

# 首尾一貫した方程式によるスピン系の取扱い

## — 動的臨界現象 —

京大理 川崎辰夫

(7月23日受理)

最近磁性体における動的な性質，特に転移点近傍の異常な振舞に関する研究が，実験理論両面から著るしく進歩して来た。この臨界現象は普通“異常スピン拡散”<sup>1~3)</sup>，“Sloppy Spin wave”<sup>4~7)</sup>，ESRにおける critical slowing down 或は Speed-up<sup>8~10)</sup>等の呼名で分類される現象である。これらは総括的に臨界揺動の反映として理解されているが，動的な臨界現象を詳細に調べてみると，ただたんに静的な性質の異常性の反映にとどまらず，むしろ系の運動学的，動力学的性質等の新しい要素が重要であることがわかる。従って着目している現象に何が本質的なのか，また，それを効果的に引き出すのにはどうすればよいか等が動的臨界現象の理論の問題点になる。特に“thermodynamical slowing down”，“kinematical slowing down”，“memory effect”等に注目したい。この分野の解明に対して最近一・二の有力な試みが行われた。<sup>11~13)</sup>

また，最近全く新しい概念として“scaling law”<sup>14)</sup>という仮説がこの分野の議論に導入された。それは或程度何処に異常性をあらわす項が潜んでいるかを示唆している点で重要である。動的な scaling law を例にとれば，一般に転移点近傍ではマクロな変数の内で波長の長いモードの緩和時間が長くなり，臨界揺動に有利な状況が実現するということが別の立場から理解されたことになるであろう。更に重要なことはこの“scaling law”がゆるぎないものとする，具体的な計算の過程で満たさねばならない条件（逆にいえばより所となる条件）<sup>17)</sup>が一つ増えたことになる。

以上の問題と密接に関連したものとして，いかなる理論的枠組が有利であるかということがある。即ち，異常に増大する臨界揺動をとり入れる便利な方法があるかという問題である。今日までに提出されている方法には緩和関数法<sup>18)</sup>，一般化された連分数法<sup>11)</sup>，グリーン関数法等<sup>19)</sup>がある。我々は理論構成に

何らかの形で self-consistent という概念を導入する必要があると考える。この論文の以下で用いられるこの言葉の意味は動的な変数について首尾一貫した閉じた方程式系を構成することである。<sup>3)</sup> (その方程式中に現れる静的な物理量は与えられたものとするという点では完全な形での首尾一貫性はない)。首尾一貫した方法の利点は次節以下の議論からも判るように非摂動的取扱いであること、閉じた方程式系であること、従って多体問題の動力学に不可避的な無限につづく方程式系をどう処理するかという問題がすりぬけられる。

我々はこの論文では動的帯磁率と密接に結びついている規格化された緩和関数を考える。<sup>18, 20)</sup>

$$\Gamma_{AB}(t) \equiv (A(t), B) / (A, B) \quad (1.1)$$

$$(A(t), B) \equiv \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \langle e^{\lambda H_A(t)} e^{-\lambda H_B} \rangle d\lambda \quad (1.2)$$

ここで  $\langle \dots \rangle$  はカノニカル平均をあらわす。この関数の従う基礎方程式は極めて一般的に次の型に書けることがわかっている。<sup>8)</sup>

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = - \int_0^t K(\tau) \Gamma(t-\tau) d\tau \quad (1.3)$$

このボルテラ型積分方程式<sup>21)</sup>の積分核  $K(t)$  は一般に極めて複雑な関数形をもち、このままでは閉じた方程式を構成しない場合が多い。今日までしばしば行われて来た処法は主として  $K(t)$  を  $\Gamma(t)$  を含まない既知の関数として近似することである。グリーン関数法、緩和関数法等はその典型であり、<sup>19)</sup> <sup>22)</sup> また、現象論的に  $K(t)$  を仮定することも行われて来た。<sup>23)</sup>  $K(t)$  が  $\Gamma(t)$  を含むと (1.3) は  $\Gamma(t)$  に関する非線型方程式となる。そのような例は <sup>24)</sup> Schwinger 型グリーン関数法では常に行われて来た。スピン系に対して最初に導いたのは Résibois-De Leener <sup>25)</sup> である。リューヴィユ方程式を図式的に展開することにより導いた。Kubarev <sup>26)</sup> は高次の時間相関関数を低次の相関関数の積に分解する方法で別の型の非線型方程式を得た。K. Kawasaki <sup>3)</sup> は Mori のブラウン運動の一般論を基礎にして Résibois-De Leener <sup>25)</sup> と等価な方程式を導き、異常スピン拡散を論じた。

我々がここで更に首尾一貫した方法を論じようとする理由は、より簡単な非線型方程式を提案することにより、近似は多少悪いかもしれないが、解析的に先に進んだ議論をしたいという要求からである。次の節ではスピン演算子<sup>26)</sup>についての縦及び横成分の緩和関数の運動方程式を Kubarev の処法にならって分解し、閉じた方程式系を導く。§3 では強磁性体に関する Dynamical Scaling Law が、臨界現象に最も寄与する部分の性質として定量的に得られることを示す。更に転移点極近傍を除き成立つような一般解を論じ、その時間依存性が摂動的であることを示す。最後に反強磁性体についても同様の事を論じ、Sloppy mode 発生の条件をも合せ調べる。

## § 2. 理論構成

等方的なハイゼンベルグスピン系を考える

$$H = - \sum_{(ij)} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (2.1)$$

系の動的な挙動を記述する動的帯磁率 $\chi(\mathbf{k}, \omega)$ は(1.2)で定義した緩和関数との間に<sup>20)</sup>

$$\chi(\mathbf{k}, \omega) = \chi(\mathbf{k}, 0) - i\omega\beta (S_{\mathbf{k}(t)}, S_{\mathbf{k}}) \omega \quad (2.2)$$

