

# Superfluid Vortex Trapping Impurity Atoms

名大理 大 見 哲 巨  
\* 碓 井 恒 丸

(7月22日受理)

## § 1. ま え が き

われわれは、基研モレキュール型研究計画のひとつのテーマとして、high inhomogeneous condensate の物理をとりあげている。その典型的なひとつの対象として vortex line を考える。液体ヘリウムの場合、その大づかみの性質は既にわかっているし、また不完全ボーズ気体について理論的な計算はかなりくわしく行われているが、ここでとりあげたのは neutral impurity (特に  $\text{He}^3$ ) が vortex line につかまる話である。

$\text{He}^3$  原子が、vortex line をつくっている condensate 同様 angular momentum  $\hbar$  をもっているならば全系の Kinetic energy を小さくするため  $\text{He}^3$  は  $\text{He}^4$  と入れかわって vortex の中心から離れていくであろう。しかし角運動量が零ならば位置エネルギーの小さな場所に来る、それは相互作用が effectively repulsive であることから  $\text{He}^4$  密度の小さな場所である。vortex の芯では、condensate の振巾、位相ともにはげしい変化をしているから通常の2流体概念は成立していないであろう。しかし仮にそれが成立しているものとするれば芯に近づくとともに(あまり  $T_\lambda$  に近くない限り)全密度が減少することが結論される。<sup>\*</sup>

このことが実際にも定性的に正しいものとするれば  $\text{He}^3$  は芯に trap されることになる。そして芯は構造変化を起し、それがまた dynamical な性質にも反映してくるであろう。

\*) stationary かつ温度一定では

$$d\rho/\rho = -(\partial\rho_s/\partial p)_T d v_s^2/2 \quad \text{が成立する。}$$

実際の実験条件では、容器を廻転させて渦糸をつくる際、渦糸が中心に一本しか存在しない時の廻転角速度は余りに小さく、一般には、多数本の渦糸が一様に分布して容器の角速度で廻転している状況が実現さえる。このとき  $\text{He}^3$  および常流体は容器および渦糸群とともに剛体的に廻転している。

そこでわれわれは、 $\text{He}^3$  が一本の渦糸につかまって、その軸のまわりの角運動量零の状態に存在する場合のエネルギーを一方で考え、これと比較すべきものとして容器の角速度で廻転している境界条件のもとでの free state にある  $\text{He}^3$  のエネルギーを考える。後者は注目している渦糸とともに運動している系に乗って考えれば渦糸を中心として同じ角速度で廻転している状態になるが、廻転運動による kinetic energy は、小さい。静止している  $\text{He}^4$  の系に  $\text{He}^3$  を入れた時のエネルギーのみを考えればよい。

## § 2. Dilute gas 近似

2.1  $\text{He}^3$  原子が1個だけ存在し、それが vortex line にそって一様に分布したとする。 $\text{He}^4$  原子の数を  $N$  個とすれば system の波動関数は、Hartree 近似で

$$\Psi(\vec{X}, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N) = \psi(\vec{X}) \prod_{i=1}^N \varphi(\vec{X}_i) \quad (1)$$

$\psi(\vec{X}) \equiv \psi(r) : \text{He}^3$  の波動関数

$\varphi(\vec{X}) \equiv F(r) e^{i\theta} : \text{He}^4$  の波動関数

と書ける。ただし  $r, \theta, z$  は vortex line を軸とする

円筒座標

Hamiltonian は

$$H = -\frac{\nabla^2}{2m_3} - \frac{1}{2m_4} \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 + g' \sum_{i=1}^N \delta(\vec{X} - \vec{X}_i) + \frac{1}{2} g \sum_{i \neq j} \delta(\vec{X}_i - \vec{X}_j) \quad (2)$$

$$g = \frac{2\pi f}{m_4} \quad g' = \frac{2\pi f}{\frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}} \quad f : \text{scattering amplitude}$$

で与えられる。

$(\Psi|H|\Psi)$  をつくり  $(\Psi|\Psi) = 1$  の制限をつけ、 $\psi(r)$  及び  $F(r)$  で変分をとると

$$-\frac{1}{2m_3} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi + g' N F^2 \psi = \epsilon_3 \psi \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m_4} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) F + (gN F^2 + g' \psi^2) F \\ & = \epsilon_4 F \end{aligned} \quad (4)$$

(3) (4) は数値的にしか解けないので、さらに変分関数の形を仮定する。

(4) において  $\psi^2 = 0$  とすれば、Pitaevskii<sup>1)</sup> 方程式となり、これは数値的に解かれている。

それは近似的に

$$F \propto \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} \quad r_0^2 = \frac{1}{2m_4 n_0 g}$$

