Magneticな不純物がある超伝導体の order parameter の空間的変化

— 多時間 Green 関数の方法 —

東教大理　北 村 豊 平

（10月15日受理）

§1. 序

前の論文（以下Ⅰと記す）[1]で，1個の magnetic impurity による，Order parameter $\triangle(r)$ の空間的変化を遷移温度 T_c の極近傍で，Jの3次まで議論した，impurity spin の dynamics をとり入れることにより，J^3 の項に Kondo 効果が現われ，$\log$ 返散が起こることを述べたが，Jの高次の振舞いをさらに検討する必要がある。

spin の dynamics をとり入れた Doniach の方法[2]，Abrikosov の方法[3]等は取扱いが複雑であり，超伝導体に拡張することは一層，複雑になろう，最近，Kawamura[4]は Temparature Green 関数を，δ —関数を導入して，2時刻から，多時刻に拡張し，systematic に lower divergent term まで拾うことに成功した，彼の方法の essential なことは，

$$\ll T\{A(\tau_{i-1}),\ B(\tau_{i-1}),\ C(\tau_{i-2}),\ \cdots,\ D(\tau)\}\gg$$

$$=\int_{-\beta}^{\beta}\delta(\tau_i-\tau_{i-1})\ll T\{A(\tau_i),\ B(\tau_{i-1}),\ C(\tau_{i-2}),\cdots,D(\tau)\}\gg d\tau_i \qquad (1)$$

として同時刻の electron field operator と，impurity spin operator を，δ —関数を導入して，2時刻に分離し，electron field operator の運動だけを逐次追求し，spin operator のみの Green 関数で記述し，その後，spin operator の運動をしらべることにある。

彼の論文では，Green 関数の self — energy part を定義して，検討しているが，空間的変化を問題にする限り，その方法は使えない，しかし，

彼の多時間的 Green 関数を，空間的変化を exact に取扱えるように，reformulate することにより，見やすくすることが出来る。即ち，s－d 相互作用の normal 状態の場合も，super 状態の場合も，systematic に議論出来，空間的変化を無視すれば，Kawamura の結論と一致する。また，この論文で明らかにするように，超伝導体の Order parameter の空間的変化について，most divergent term を拾うことは，容易に出来る。

以下§2では，多時間 Green 関数の方法で，$\hat{\Gamma}$－matrix を exact に求める。§3では，$\hat{t}$－matrix を導入し，most divergeut term を，$\triangle$の一次まで求める。§4では，I と平行して，order parameter の積分方程式をとき，$\triangle$の空間的変化を求める。

§2 $\hat{\Gamma}$ － matrix

I で扱ったように，Temparature Green 関数を考える。

$$\hat{G}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\begin{pmatrix}\mathcal{G}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), & \mathcal{F}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\\ \mathcal{F}^{+}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), & -\mathcal{G}_{\omega}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\langle\langle\phi_{\uparrow}(\mathbf{r});\phi^{+}_{\uparrow}(\mathbf{r}')\rangle\rangle_{\omega} & \langle\langle\phi_{\uparrow}(\mathbf{r});\phi(\mathbf{r}')\rangle\rangle_{\omega}\\ \langle\langle\phi^{+}_{\downarrow}(\mathbf{r});\phi^{+}_{\uparrow}(\mathbf{r}')\rangle\rangle_{\omega} & \langle\langle\phi^{+}_{\downarrow}(\mathbf{r});\phi_{\downarrow}(\mathbf{r}')\rangle\rangle_{\omega}\end{pmatrix} \quad (2)$$

この運動方程式は，

$$\left(i\omega+\frac{\nabla^{2}}{2m}\tau_{3}+\triangle(r)\tau_{1}\right)\hat{G}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{J}{2}\delta(\mathbf{r})\hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad \cdots\cdots (3)$$

となる。ここで，

$$\hat{\Gamma}(\chi,\chi')=\begin{pmatrix}\Gamma(\chi,\chi') & \Phi(\chi,\chi')\\ \Phi^{+}(\chi,\chi') & \Gamma^{+}(\chi,\chi')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\langle\langle\phi_{\uparrow}S_{z}+\phi_{\downarrow}S_{-};\phi^{+}_{\uparrow}(\chi')\rangle\rangle & \langle\langle\phi_{\uparrow}S_{z}+\phi_{\downarrow}S_{-};\phi_{\downarrow}(\chi')\rangle\rangle\\ \langle\langle\phi^{+}_{\downarrow}S_{z}-\phi^{+}_{\uparrow}S;\phi^{+}_{\uparrow}(\chi')\rangle\rangle & \langle\langle\phi^{+}_{\downarrow}S_{z}-\phi^{+}_{\uparrow}S_{-};\phi_{\downarrow}(\chi')\rangle\rangle\end{pmatrix} \quad (4)$$