という形で与えられるから次式で定義される規格化された緩和関数を導入する

$$E_{\mathbf{k}}^{\pm}(t) \equiv (S_{\mathbf{k}}^{\pm}(t), S_{-\mathbf{k}}^{\mp}) / (S_{\mathbf{k}}^{\pm}, S_{-\mathbf{k}}^{\mp}) \quad (2.3)$$

$$\theta_{\mathbf{k}}^0(t) \equiv (S_{\mathbf{k}}^0(t), S_{-\mathbf{k}}^0) / (S_{\mathbf{k}}^0, S_{-\mathbf{k}}^0) \quad (2.4)$$

ハミルトニアン(2.1)の下でこれら二関数の極の性質が解明されれば、序論で提起した問題が理解された事になる。

スピン演算子の運動方程式はそれをフーリエ成分で書くと

$$\dot{S}_{\mathbf{k}}^{\pm} = \mp i \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0 S_{\mathbf{q}}^{\pm} \quad (2.5)$$

川崎辰夫

$$\dot{s}_{\mathbf{k}}^0 = \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ s_{\mathbf{q}}^- \quad (2.6)$$

ここで  $J(\mathbf{q})$  は  $J_{ij}$  のフーリエ成分

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = J(\mathbf{q}) - J(\mathbf{q}') \quad (2.7)$$

これを用いると緩和関数  $E_{\mathbf{k}}(t)$  の従う方程式は

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\mathbf{k}}(t) = & -iJ(0, \mathbf{k}) \langle s^0 \rangle E_{\mathbf{k}}(t) \\ & + i \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) ((s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0(t) s_{\mathbf{q}}^+(t), s_{-\mathbf{k}}^-)) / (s_{\mathbf{k}}^+, s_{-\mathbf{k}}^-) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで

$$\begin{aligned} ((s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0(t) s_{\mathbf{q}}^+(t), s_{-\mathbf{k}}^-)) &= (s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0(t) s_{\mathbf{q}}^+(t), s_{-\mathbf{k}}^-) \\ &- \langle s^0 \rangle (s_{\mathbf{k}}^+(t), s_{-\mathbf{k}}^-) \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.9) の右辺に (2.5) を一回時間積分した式を代入すると

$$\begin{aligned} (2.9) = & (s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0(t) s_{\mathbf{q}}^+(0), s_{-\mathbf{k}}^-) - \langle s^0 \rangle (s_{\mathbf{k}}^+(0), s_{-\mathbf{k}}^-) \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \\ & + i \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}', \mathbf{q}-\mathbf{q}') \int_0^t d\tau (s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0(t) s_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^0(\tau) s_{\mathbf{q}'}^+(\tau), s_{-\mathbf{k}}^-) \\ & - i \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}', \mathbf{q}-\mathbf{q}') \langle s^0 \rangle \int_0^t d\tau (s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0(\tau) s_{\mathbf{q}'}^+(\tau), s_{-\mathbf{k}}^-) \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで時間を含んだ緩和関数を次のように分解する

$$\begin{aligned} (A_{q_1}^{\mu_1}(t_1) A_{q_2}^{\mu_2}(t_2) A_{q_3}^{\mu_3}(t_3), A_{q_4}^{\mu_4}) &= \sum_{\text{Cyclic}} \langle A_{q_1}^{\mu_1} \rangle (A_{q_2}^{\mu_2}(t_2) A_{q_3}^{\mu_3}(t_3), A_{q_4}^{\mu_4}) \\ &+ \sum (A_{q_1}^{\mu_1}(t_1), A_{q_2}^{\mu_2}(t_2)) (A_{q_3}^{\mu_3}(t_3), A_{q_4}^{\mu_4}) \\ &+ \sum \langle A_{q_1}^{\mu_1} \rangle \langle A_{q_2}^{\mu_2} \rangle (A_{q_3}^{\mu_3}(t_3), A_{q_4}^{\mu_4}) \end{aligned}$$

$$+ (A_{q_1}^{\mu_1}(t_1) A_{q_2}^{\mu_2}(t_2) A_{q_3}^{\mu_3}(t_3), A_{q_4}^{\mu_4})_c \quad (2.11)$$

これらの項の内から次の二つの条件を満たす平均値のみを残す。<sup>19)</sup> 第一は系が一定の量子化軸をもっているとして

$$\sum_i \mu_i = 0 \quad (2.12)$$

第二に系がある波数ベクトル  $Q$  で指定されるような併進対称をもっている

$$\sum_i q_i = 0 \quad \text{或は } Q \quad (2.13)$$

これを (2.10) に適用すると高次の時間相関関数を省略する範囲内で

$$\begin{aligned} \dot{E}_k(t) = & -i \langle S^0 \rangle J(0, k) - \sum_q J(q, k-q) J(q, k) r_q^L \\ & \times \int_0^t d\tau \theta_q(t-\tau) E_k(\tau) \end{aligned} \quad (2.14)$$

が得られる。同様にして縦成分については

$$\dot{\theta}_k(t) = - \sum_q J(q, k-q) J(q, k) r_q^T \int_0^t d\tau E_q(t-\tau) \theta_k(\tau) \quad (2.15)$$

となる。ここに

$$r_q^L = (S_q^0, S_{-q}^0) \quad r_q^T = (S_q^+, S_{-q}^-) \times \frac{1}{2} \quad (2.16)$$

は静的相関を与える。(2.14), (2.15) に至る近似については最後の章で考える事とし, また, 別の導出法を Appendix に示した。

(2.14) (2.15) の積分記号の前の部分を取り出して調べてみる  $r_q$  にグリーン関数からえられる Ornstein-Zerniko 型の対相関関数<sup>19)</sup>

$$(S_{\mathbf{k}}^0, S_{-\mathbf{k}}^0) = \frac{k_B T / J(0)}{\bar{\chi} + 1 - \lambda_q} \quad (2.17)$$