と表わされる (Fetter<sup>2)</sup>)

$H_e^3$  が vortex line に bind されたとすれば、 $H_e^4$  との斥力により core の半径が大きくなるであろう。そこで core の半径  $d$  を変分 parameter として

$$F = \left[ \ell \left\{ \pi R^2 - 2\pi d^2 \ln \left( \frac{R}{d} \right) \right\} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}} \quad (5)$$

と仮定する。ただし、system を円筒形とし、その半径を  $R$ , vortex line にそった長さを  $\ell$  とする。

次に (3) 式から  $r \rightarrow 0$  の時  $F^2 \rightarrow 0$  であるから、 $\psi \rightarrow C \left( 1 - \frac{m_3 \epsilon_3}{2} r^2 \right)$  であることがわかる。

これより

$$\psi(r) = c e^{-a r^2} \quad (6)$$

と仮定する。a は変分 parameter

$$C = n_3 \cdot \frac{2a}{\Pi} \quad n_3 = \frac{1}{\ell} \quad : \quad \text{He}^3 \text{ の line density}$$

変分関数を上のようきめ  $(\Psi | H | \Psi)$  を計算する。

i)  $\text{He}^4$  の kinetic energy :  $K_4$   $\frac{d}{R}$  の order の項は落す

$$\begin{aligned}
 & - \frac{N \ell}{2m_4} \int_0^R F(r) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) F(r) 2\pi r dr \\
 & = \frac{\Pi n_0}{2m_4} \ell \left( 2 \ell n \frac{R}{d} + \frac{1}{2} \right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$n_0 = \frac{N}{\ell \Pi R^2}$$

ii)  $\text{He}^4$  の interaction energy :  $U_{4-4}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{N(N-1)}{2} g \ell \int_0^R F^4(r) 2\pi r dr \\
 & = \frac{N(N-1)}{2} g \frac{1}{V} + \frac{g}{2} n_0^2 \ell \Pi d^2 \quad (8)
 \end{aligned}$$

$\frac{N(N-1)}{2} g \frac{1}{V}$  は  $N$  個の  $\text{He}^4$  atom が一様に分布した時の energy で energy はそこからはかることにする。

iii)  $\text{He}^3$  の kinetic energy :  $K_3$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\ell}{2m_3} \int \psi(r) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r) 2\pi r dr \\
 & = \ell n_3 \frac{a}{m_3} \quad (9)
 \end{aligned}$$

iv)  $\text{He}^3, \text{He}^4$  の interaction energy :  $U_{3-4}$

$$\begin{aligned}
 & \ell N g' \int f^2(r) \psi^2(r) 2\pi r dr \\
 & = \ell n_3 n_0 g' \left\{ 1 - 2a d^2 e^{2ad^2} E_1(2ad^2) \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

以上の結果から vortex line の単位長さの energy  $E$  は,

$$E = n_3 f A(x, y) + B(y) \quad (11)$$

$$A(x, y) = n_0 \cdot \frac{2\pi(m_3+m_4)}{m_3 m_4} [1 + xy - x e^x E_1(x)]$$

$$B(y) = \frac{n_0 \pi}{m_4} \left[ \ell n \left| R \sqrt{2m_3 n_0 g'} \right| 1 + \frac{1}{2} \ell n y \right. \\ \left. + \frac{m_4}{2(m_3+m_4)} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \right]$$

で与えられる。

$$\text{ただし, } x = 2ad^2 \quad y = \frac{1}{2m_3 n \cdot g' d^2}$$

(11) 式を  $x, y$ , で変分すると

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$n_3 f \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$n_3 f \ll 1$  の場合に上の式を解く。

$$x = x_0 + n_3 f x_1 + (n_3 f)^2 x_2 + \dots$$

$$y = y_0 + n_3 f y_1 + (n_3 f)^2 y_2 + \dots$$

(これにともなって  $a$  及び  $d$  も展開しておく)

と展開し逐次近似すると,

$$y_0 = \frac{m_4}{m_3+m_4} \quad \text{より} \quad d_0^2 = 2r_0^2$$

この時  $B$  は

$$B(y_0) \simeq \frac{\pi n_0}{m_4} \ell n \left| \frac{1.50 R}{r_0} \right|$$

これは純粋な  $H_e^4$  の場合変分関数を (5) のように仮定した時の単位長さあ

たりの vortex line の minimum energy をあたえ Fetter の値 (1.65)<sup>2)</sup> と Pitaevskii の値 (1.46)<sup>1)</sup> のあいだに出ている。

次に  $x_0$  は (12) から

$y_0 = (1+x) e^x E_1(x) - 1$  の根として求まる。数値計算すると  $x_0 \simeq 0.312$  .