である。$\hat{\Gamma}(\chi,\chi')$ を§1で述べた方法で，electron field operatorとspin operator の時刻を分離して，

$$\hat{\Gamma}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = T\sum_{\omega_1}\tilde{\Gamma}(\omega_1,\omega;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')$$

$$= T\sum_{\omega_1}\begin{pmatrix} \langle\langle\phi_\uparrow, S_z;\phi_\uparrow^+\rangle\rangle + \langle\langle\phi_\downarrow, S_-;\phi_\uparrow\rangle\rangle, & \langle\langle\phi_\uparrow, S_z;\phi_\downarrow(r')\rangle\rangle + \langle\langle\phi_\downarrow, S_-;\phi_\downarrow\rangle\rangle \\ \langle\langle\phi_\downarrow^+, S_z;\phi_\uparrow^+\rangle\rangle - \langle\langle\phi_\uparrow^+, S_-;\phi_\uparrow\rangle\rangle, & \langle\langle\phi_\downarrow^+, S_z;\phi_\downarrow(r')\rangle\rangle - \langle\langle\phi_\uparrow^+, S_-;\phi_\downarrow\rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega_1,\,\omega-\omega_1,\,-\omega} \qquad (5)$$

さらに，$\hat{\Gamma}(\omega_1,\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$ を，形式的に，次の様に書く，

$$\hat{\Gamma}(\omega_1,\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{pmatrix} \langle\langle\phi_\uparrow(\mathbf{r}), & -\langle\langle\phi_\downarrow(\mathbf{r}) \\ \langle\langle\phi_\downarrow^+(\mathbf{r}), & \langle\langle\phi_\uparrow^+(\mathbf{r}) \end{pmatrix}_{\omega_1} \begin{pmatrix} S_z;\phi_\uparrow^+(\mathbf{r})\rangle\rangle & S_z;\phi_\downarrow\rangle\rangle \\ -S_-;\phi_\uparrow^+(\mathbf{r}')\rangle\rangle & -S_-;\phi_\downarrow(\mathbf{r}')\rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega-\omega_1,\,-\omega} \qquad (6)$$

こうしておいて，右辺の左側の matrix に注目して，electron field operator の運動を繰り返し，追って行く。

$$\left(i\omega_1 + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(r)\tau_1\right)\tilde{\Gamma}(\omega_1,\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

$$= -\beta\,\delta_{\omega,\omega_1}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\langle\langle S_z\rangle\rangle_{\omega-\omega_1}$$

$$-\frac{J}{2}\delta(\mathbf{r})\begin{pmatrix} \langle\langle\phi_\uparrow S_z + \phi_\downarrow S_-, & \langle\langle\phi_\downarrow S_z - \phi_\uparrow S_\uparrow \\ \langle\langle\phi_\downarrow^+ S_z - \phi_\uparrow^+ S_-, & -\langle\langle\phi_\uparrow^+ S_z + \phi_\downarrow^+ S_+ \end{pmatrix}_{\omega_1} \begin{pmatrix} S_z;\phi_\uparrow^+\rangle\rangle & S_z;\phi_\downarrow\rangle\rangle \\ -S_-;\phi_\uparrow^+\rangle\rangle & -S_-;\phi_\downarrow\rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega-\omega_1,\,-\omega} \qquad (7)$$

ここで，右辺の第一項は，0である。第二項は，（1）式により，時間を分離する。今，簡単化するため，

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \phi_{\uparrow} S_z + \phi_{\downarrow} S_- \;; \quad \gamma^+ = \phi_{\uparrow}^+ S_z + \phi_{\downarrow}^+ S_+ \\
\varphi &= \phi_{\downarrow} S_z - \phi_{\uparrow} S_+ \;; \quad \varphi^+ = \phi_{\downarrow}^+ S_z - \phi_{\uparrow}^+ S_+
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (8)
$$