を代入すると

$$\sum_q a^L(\mathbf{k}, q) \equiv \sum_q J(q, k-q) J(q, k) r_q^L$$

$$\begin{aligned}
 &= k_B T J(0) \eta_{\mathbf{k}} (1 - \lambda_{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{q}} \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{\eta_{\mathbf{q}}} \\
 &\equiv \sum_{\mathbf{q}} m_2^L(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{2} M_2(\mathbf{k})
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

となる。ここに

$$\bar{\chi} = [J(0) \chi]^{-1} \tag{2.19}$$

$$\eta_{\mathbf{q}} = \bar{\chi} + 1 - \lambda_{\mathbf{q}} \tag{2.20}$$

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \left( \frac{1}{z} \right) \sum_{\delta} e^{i\mathbf{q}\delta} \delta : n. n. \tag{2.21}$$

$M_2(\mathbf{k})$  は  $\mathbf{k}$ -依存性をもつ二次モーメントである。(2.14) (2.15) をラプラス変換すると

$$E_{\mathbf{k}}(z) = \frac{1}{z + \Phi(\mathbf{k}, z)} \tag{2.22}$$

$$\theta_{\mathbf{k}}(z) = \frac{1}{z + \Psi(\mathbf{k}, z)} \tag{2.23}$$

ここで  $\Phi, \Psi$  は夫々次式で与えられる

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{a^L(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{z + \Psi(\mathbf{q}, z)} + i \sigma J(0, \mathbf{k}) \tag{2.24}$$

$$\Psi(\mathbf{k}, z) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{a^{\Gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{z + \Phi(\mathbf{q}, z)} \tag{2.25}$$

この二式が以下の我々の議論の基礎となる方程式である。(  $\sigma \equiv \langle S^0 \rangle$  をつけた)

### § 3. 強磁性体

#### 3.1 転移点以上の場合

常磁性領域では等方的なハイゼンベルグ・ハミルトニアンの下では緩和関数の成分の差異はなくなり  $\Psi(\mathbf{k}, z) = \Phi(\mathbf{k}, z)$  であるから (2.18)

(2.24) より

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{m_2(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{z + \Phi(\mathbf{q}, z)} \quad (3.1)$$

Static Scaling Law が成立する領域で議論すれば十分だから着目する波数  $k$  は常に逆格子ベクトル  $2K$  にくらべて十分小さい, すると (2.18) より

$$m_2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{4} k_B T J(0) k^2 (\kappa^2 + k^2) f(\mathbf{q})$$

となるから

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}, z) &= \frac{1}{2} k_B T J(0) k^2 (\kappa^2 + k^2) \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega d\mathbf{q} \frac{q^2}{\kappa^2 + q^2} \frac{1}{z + \Phi(\mathbf{q}, z)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

が得られる。ここで相関距離の逆数  $\kappa$  は

$$\kappa^2 = 2\bar{\chi} \quad (3.3)$$

で定義される。(3.2) において  $k^2(\kappa^2 + k^2)$  が夫々 kinematical 及び thermodynamical slowing down をあたえる。ここで次のような無次元変数になおそう

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \xi \kappa^{2/5} \phi(\lambda, s) \quad (3.4)$$

$$z = \xi \kappa^{2/5} s, \quad \xi = \frac{\sqrt{k_B T J(0)}}{2\pi} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{k} = \kappa \lambda \quad \mathbf{q} = \kappa \mu \quad (3.6)$$

すると (3.2) は

$$\phi(\lambda, s) = \lambda^2 (1 + \lambda^2) \int d\mu \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \frac{1}{s + \phi(\mu, s)} \quad (3.7)$$

となり  $q \ll K$  のモードから大きな寄与が来ることがわかる。(3.5) より characteristic frequency は  $\kappa^{2/5}$  に比例し  $E_{\mathbf{k}}(t)$  にすると

$$E_k(t) = G(\kappa^{2/5} t, \frac{k}{\kappa}) \quad (3.8)$$

という関数形をもつことが容易にわかる。この結果は既に知られたものと一致する。<sup>3, 11, 16)</sup>  $\eta \neq 0$  の場合には  $(5+\eta)/2$  となる。文献12と異なる。

Hydrodynamical Region  $(\lambda \ll 1)$

ここでは  $\lambda \ll 1$  を保ちつつ  $k \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0$  とした極限における characteristic frequency の陽の形を求める。

$$\phi(\lambda, s) = \phi_0(s) \lambda^2 (1 + \lambda^2) \quad (3.9)$$

という trial function は (3.7) を満足する。s-依存性を省略すると

$$[\phi_0(0)]^2 = \int d\mu \left( \frac{1}{1+\mu^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad (3.10)$$

故に

$$\Phi(k, 0) = D k^2 \quad (3.11)$$

となり拡散係数 D は

$$D = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \kappa^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \cdot \epsilon^{1/2} \quad (3.12)$$

と与えられ  $\eta \neq 0$  の場合を含めて先の結果と一致する。<sup>11)</sup>

Critical Region  $(\lambda \gg 1)$

$E_q$  (3.2) へもどって考えた方が便利である。新しい変数を次の式で定義する。

$$\Phi(q, z) = \xi k^{2/5} \phi(\mu, s'; \lambda) \quad (3.13)$$

$$z = \xi k^{2/5} s' \quad (3.14)$$

$$\lambda' = \kappa/k \quad (3.15)$$

$$\mu = q/k \quad (3.16)$$

と (3.2) は

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \xi k^{2/5} (1 + \lambda'^2) \int \frac{\mu^2 d\mu}{\lambda'^2 + \mu^2} \cdot \frac{1}{s' + \phi(\mu, s'; \lambda')} \quad (3.17)$$

従って  $\lambda' \ll 1$  の極限で

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \Phi_0(z) k^{2/5} + \dots \quad (3.18)$$