この時, A は,

$$n_3 f A(x_0, y_0) = n_3 n_0 g' \times 0.804$$

これは vortex の core 半径を  $d_0$  にとめた時の  $H_e^3$  の energy を表わし,  $H_e^3$  が一様にひろがった時の energy (単位長さ) にくらべて 0.196 だけさがっている。

また, この時の core 半径と  $H_e^3$  のひろがりとの比は  $\frac{1}{\sqrt{a_0 d_0}} \simeq 2.5$  と interaction の強さに関係のない量で与えられる。

次に

$$y_1 = -4 \frac{m_4^2}{m_3(m_3+m_4)} x_0$$

$$x_1 = \frac{4 \frac{m_4^2}{m_3(m_3+m_4)} x_0}{1 + \frac{1}{x_0} - \frac{2+x_0}{1+x_0} (y_0+1)}$$

より  $E_{\min}$  も  $n_3 f$  で展開しておく

$$E_{\min} = E_0 + n_3 f E_1 + (n_3 f)^2 E_2 + \dots \quad (14)$$

$$E_0 = B(y_0) \quad E_1 = A(x_0, y_0)$$

$$E_2 = -4\pi n_0 \frac{m_4}{m_3} x_0^2$$

$$E_3 = \frac{4}{3} \frac{\pi n_0}{m_4} \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^2 \left[\frac{m_4}{m_3} 16 x_0^3 - 3 x_0 x_1\right]$$

また,  $a, d$  についても  $n_3 f$  の一次まで求めると

$$d = d_0 + n_3 f d_1 \quad (15)$$

$$d_1 = 2 x_0 \cdot \frac{m_4}{m_3} d_0 = 0.832 d_0$$

$$a = a_0 + n_3 f a_1 \quad (16)$$

$$a_1 = - a_0 x_0 \cdot \frac{m_4}{m_3} \frac{-m_3 + 3 m_4 x_0 + m_4 x_0^2}{(m_3 + m_4) + 2 m_4 x_0 - m_4 x_0^2}$$

$$= - 0.0516 a_0$$

このように  $n_3$  の影響を考慮することにより, core の半径も  $H_e^3$  自身のひろがりも大きくなるが, core 半径の増加に比し,  $H_e^3$  のひろがりの増加は極めて小さい。

2.2  $H_e^3$  atom が vortex line にそって一様に分布しないで有限のひろがりを持つかどうか調べる。それには次のような近似を用いる。

$H_e^3$  の波動関数を, normalization を考慮して,

$$\psi(r, z) = \left( \left( \frac{2b}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} a \right)^{\frac{1}{2}} e^{-a r^2 - b z^2} \quad (17)$$

また, これに対応して  $H_e^4$  の波動関数は,

$$F(r, z) = \left[ \ell \{ \pi R^2 - 2 \pi d^2 \ell n (R/d) \} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}} \quad (18)$$

ただし,  $a, d$  は (13) (16) を用い

$$a = a_0 + n_3(z) f a_1$$

$$d = d_0 + n_3(z) f d_1$$

$$n_3(z) = \int_0^\infty \psi(r, z)^2 2 \pi r dr$$

$$= \left( \frac{2b}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-2 b z^2}$$

とし、 $b$ を変分 parameter にとる。

上の近似が成り立つのは  $n_3(z)f \sim \sqrt{b} f \ll 1$  及び  $H_e^3$  の  $r$  方向のひろがり  $1/\sqrt{a}$  にくらべ  $z$  方向のひろがり  $1/\sqrt{b}$  が大きい場合 ( $a \gg b$ ) であると考えられる。

(17) (18) を用いると

$$K_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Pi n_0}{2m_4} \left( 2 \ell \ln \frac{R}{d} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Pi}{4} \frac{n_0}{m_4} (\dot{d})^2 \right] dz \quad (19)$$

$$U_{4-4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g}{2} n_0^2 \ell \Pi d^2 dz \quad (20)$$

$$U_{3-4} = \int_{-\infty}^{\infty} n_3(z) n_0 g' \left[ 1 - 2a d^2 e^{2ad^2} E_1(2ad^2) \right] dz \quad (21)$$

$$K_3 = \int_{-\infty}^{\infty} n_3(z) \left[ \frac{a}{m_3} + \frac{2b^2 z^2}{m_3} + \frac{1}{2m_3} \cdot \frac{\dot{a}}{a} b z + \frac{1}{8m_3} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] dz \quad (22)$$

