1/2}) + 0(1)$，$g_\nu(\xi) = \sum_n e^{-n\xi}/n^\nu$ である。$f(\xi,x)$ は $df/dx = 0$ で正の2次微係数：$d^2f/dx^2 > 0$ をもち，$x=0$，$\xi = -(16a^2/\lambda^2)\pi\log\xi$ および $\rho\lambda^3 = 2.612 + \pi\sqrt{\xi}$ か

ら転移温度 $T_c$ が定められる。Lee－Yang[1] や Luban[3] の結果と異りxは転移点で連続となり，比熱は凝縮相の側の方が値が大きく，その差は有限で $\Delta C_v = T_c \{(\partial^2 F/\partial n_0 \partial T)^2/(\partial^2 F/\partial n_0^2)\}_{T=T_c,\,n_0=0}$ によって与えられ，2次の相転移となる。

文献：

1) T.D.Lee and C.N.Yang, Phys. Rev。112(1958), 1419; Huang, Statistical Mechanics (1963)

2) K.A.Brueckner, Phys. Rev. 96 (1954), 508; S.Kanno, Prog, Theor, Phys. 128(1962), 965

3) M.Luban, Phys, Rev. 128(1962), 965; Phys. Rev. Letters 17(1966), 182。