という解をもつことがわかるから  $E_{\mathbf{k}}(t)$  については

$$E_{\mathbf{k}}(t) = G(k^{2/5} t, \frac{k}{k}) \quad (3.19)$$

という scaling が可能となる。  $k^{2/5}$  が唯一の parameter であり吸収線型がローレンツからひどくずれていることを示している。

### 吸収線型

一般の波数で吸収線型がどうなるかを考えてみる。上節の議論でもちよつとふれたように memory effect をもつ場合の線型に特に興味がある。一回 iteration を行う (ミクロな time scale がマクロな time scale に comparable であるとする近似) と

$$\phi(\mathbf{k}, z) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{z^2 + 2M_2(\mathbf{k})} - z \right\} \quad (3.20)$$

故に

$$E_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2}{z + \sqrt{z^2 + 2M_2(\mathbf{k})}} \quad (3.21)$$

ラプラス逆変換をほどこすと

$$E_{\mathbf{k}}(t) = \frac{2J_1(\sqrt{2M_2(\mathbf{k})}t)}{\sqrt{2M_2(\mathbf{k})}t} \quad (3.22)$$

これは Kubarev<sup>26)</sup> が導いた結果と同等のものである。  $J_1(z)$  は第一種円柱関数。<sup>21)</sup> 時間相関関数について (3.22) と同じ依存性を導いた例は他の分野に既に見出される。<sup>27)</sup> それによるとモード間の結合が弱い場合には漸近的に正しい結果を与える場合がある。転移点近傍では  $M_2(\mathbf{k})$  ( $k$ -依存性をもった三次モーメント) は高々スペクトルのひろがりを与えるに過ぎない。  $M_2(\mathbf{k})$  を truncated モーメントと解すれば一応

川崎辰夫

scaling character は保たれるが，この考えは  $\Phi(q, z)$  が本質的な役割を果すという前節の考え方に反する。(3.21) より吸収線型  $I(\omega)$  を  $\Omega \equiv \omega / \sqrt{2M_2(\mathbf{k})}$  を単位としてあらわすと

$$I(\Omega) \propto \sqrt{1-\Omega^2} \quad (3.23)$$

となり，波数，温度に無関係に一つの円弧として表現される。

高温の極限に限ってもう一步近似をあげてみよう。(3.23) より得られる連分数展開

$$E_{\mathbf{k}}(z) = \frac{1}{z + \frac{m_2(\mathbf{k}, q)}{z + \frac{m_2(q, q')}{z + \frac{m_2(q', q'')}{z + \dots}}}} \quad (3.24)$$

において，各  $m_2(\mathbf{k}, q)$ ， $m_2(q, q')$ ， $\dots$  を夫々平均値でおきかえることを許し

$$r^2 \equiv \sum_{q, q'} m_2(q, q') = \sum_{q', q''} m_2(q', q'') = \dots \quad (3.25)$$

とおくと

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}}(z) &\simeq \frac{1}{z + \frac{(1-\lambda_{\mathbf{k}})r^2}{z + \frac{r^2}{z + \frac{r^2}{z + \dots}}}} \\ &= \frac{1}{z(1-\Delta_{\mathbf{k}}) + \Delta_{\mathbf{k}} \sqrt{z^2 + 4r^2}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここに

$$2\Delta_{\mathbf{k}} = 1 - \lambda_{\mathbf{k}} \quad (3.27)$$

すると吸収線型は  $R_0 E_{\mathbf{k}}(z)$  より

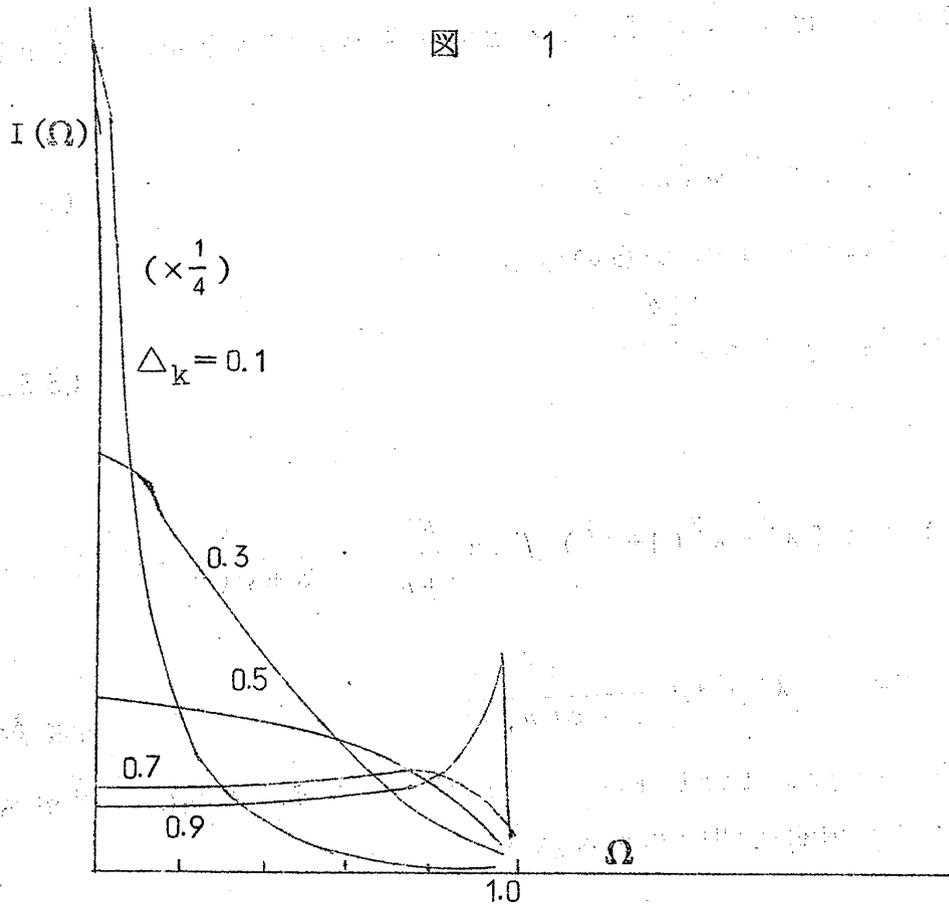
$$I(\omega) = \frac{\Delta_k \sqrt{4r^2 - \omega^2}}{\omega^2(1 - 2\Delta_k) + 4r^2\Delta_k} \quad (3.28)$$