ただし dot は  $z$  微分を表わす。

上の式で  $H_e^3$  の  $z$  方向へのひろがりを有限にしたことにより直接でてくる  $n_3(z) \cdot \frac{2b^2 z^2}{m_3}$  と、 $a$  及び  $d$  の  $z$  dependence のため現れた  $z$  微分を含む項をのぞけば、(14) 式の  $n_3$  に  $z$  dependence を与えたのと同じ式になる。それを  $n_3(z) f$  について展開し、 $z$  積分を行い  $b$  を含む項だけをとると、

$$E_2 f^2 \sqrt{\frac{b}{\Pi}} + E_3 \frac{2}{\sqrt{3} \Pi} b f^3 + \dots \quad (23)$$

また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} n_3(z) \cdot \frac{2b^2 z^2}{m_3} dz = \frac{b}{2m_3} \quad (24)$$

$z$  微分を含む項はすべて (24) と比較すると  $b^{\frac{1}{2}} f$  について higher order になる。

(23) + (24) を  $b$  で変分する。



$$\begin{aligned}
\sqrt{b} f &= \frac{|E_2| / 2\sqrt{\Pi} f^3}{\frac{1}{2m_3} + E_3 \frac{2}{\sqrt{3\Pi}} f^3} \\
&= \frac{4\sqrt{\Pi} \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^2 x_0^2 n_0 f^3}{\frac{m_4}{m_3} + \frac{16}{3} \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^2 \left[\frac{m_4}{m_3} 16 x_0^3 - 3 x_0 x_1\right] n_0 f^3}
\end{aligned} \tag{25}$$

この結果：

$\sqrt{b} f \sim n_0 f^3$  を見ると  $\sqrt{b} f \ll 1$  は, dilute gas 近似：  
 $n_0 f^3 \ll 1$  と等価であることがわかる。

また (16) (25) より

$$\frac{b}{a} \simeq 16 \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^2 x_0^3 n_0 f^3 \ll 1 \tag{26}$$

となり上で用いた近似は保証される。

### § 3. Dense system

ハミルトニアンは (2) を用い,  $\frac{n_0 g}{m} = c^2$  で液体  $\text{He}^4$  の音速を与えるように  $f$  をとると,  $n_0 f^3 = 11.8$  となる。

したがって, dilute gas の時のような近似は出来ない。

$\text{He}^3$ ,  $\text{He}^4$  の波動関数を (17) (18) と同じ形にとる。

$$\psi(r, z) = \left( \left(\frac{2b}{\Pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} 2a \right)^{\frac{1}{2}} e^{-ar^2 - bz^2} \tag{17'}$$

$$F(r, z) = \left[ \ell \{ \Pi R^2 - 2\Pi d^2 \ell n(R/d) \} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}} \tag{18'}$$

ただし, ここでは  $a, b$  は変分 parameter, また, core 半径  $d$  は,  $\text{He}^3$  の  $z$  方向の line density に比例して大きくなるとし,

$$d = d_0 (1 + c e^{-2 b z^2}) \quad (27)$$

c は変分 parameter とする。さらに, (26) 式と  $n_0 f^3 \rightarrow \infty$  の時には,  $\frac{b}{a} \rightarrow 1$  になると考えられるので,  $\frac{b}{a}$  に対する内挿式を次のようにつくる。

$$\frac{b}{a} = \frac{16 \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^2 x_0^3 n_0 f^3}{1 + 16 \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^2 x_0^3 n_0 f^3} \quad (28)$$

$$n_0 f^3 = 11.8 \text{ の時, } \frac{b}{a} = 0.910$$

(27) を (19) (20) (21) (22) ( $\dot{a} \equiv 0$ ) に入れ, それから, pure  $H_e^4$  の vortex line をつくるに要する energy を引きさると  $H_e^3$  を入れたことによる energy の変化が得られる。

$$\begin{aligned} E(a, c) = & n_0 g \frac{\Pi}{2} n_0 d_0^2 \left( 2c \left(\frac{\Pi}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} + c^2 \left(\frac{\Pi}{4b}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & - \frac{n_0 \Pi}{m_4} \int_{-\infty}^{\infty} \ln (1 + c e^{-2 b z^2}) dz \\ & + \frac{(\Pi)^{\frac{3}{2}}}{4} \frac{n_0 d_0^2}{m_4} b^{\frac{1}{2}} c^2 + n_0 g' \\ & - n_0 g' \left(\frac{2b}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2 b z^2} 2 a d^2 e^{2 a d^2} E_1(2 a d^2) dz \\ & + \frac{a}{m_3} + \frac{b}{2m_3} \end{aligned} \quad (29)$$

dimensionless の量

$$\alpha = 2 d_0^2 a \quad \beta = 2 d_0^2 b \quad \zeta = \frac{z}{d_0}$$

を導入し,

$$b = 0.910a \quad n_0 f^3 = 11.8 \quad \frac{m_4}{m_3} = \frac{4}{3}$$

等の数値を入れて整理すると,

$$\begin{aligned} \bar{E}(d, c) = n_0 g' [ & 1 + 0.0328 \alpha^{-\frac{1}{2}} c \\ & + 0.0116 \alpha^{-\frac{1}{2}} c^2 - 0.0185 \alpha^{-\frac{1}{2}} I_1(c) \\ & + 0.00527 \alpha^{\frac{1}{2}} c^2 - 0.564 I_2(\alpha, c) \\ & + 0.831 a ] \end{aligned} \quad (29')$$

$$I_1(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + c e^{-\zeta^2}) d\zeta$$

$$\begin{aligned} I_2(\alpha, c) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\zeta^2} \alpha (1 + c e^{-\zeta^2})^2 \times \\ \times \exp[\alpha (1 + c e^{-\zeta^2})^2] E_1[\alpha (1 + c e^{-\zeta^2})^2] \end{aligned}$$

この中で  $n_0 g'$  は  $H_e^3$  が一様にひろがった時の energy を与える。これからのエネルギーの低下 (単位  $n_0 g'$ ) を数値的に求めると下の表のようになる。

$\alpha$ c	0.2	0.25	0.3
1.0	0.275	<u>0.279</u>	0.277
1.5	<u>0.293</u>	<u>0.302</u>	<u>0.301</u>
2.0	0.279	<u>0.292</u>	<u>0.294</u>
2.5		0.260	

underline した6点をとってそこを通る二次曲面の方程式をきめ、その minimum を求める。

$$\bar{E}_{\min} = \bar{E}(0.274, 1.62) = n_0 g' (1 - 0.304) \quad (30)$$

$\alpha = 0.274$  より  $H_e^3$  の  $r$  方向へのひろがり  $d_0$  を単位として  $\frac{1}{\sqrt{a} d_0}$   
 $= 2.7$  また, core 半径は  $d/d_0 = 2.62$ ,  $H_e^3$  が vortex line に  
 bind されるかどうかという問題を調べるには,  $H_e^3$  が vortex line に  
 つかまった時と vortex core から十分遠く離れた時との energy 差すなわ  
 ち binding energy を求めなければならない。それには  $H_e^3$  を一様に分布  
 した  $H_e^4$  の中に入れた時の energy を求める必要がある。これは実験的に  
 はわかっている量であるが, ここでは今までやった近似と同じ程度の近似を  
 行って算出する。

Hamiltonian は (2) 波動関数は (1) と同じように Hartree 近似する。  
 ただし,

$$\psi(r) = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-br^2}$$

$$\varphi(r) = \left[ \frac{4\pi}{3} R^3 - 2c \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + c^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[ 1 - c e^{-ar^2} \right] \quad 1 \geq c \geq 0$$

system は球にとり  $R$  をその半径とし,  $(r, \theta, \varphi)$  の球座標を用いる。  
 $a, b, c$  を変分 parameter として minimum を求める。

$(\Psi | H | \Psi)$  を計算する。  $\frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{\Omega}$   $g$  は引いておく。

$$K_4 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} \frac{n_0 c^2}{m_4 a^{\frac{1}{2}}} \quad n_0 = \frac{N}{\Omega}$$

$$U_{4-4} = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{2n_0}{a^{\frac{3}{2}}} n_0 g \left( \frac{c^2}{2^{\frac{3}{2}}} - \frac{c^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^4}{32} \right)$$

$$K_3 = \frac{3b}{2m_3}$$

$$U_{3-4} = n_0 g' \left[ 1 - 2c \left( \frac{2b}{a+2b} \right)^{\frac{3}{2}} + c^2 \left( \frac{b}{a+b} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

dimensionless の量

$$x = \frac{b}{a} \quad y = \frac{a}{n_0^{\frac{2}{3}}} \quad \text{を導入すると}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, y, c) &= K_4 + U_{4-4} + K_3 + U_{3-4} \\ &= n_0 g' \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\Pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\Pi f n_0^{\frac{1}{3}}} \frac{m_3}{m_3+m_4} \cdot \frac{c^2}{y^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{1}{2\Pi f n_0^{\frac{1}{3}}} \frac{m_4}{m_3+m_4} x y + 4\Pi^{\frac{3}{2}} \frac{m_3}{m_3+m_4} K(c) y^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \left. - 2c \left( \frac{2x}{2x+1} \right)^{\frac{3}{2}} + c^2 \left( \frac{x}{x+1} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$K(c) \equiv \frac{e^2}{2^{\frac{3}{2}}} - \frac{c^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^4}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = 0 \quad \text{より}$$

$$y = 2\Pi n_0^{\frac{1}{3}} f \frac{m_3+m_4}{m_4} \left( 2c \frac{2(2x)^{\frac{1}{2}}}{(2x+1)^{\frac{5}{2}}} - c^2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial y} = 0, \quad \text{より}$$

$$x = \Pi^{\frac{3}{2}} \frac{m_3}{m_4} \left( \frac{c^2}{2^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}} + 8\Pi n_0^{\frac{1}{3}} f K(c) \cdot \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (33)$$