波数  $k$  によって線型がどのようにかわるかを表 1 及び図 1 に示す。

表 1

$k$	$\Delta_k$	$I(\omega)$	型	$E_k(z)$	$E_k(t)$
0	0	$1/\omega$		$z^{-1}$	一定
$\pi/2$	$1/2$	$(2r^2)^{-1} \sqrt{4r^2 - \omega^2}$		$2(z + \sqrt{z^2 + 4r^2})^{-1}$	$\frac{2J_1(2rt)}{rt}$
$\pi$	1	$(4r^2 - \omega^2)^{-1/2}$		$(\sqrt{z^2 + 4r^2})^{-1}$	$J_0(rt)$

図 1



吸収線型が二つの頂点を持つようになる条件を調べてみると

$$\left. \frac{\partial I(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 I(\omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0} > 0 \text{ の計算から}$$

$$1 \geq \Delta_k \geq 2 - 2 \quad (2.29)$$

これを波数空間に引きもどして考えてみると

$$k/K \gtrsim 0.57 \quad (3.30)$$

となり、他の方法で得られる結果に近い。<sup>13)</sup>

### 3.2 転移点以下の場合

転移点以下の振舞を論ずる為には (2.24, 25) の基礎方法式までもどらねばならない。対相関関数の関数形については議論のある所だが、<sup>28)</sup> 少なくとも Ornstein-Zernike 型が成立つ領域が存在するという事、他の関数形を用いても scaling に関する限り同じであること等からここでは  $r_q^L$  については 0-Z 型を  $r_q^T$  は  $k^{-2}$  に比例すると仮定する。すると先の無次元変数の定義 (3.4, 5, 6) に加えて

$$\Psi(k, z) = \xi \kappa^{2/5} \varphi(\lambda, s) \quad (3.31)$$

及び static scaling law からの帰結

$$J(0) \sigma = \xi \zeta \kappa^{\frac{1+\eta}{2}} \quad (3.32)$$

を使うと

$$\varphi(\lambda, s) = i \zeta \lambda^2 + \lambda^2 (1 + \lambda^2) \int d\mu \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \cdot \frac{1}{s + \varphi(\mu, s)} \quad (3.33)$$

$$\varphi(\lambda, s) = \lambda^2 \int d\mu \frac{\mu^2}{s + \varphi(\mu, s)} \quad (3.34)$$

が得られるから、characteristic frequency は  $E, \theta$  共に  $\kappa^{2/5}$  である。

$\eta \neq 0$  の場合には対相関に問題があるが

$$(S_{\mathbf{k}}, S_{-\mathbf{k}}) = \kappa^{\eta-2} f\left(\frac{k}{\kappa}\right) \quad (3.35)$$

が成立つならば、 $\kappa$  のべきは  $(5+\eta)/2$  となり、R. P. A. の範囲内では  $T_c$  の上下で共通の scaling が可能となる。これは Mori-Okamoto の最<sup>11)</sup>

近の結果と異なる。

Hydrodynamical Region ( $\lambda \ll 1$ )

$\phi(\lambda, s)$ ,  $\varphi(\lambda, s)$  の  $S$ -依存性を省略できる範囲で (3.33, 34) は

$$R_e \phi(\lambda, 0) = \phi_0 \lambda^2 (H \lambda^2), \quad I_m \phi(\lambda, 0) = \zeta \lambda^2 \quad (3.36)$$

$$R_e \varphi(\lambda, 0) = \varphi_0 \lambda^2, \quad I_m \varphi(\lambda, 0) = 0 \quad (3.37)$$

を代入すると両立していることがわかる。

$$\phi(0, 0) = i \zeta + c^2 \quad (3.38)$$

$$\varphi(0, 0) = d^2 \quad (3.39)$$

$c^2$ ,  $d^2$  は正の常数, 従って

$$\Psi(k, 0) = A k^2 \quad (3.40)$$

$$\Phi(k, 0) = A' k^2 + i \zeta \kappa^{1/2} k^2 \quad (3.41)$$

とおくと  $T_0$  以上と同じ性格をもった拡散係数が求まる。

$$A \propto \kappa^{1/2} \quad A' \propto \kappa^{1/2} \quad (3.42)$$

横成分  $\Phi(k, 0)$  はスピン波モードの振動部分をもっている。

Critical Region ( $\lambda \gg 1$ )

$\sigma J(0, k)$  の部分は常に  $\kappa^{1/2} k^2$  に比例しているから, この領域では ( $k \gg \kappa$ ) 無視できて Scaling は  $k^{2/5}$  (11~17) ということになる。これらの結果はすべて先の結果と一致する。

(2.14, 15) の近似解

転移点以下で基礎方程式 (2.14, 15) の一般の波数で成立つ解を探してみよう。今変換

$$\xi_k(t) = \zeta_k(t) e^{-i \sigma J(0, k) t} \quad (3.43)$$

川崎辰夫

を用いると

$$\dot{\xi}_{\mathbf{k}}(t) = - \sum_{\mathbf{q}} a_{\parallel}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \int_0^t d\tau \theta_{\mathbf{q}}(t-\tau) \xi_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\sigma(t-\tau)J(0, \mathbf{k})} \quad (3.44)$$

$$\dot{\theta}_{\mathbf{k}}(t) = - \sum_{\mathbf{q}} a_{\perp}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \int_0^t d\tau \xi_{\mathbf{q}}(t-\tau) \theta_{\mathbf{k}}(\tau) e^{-i\sigma(t-\tau)J(0, \mathbf{q})} \quad (3.45)$$