(32), (33) 式をグラフにかくと Fig. 1 のようになる。

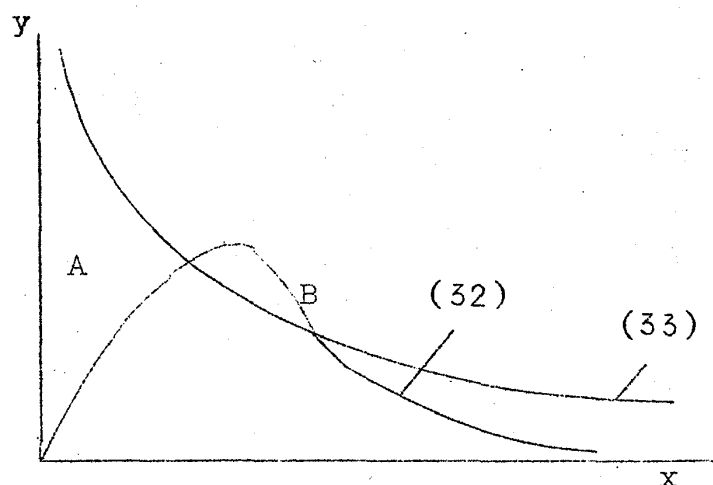


Fig. 1.

$n_0 f^3 = 11.8$ ,  $\frac{m_3}{m_4} = \frac{3}{4}$  を入れ,  $c$  を 0 から 1 まで 0.1 きざみに与えて, A 点・B 点における  $x, y$  を数値的に求める。

その時の energy,  $\bar{E}(x, y, c) - n_0 g'$  を  $n_0 g'$  を単位として求めると Fig. 2 のようになる。

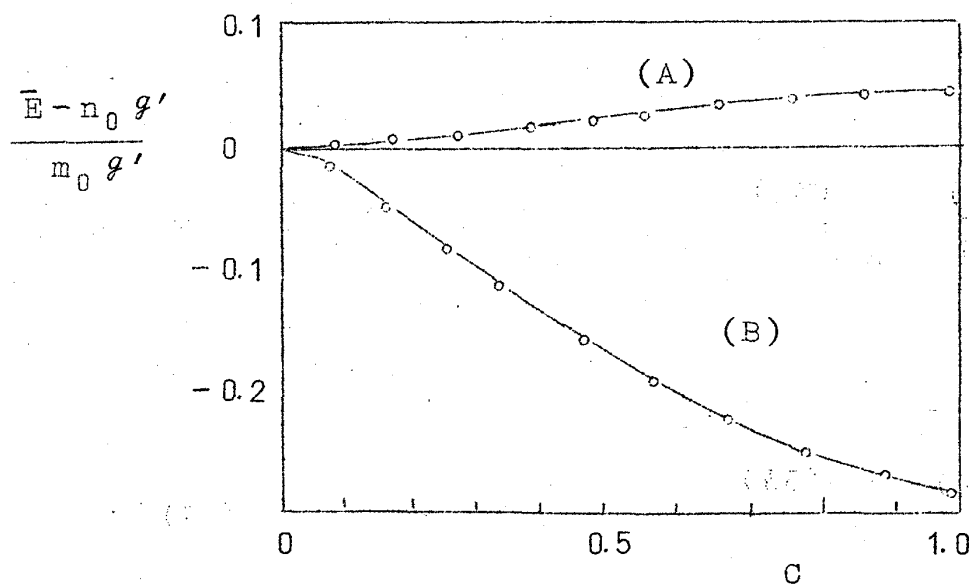


Fig. 2.

$x = 1.0$   $y = 4.67$  ( $a \cong b = \frac{1}{(2.47 d_0)^2}$ )  $c = 1$  の時の  $-0.234$

が minimum である。この時 energy ( $\bar{E}_{N,B}$ ) と vortex line に bind された時の energy ( $\bar{E}_B$ ) と比較する。(単位  $n_0 g'$ )

	$\bar{E}_B$ ( $\alpha=0.25$ $c=1.5$ )	$\bar{E}_{N,B}$	$\bar{E}_B - \bar{E}_{N,B}$
$K_4$	-0.063	0.041	-0.104
$U_{4-4}$	0.151	0.182	-0.031
$K_3$	0.208	0.279	-0.071
$U_{3-4}$	1-0.597	1-0.735	0.138
$\bar{E}$	1-0.302	1-0.234	-0.068

bind された時の  $K_4$  が負に出ているのは core の半径が大きくなることによって Kinetic energy を得しているからである。

$\bar{E}_B$  の minimum (30) を用いると binding energy は,  $0.07 n_0 g'$  ( $= 2.23^\circ K$ )

上の表から解るように,  $H_e^4$  の流れのない所にある  $H_e^3$  を流れの非常に大きい core の中心に持ち込むことによる  $H_e^4$  の kinetic energy の得が比較的大きく binding energy に寄与している。

#### § 4. saturation の問題

§ 3 までは,  $H_e^3$  atom の数が少なく, それぞれが孤立している場合を扱ってきた。  $H_e^3$  atom の数が増してくるとおたがいの斥力を感じ出し, エネルギーは上ってくる。

interaction energy を求めるには  $H_e^3$  atom の  $z$  方向への波動関数のひろがりをもっと正しく考えなければならない。

$H_e^3$  atom の localize した点から十分離れた所では  $n_3(z)$  は小さくなり core の半径は pure  $H_e^4$  の時のものに近づく, そこで vortex line

の構造の  $z$ -dependence を無視すると  $H_e^3$  に働く effective potential は  $z$ -independent になる。

したがって、波動関数は  $a, b, a_0 \dots$  等 § 2 で求めたものを用いて、  
 $\psi(r, z) = c e^{-a_0 r^2 - \kappa z}$  ( $z \gg \frac{1}{\kappa}$ ) の形になっている筈である。

$\kappa \sim \sqrt{b}$   $c$  は  $z = \frac{1}{\sqrt{b}}$  の時 (17') の与える  $n_3(z)$  と上の式から与えられる  $n_3(z)$  を等しいとおいてきめる。

$$\psi(r, z) = \left( \left( \frac{2b}{\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} 2a_0 \right)^{\frac{1}{2}} e^{-a_0 r^2 - \sqrt{b} z} \quad \left( z \gg \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \quad (34)$$

$H_e^3$  atom の個数を単位長さあたり  $N_3$  とし、それが等間隔に並んでいるものとして interaction energy を求める。interaction は  $g'' \delta(x-x')$

$$g'' = \frac{4\pi f}{m_3} \text{ とおく}$$

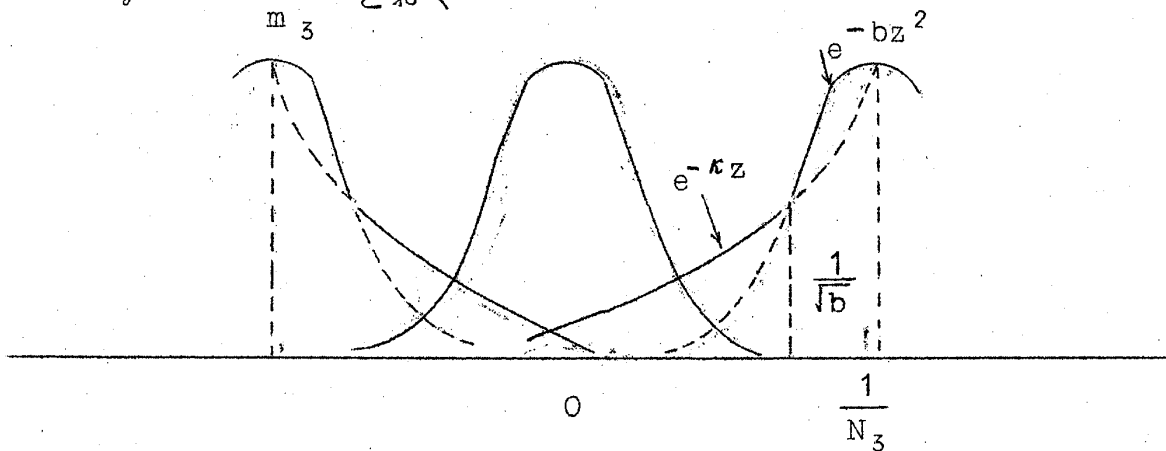


Fig. 3

(17') で表わされる 0 に localize した  $H_e^3$  と nearest-neighbor との interaction を計算する (Fig. 3)

$$g'' \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} 2\pi r dr \left( \frac{2b}{\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} 2a e^{-a r^2 - b z^2} \times \\ \times \left[ \psi^2\left(r, \frac{1}{N_3} - z\right) + \psi^2\left(r, \frac{1}{N_3} + z\right) \right]$$



$$= n_0 g'' \cdot \frac{(2e)^2 \sqrt{b} 4a a_0}{\Pi^{\frac{3}{2}} n_0 (a+a_0)} e^{-2\sqrt{b}/N_3} \quad (35)$$