と書きなおされる。今  $k \ll K$  及び転移点からそう遠くない温度範囲を考えると、まず時間積分に最もきく部分は  $\tau \simeq t$  のあたりである。すると (3.44, 45) の integrand の中の指数関数部分は近似的に 1 とおける。更に

$$\sum_{\mathbf{q}} a_{\parallel}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \theta_{\mathbf{q}}(z) \simeq \theta_{\mathbf{k}}(z) \sum_{\mathbf{q}} a_{\parallel}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \equiv \theta_{\mathbf{k}}(z) A_{\parallel}(\mathbf{k}) \quad (3.46)$$

同様に

$$\sum_{\mathbf{q}} a_{\perp}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \xi_{\mathbf{q}}(z) \simeq \xi_{\mathbf{q}}(z) A_{\perp}(\mathbf{k}) \quad (3.47)$$

という近似をする。その結果は (3.44, 45) のラプラス変換として

$$z \xi_{\mathbf{k}}(z) = 1 - A_{\parallel}(\mathbf{k}) \theta_{\mathbf{k}}(z) \xi_{\mathbf{k}}(z) \quad (3.48)$$

$$z \theta_{\mathbf{k}}(z) = 1 - A_{\perp}(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}(z) \theta_{\mathbf{k}}(z) \quad (3.49)$$

が得られ、その解はただちに

$$\xi_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\{z^2 + (A_{\perp} - A_{\parallel})\}^2 + 4A_{\parallel}z^2 + z^2 + (A_{\perp} - A_{\parallel})^2}} \quad (3.50)$$

$$\theta_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\{z^2 + (A_{\parallel} - A_{\perp})\}^2 + 4A_{\perp}z^2 + z^2 + (A_{\parallel} - A_{\perp})^2}} \quad (3.51)$$

と求まる。転移点近傍の場合には

$$|A_{\parallel} - A_{\perp}| \ll A_{\perp} \text{ 及び } A_{\parallel} \quad (3.52)$$

とおいてよいから、その時は更に簡単化されて

$$\xi_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2}{\sqrt{z^2 + 4A_{\perp} + z}} \quad (3.53)$$

$$\theta_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2}{\sqrt{z^2 + 4A_{\parallel} + z}} \quad (3.54)$$

従って時間相関関数にもどすと

$$E_{\mathbf{k}}(t) = e^{-i\sigma J(0, \mathbf{k})t} \cdot \frac{2J_{\perp}(B_{\perp}t)}{B_{\perp}t} \quad (3.55)$$

$$\theta_{\mathbf{k}}(t) = \frac{2J_{\parallel}(B_{\parallel}t)}{B_{\parallel}t} \quad (3.56)$$

ただし

$$B_{\perp}^2 = 4A_{\perp} \quad B_{\parallel}^2 = 4A_{\parallel} \quad (3.57)$$

0-z の範囲内では  $r_{\mathbf{q}}^L$  は転移点の上下で  $|T-T_c|$  の同じべきで与えられるから scaling は共通である。 $r_{\mathbf{q}}^T$  は  $T \lesssim T_c$  で温度依存性をもたないとすると共通の scaling は (3.55) ではみだされていないように見える。がむしろ  $r_{\mathbf{q}}^T$  の方に問題があるのではないか、勿論  $T=T_c$  ではすべての相関関数は完全に一致することは確かめられる。

#### § 4. 反強磁性体 (転移点以上の場合)

反強磁性体の転移点以上における運動方程式は、交換相互作用の符号を変えることを除けば、強磁性体の場合の (3.1) がそのまま成立つ。

即ち Ornstein-Zernike 型の相関関数を用いると

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = k_B T J(0) (\bar{\chi} + 1 + \lambda_{\mathbf{k}})(1 - \lambda_{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{q}} \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{\eta_{\mathbf{q}}} \cdot \frac{1}{z + \phi(\mathbf{q} + \mathbf{K}, z)} \quad (4.1)$$

$$\Phi(\mathbf{k} + \mathbf{K}, z) = k_B T J(0) (\bar{\chi} + 1 - \lambda_{\mathbf{k}})(1 + \lambda_{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{q}} \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{\eta_{\mathbf{q}}} \cdot \frac{1}{z + \phi(\mathbf{q} + \mathbf{K}, z)} \quad (4.2)$$

となる。 $\phi(\mathbf{k}, z)$  には kinematical slowing down を与える  $(1 - \lambda_{\mathbf{k}})$  が、また、 $\phi(\mathbf{k} + \mathbf{K}, z)$  には thermodynamical slowing down を与える  $(\bar{\chi} + 1 - \lambda_{\mathbf{k}})$  が夫々単独で存在する点が強磁性体の場合と異なる。

川崎辰夫

上記二式より次のような簡単な関係式が得られる。

$$\frac{\Phi(\mathbf{k}, z)}{\Phi(\mathbf{k}+\mathbf{K}, z)} = \frac{(\bar{\chi}+1+\lambda_{\mathbf{k}})(1-\lambda_{\mathbf{k}})}{(\bar{\chi}+1-\lambda_{\mathbf{k}})(1+\lambda_{\mathbf{k}})} \quad (4.3)$$

$k \ll K$  として展開すると

$$\frac{\Phi(\mathbf{k}, z)}{\Phi(\mathbf{k}+\mathbf{K}, z)} = \frac{k^2}{\kappa^2 + k^2} \left( = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) \quad (4.4)$$

従って  $\kappa \gg k$  で  $\lambda^2$  に近づき  $k \ll \kappa$  で 1 に近づく, 即ち  $T_N$  直上では  $\Phi(\mathbf{k}, z) = \Phi(\mathbf{k}+\mathbf{K}, z)$  である。更に  $\Phi(\mathbf{k}, z)$  は  $k=K/2$  に関して対象であることがわかる。

次に scaling analysis に移る。次のように無次元変数を定義する。

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \xi \kappa^{2/3} \phi_{\lambda}(s) \quad (4.5)$$

$$\Phi(\mathbf{k}+\mathbf{K}, z) = \xi \kappa^{2/3} \varphi_{\lambda}(s) \quad (4.6)$$

$$z = \xi \kappa^{2/3} s \quad (4.7)$$

$$\mathbf{k} = \kappa \lambda \quad \mathbf{q} = \kappa \mu \quad (4.8)$$

$$\phi_{\lambda}(s) = \lambda^2 \int d\mu \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \cdot \frac{1}{s+\varphi_{\mu}(s)} \quad (4.9)$$

$$\varphi_{\lambda}(s) = (1+\lambda^2) \int d\mu \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \cdot \frac{1}{s+\varphi_{\mu}(s)} \quad (4.10)$$

従って強磁性体の場合と同様に最も大きな寄与をする部分は長波長領域にあり, scaling が行われて characteristic frequency は  $\kappa^{2/3}$  に比例する。

Hydrodynamical Region では

$$\phi_{\lambda}(s) = \phi_0(s) \lambda^2 \quad (4.11)$$

$$\varphi_{\lambda}(s) = \varphi_0(s) (1+\lambda^2) \quad (4.12)$$

という近似解が存在して ( $s \ll \varphi_0(s)$ )

$$\varphi_0(s) = \phi_0(s) \cong \sqrt{\int \frac{1}{(1+\mu^2)^2} d\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.13)$$

従って

$$\Phi(\mathbf{k}, 0) = D k^2 \quad (4.14)$$

で拡散係数を定義すると <sup>11, 12)</sup>

$$D = \xi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \kappa^{-1/2} \quad (4.15)$$

及び

$$\Phi(\mathbf{k}+\mathbf{K}, s) = c \kappa^{2/3} \quad (4.16)$$

従って  $\Xi_{\mathbf{k}+\mathbf{K}}(z)$  は  $\kappa^{2/3}$  という唯一の scaling をもつことになる。尚、  
 対相関関数に  $\frac{k^{\eta-2}}{\eta-1} f(k/\kappa)$  を使うと scaling は  $\kappa^{\frac{1+\eta}{2}}$  となり、従って拡  
 散係数は  $\kappa^{\frac{1+\eta}{2}}$  という依存性をもつことになる。これは必ずしも既に得られ  
 ている結果と等しくない。 <sup>11), 12), 17)</sup>

Critical Region の議論にかえて、ここでは (4.1) の解そのものを考  
 えてみよう。integrand 中の  $\phi(\mathbf{q}+\mathbf{K}, z)$  は  $q \simeq 0$  近傍からの寄与が圧  
 倒的だから  $q \ll K$  で  $\Phi(\mathbf{K}+\mathbf{q}, z) \simeq \Phi(\mathbf{K}, z)$  としてよからう。するとま  
 ず (4.2) より

$$\Phi(\mathbf{K}, z) = \frac{M_2(\mathbf{K})}{z + \sqrt{z^2 + 2M_2(\mathbf{K})}} \quad (4.17)$$

(4.1) に代入して

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \frac{M_2(\mathbf{k})}{z + \sqrt{z^2 + 2M_2(\mathbf{k})}} \quad (4.18)$$

故に

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\mathbf{k}}(z) &= \frac{1}{z + \Phi(\mathbf{k}, z)} \\
 &= \frac{1}{z(1 - \alpha_{\mathbf{k}}) + \alpha_{\mathbf{k}} \sqrt{z^2 + 2M_2(\mathbf{K})}}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

ここで

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \frac{M_2(\mathbf{k})}{2M_2(\mathbf{K})} = \frac{(\bar{\lambda} + 1 + \lambda_{\mathbf{k}})(1 - \lambda_{\mathbf{k}})}{4\bar{\lambda}} \tag{4.20}$$

$\alpha_{\mathbf{k}} \rightarrow \Delta_{\mathbf{k}}$ ,  $2M_2(\mathbf{K}) \rightarrow 4r^2$  という対応により丁度強磁性体の場合の (3.26) に一致するから二つの peaks をもつ条件はやはり

$$\alpha_{\mathbf{k}} \geq 2 - \sqrt{2} \tag{4.21}$$

であり,  $\mathbf{k}$ -空間にもどすと

$$k/\kappa > 1.08 \tag{4.22}$$

となるから, いわゆる critical region に入らねば, 吸収線型の大きな変化は期待できないことになる。

## § 5. 議論及びまとめ

Dynamical Scaling Law は臨界現象に対して最も大きな寄与をする部分の性質であることを Dynamical Random Phase Approximation (DRPA) の範囲内で示した。議論の大半は対相関として  $\eta = 0$  の Ornstein-Zernike 型を用いたが  $\eta \neq 0$  とした時の結果は既に得られたものと必ずしも一致していない。例えば Mori - Okamoto<sup>11)</sup> によると  $T_c$  の上下で同一の scaling parameter は存在せず, 且つ  $T_c$  以下では狭義の scaling も行えないことを示し, 他の結果と異なる。従って, 若し Mori - Okamoto の処法が anomalous part を正しく引き出しているとする DRPA の範囲内で  $\eta \neq 0$  の対相関を持ち込むことは自己矛盾に陥ることになるだろう。

Critical Region を論ずる代りに, 吸収線型を直接問題にした場合が多

い。  $k \gg \kappa$  の領域では少くとも吸収線型はひどくローレンツ型からずれ、いわゆる Sloppy Mode の存在を示す。その条件を各々の場合について調べた結果は大凡の所他の方法で得た結果に近い。<sup>13)</sup> 線型が歪む原因を考えてみると、常磁性領域であるから一次モーメントから来る周波数のずれは考えられず、専ら damping を記述する  $\Phi(k, z)$  の波数、温度、周波数に対する特殊な依存性に帰因していることがわかる。ただし peak の位置は大ざっぱな所、等方的なハイゼンベルグモデルでは  $J$  以外のパラメーターは考えられず  $\sqrt{M_2(k)}$  程度に落ち着くことには間違いない。そういう意味からみれば RPA で求めた周波数のずれも当らずといえども遠からずといえよう。