(35) の interaction energy が binding energy (§3 で求めた) と等しくなるまで  $H_e^3$  を入れるとそれ以上  $H_e^3$  を加えても vortex line には bind されなくなる。その時の  $H_e^3$  の line density は  $N_3$  (saturate)  $= \frac{\sqrt{b}}{1.9}$  で与えられる。

### § 5. vortex line の tension

単位長さあたり  $N_3$  の  $H_e^3$  atom が vortex line につかまっている時 total energy は pure  $H_e^4$  vortex line 単位長さあたりの energy

$$\epsilon = \frac{\Pi n_0}{m_4} \ln \left( \frac{1.50R}{r_0} \right) \text{ 及び (30) (35) より,}$$

$$\bar{E} = \ell \epsilon + N_3 \ell n_0 g' \left( -0.304 + \frac{g''}{g'} \cdot \frac{(2e)^2}{\Pi^{\frac{3}{2}}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{b} 4a a_0}{m_0(a+a_0)} \cdot e^{-2\sqrt{b}/N_3} \right) \left( \frac{\sqrt{b}}{N_3} > 1.9 \right) \quad (36)$$

saturate するまでは,  $\ell$  を変化させた時  $H_e^3$  の total number,  $N_3 \ell$  は一定であるから, tension (T) を求めると

$$T = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \ell} = \epsilon - n_0 g'' \cdot \left( \frac{2e}{\Pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{8baa_0}{n_0(a+a_0)} e^{-\frac{2\sqrt{b}}{N_3}} \quad (37)$$

vortex line の vibration を考えると (37) の tension に対する影響以外に inertia term にきいてくることも考えられるが, vortex line の振動のような macro な運動に対しては, その影響は無視出来る。

振動の dispersion relation は,

$$\omega = \pm \frac{1}{2\Pi \hbar f_s} T k^2 \quad (38)$$

line density が saturation の値に近くなると  $H_e^3$  の分布の仕方に多

体効果がきいてきて (36) (37) は正しくないかもしれない。しかし、ここでは、その効果を見捨てる近似をとって、(37) に、 $N_3$  (saturate) を入れると、pure  $\text{He}^4$  の tension にくらべてその 40% 程度小さな値を与える。また、saturate したのちの tension は  $\ell$  の変化に対して  $\ell N_3 = \text{一定}$  とおいては得られない。振動の周期と、core の外にある  $\text{He}^3$  が core に落ちこむ時間とを比較する必要がある、その効果によっては、vortex line の振動と  $\text{He}^3$  が core に入出入りする運動が couple することがあり、振動は複雑になる。

## § 6. ま と め

dilute system においては vortex line に bind された  $\text{He}^3$  は line に直角な方向に core 半径 2.5 倍程度のひろがりを持ち、 $n_0 f^3$  についての次の order の影響を考慮しても大きな変化はない (16)。また、vortex line にそった方向には、直角方向のひろがりとの比をとって考えると  $\frac{1}{(n_0 f^3)^2}$  に比例し dilute になればなるほど大きな範囲にひろがる。

$\text{He}^3$  の存在による core 半径の変化は  $n_0 f^3$  の一次からあらわれ、その係数は比較的大きくである (15)。

dense system では、 $m_0 f^3$  を液体  $\text{He}^4$  の sound velocity を与えるようにとったが、このとり方が、適当であるとはいえない。

しかし、 $\text{He}^3$  のひろがり、vortex line にそった方向と直角方向とでほとんど等しく、その大きさが純粋な  $\text{He}^4$  system における core 半径の 2~3 倍になっているという結論は、実際の  $\text{He}^3$ ,  $\text{He}^4$  system でもだいたい正しいのではないかと思われる。また、binding energy の大きさそのものはそれほど意味はないであろうが、 $\text{He}^4$  の kinetic energy の変化が比較的大きく効くという定性的なことは正しいのではないか。

## 文 献

- 1) V. L. Ginzburg and L. P. Pitaevskii, JETP 7 (1968)  
858
- 2) A. L. Fetter, Phys. Rev, 138 (1965) A 429
- 3) H. E. Hall, Proc. Roy. Soc., London A 245 (1958) 546  
E. S. R. Gopal, Ann. Phys. 29 (1964) 350