§ 2 で行った DRPA について少し考えておく。高次の時間相関関数を、より低い次数のものに分解することは序論にも述べた如く Kubarev<sup>26)</sup> が最初ではない。また、DRPA が普通の RPA にくらべて特に新しい要素を持ちこんだと考えなくてもよいことは Appendix から明らかである。しいていうならば非線型方程式になることを恐れない処法といえよう。それによって Dynamical な要素をより多く集めることに成功している。従って RPA と DRPA とでは棄てた高次の時間相関関数の大きさに差異がある。我々が取扱って来た系は大きな揺動をもつ結合常数も大きいので、単純な摂動計算は収束が悪い。また、方程式の無限の系列を何らかの型でとりこまねばならない。この観点から DRPA は有効な処方であることがわかった。この処法の近似的な上げる為には更に高次の時間相関関数についても首尾一貫した方程式系を作らねばならないが、それは途方もなく面倒なことになる。ESR については次の機会にゆずる。

終りに臨み、終始熱心に御指導御鞭達下さいました富田先生に感謝します。出版前に研究成果を御送り下さった森先生・岡本氏及び川崎（恭）先生に感謝します。また、度々討論して下さいました研究室の方々（蔵本，富田，阿部，小川（多），川崎（和）の各氏）に謝意を表します。

ここでは K. Kawasaki<sup>3)</sup> にならって (2.14) を導いてみる。これによると表面上高次の時間相関関数を対相関に分解する操作 (2.11) を経ず、普通の RPA の範囲内で (2.14) が得られたように見える。(2.8) の  $S^+(t)$ ,  $S^0(t)$  に夫々

$$S_{\mathbf{k}}^+(t) = E_{\mathbf{k}}(t) S_{\mathbf{k}}^+ + f_{\mathbf{k}}'(t) \quad (\text{A1})$$

$$S_{\mathbf{k}}^0(t) = \theta_{\mathbf{k}}(t) S_{\mathbf{k}}^0 + g_{\mathbf{k}}'(t) \quad (\text{A2})$$

を代入すると integrand の部分 (2.9) が書きなおされて

$$\begin{aligned} (\text{第2項の integrand}) &= \theta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(t-\tau) E_{\mathbf{k}}(\tau) \\ &\times \frac{(S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^0, S_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^0, S_{\mathbf{q}'}^+, S_{-\mathbf{k}}^-)}{(S_{\mathbf{k}}^+, S_{-\mathbf{k}}^-)} + h_{\mathbf{q}}'(t) \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

となるから (A4) に対して static な 4 体相関を RPA によって対相関の積に分解すれば (2.14) が得られる。ここで  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$ , は高次の時間相関関数から項である。

## 参 考 文 献

- 1) J. Villain, J. Phys. 26 (1965) 405.
- 2) H. S. Bennett and P. C. Martin, Phys. Rev. 138 (1965) A 608
- 3) K. Kawasaki, J. Phys. Chem. in Solids 28 (1967) 1277.
- 4) W. Marshall, Proc. Conf. On Critical Phenomena (N. B. S. Publication, Washington, D. C., 1966), 135.
- 5) R. Brout, Phys. Letter 24A (1967) 117.
- 6) H. Mori and H. Okamoto, Phys. Letter 26A (1968) 249.

- 7) J. L. Beeby and J. Hubbard, Phys. Letter 26A (1968) 376.
- 8) H. Okamoto and H. Mori, Phys. Letter 27A (1968) 183.
- 9) K. Kawasaki, Solid State Comm. 6 (1968) 57.
- 10) K. Tomita, in preparation
- 11) H. Mori and H. Okamoto, preprint.
- 12) K. Kawasaki, preprints,
- 13) K. Tomita and T. Kawasaki, in preparation.
- 14) L. P. Kadanoff et al, Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 395.
- 15) R. A. Ferrell et al Phys. Rev. Letters 18 (1967) 891.
- 17) J. Villain, Physica Status Solidi 19 (1967) 767.  
J. de physique 29 (1968) 321.
- 16) B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 700.
- 18) H. Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965) 423.
- 19) K. Tomita and M. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 29 (1963) 528.
- 20) R. Kubo, J. Phys. Soc. of Japan 12 (1957) 570.
- 21) See for example P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Company, New York (1953).
- 22) H. Mori and K. Kawasaki, Prog. Theor. Phys. 27 (1962) 529.
- 23) B. J. Berne, J. P. Boon and S. A. Rice, J. Chem. Phys. 45 (1966) 1086.  
J. A. Tjon, Phys. Rev. 143 (1966) 259.
- 24) L. P. Kadanoff and G. Baym, Quantum Statistical Mechanics, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1962.
- 25) P. Resibois and M. De Leener, Phys. Rev. 152 (1966) 305, 318.

川崎辰夫

Phys. Lett. 25A (1967) 65.

P. Borckmans and D. Walgraef, Physica 35 (1967) 80.

Phys. Rev. 167 (1968)

282.

26) S. I. Kubarev, Soviet Physics-Solid State 9 (1967)  
305.

S. I. Kubarev and O. A. Ponomarev, Phys. Lett. 26A  
(1968) 633.

27) R. H. Kraichnan, J. of Fluid Mech. 5 (1959) 497.

A. Janner, L. Van Hove and E. Verboven, Physica 28  
(1962) 1341.

28) K. Kawasaki and H. Mori, Prog. Theor. Phys. 28 (1962)  
690.

T. Oguchi and I. Ono, J. Phys. Soc. of Japan 21  
(1966) 2178.

K. Kawasaki, Prog. Theor. Phys. 38 (1967) 1052.

その他に和文の文献が多数存在する。