なる記号を導入すれば，（7）式は，次のように書きかえられる。

$$
\left(i\omega_1 + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(r)\tau_1 \right) \widetilde{\Gamma}(\omega_1, \omega;\, \mathbf{r}, \mathbf{r}')
= -\frac{J}{2}\,\delta(\mathbf{r})\; T \sum_{\omega_2} \widetilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega;\, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \qquad \cdots\cdots (9)
$$

ここで，

$$
\widetilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} \ll\gamma, & \ll\varphi \\ \ll\varphi^+, & -\ll\gamma^+ \end{pmatrix}_{\omega_2,\, \omega_1-\omega_2}
\begin{pmatrix} S_z\,;\phi_{\uparrow}^+\gg, & S_z\,;\phi_{\downarrow}\gg \\ -S_-\,;\phi_{\uparrow}^+\gg, & -S_-\,;\phi_{\downarrow}\gg \end{pmatrix}_{\omega-\omega_1,\, -\omega} \qquad \cdots\cdots (10)
$$

こうして，次々と$\begin{pmatrix} \ll\gamma, & \ll\varphi \\ \ll\varphi^+, & -\ll\gamma^+ \end{pmatrix}$中の electron field operator の運動を追うことにより，

$$
\begin{aligned}
&\left(i\omega_2 + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(r)\tau_1 \right) \widetilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&= -\beta\,\delta_{\omega_2,\omega}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \begin{pmatrix} \ll_{\uparrow} S_z & -\ll_{\uparrow} S_+ \\ \ll_{\downarrow} S_z & -\ll_{\downarrow} S_+ \end{pmatrix}_{\omega_1-\omega} \begin{pmatrix} S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg \\ -S_{-\uparrow}\gg & -S_{-\downarrow}\gg \end{pmatrix}_{\omega-\omega_1} \\
&\quad - \frac{J}{2}\,\delta(\mathbf{r})\; T \sum_{\omega_3} \widetilde{\Gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (11)
$$

ここで，右辺第一項は，matrix 演算は，普通に行い，$\ll_{\uparrow}$と Couple するのは，$\uparrow\gg$のみとする。すなわち$\ll\uparrow \cdots \downarrow\gg = 0$と定義する。この

物理的意味は, spin が Conserve されることである。また,

$$\widetilde{\Gamma}(\omega_3,\omega_2,\omega_1,\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')=\begin{pmatrix}\ll\gamma & \ll\varphi\\ \ll\varphi^+, & -\ll\gamma^+\end{pmatrix}_{\omega_3,\,\omega_2-\omega_3}$$

$$\begin{pmatrix}S_z, & -S_+\\ -S_-, & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_1-\omega_3}\begin{pmatrix}S_z;\phi_\uparrow^+\gg, & S_z;\phi_\downarrow\gg\\ -S_-;\phi_\uparrow^+\gg, & -S_-;\phi_\downarrow\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1,\,-\omega} \quad\cdots\cdots(12)$$

である。一般的に,

$$\left(i\omega_i+\frac{\nabla^2}{2m}\tau_3+\triangle(\mathbf{r})\tau_1\right)\widetilde{\Gamma}(\omega_i,\omega_{i-1},\cdots,\omega_2,\omega_1,\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

$$=-\beta\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta_{\omega_i,\omega}\begin{pmatrix}\ll_\uparrow S_z, & -\ll_\uparrow S_+\\ \ll_\downarrow S_z, & -\ll_\downarrow S_+\end{pmatrix}_{\omega_{i-1}-\omega_i}\begin{pmatrix}S_z, & -S_+\\ -S_-, & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}}$$

$$\cdots\begin{pmatrix}S_z, & -S_+\\ -S_-, & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_2-\omega_1}\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg\\ -S_{-\uparrow}\gg & -S_{-\downarrow}\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

$$-\frac{J}{2}\delta(\mathbf{r})\,T\sum_{\omega_{i+1}}\begin{pmatrix}\ll\gamma, & \ll\varphi\\ \ll\varphi^+, & -\ll\gamma^+\end{pmatrix}_{\omega_{i+1},\,\omega_i-\omega_{i-1}}\begin{pmatrix}S_z & -S_+\\ -S_- & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}}$$

$$\cdots\begin{pmatrix}S_z & -S_+\\ -S_- & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_2-\omega_1}\begin{pmatrix}S_z;\phi_\uparrow^+\gg & S_z;\phi_\downarrow\gg\\ -S_-;\phi_\uparrow^+\gg & -S_-;\phi_\downarrow\gg\end{pmatrix}$$

$$\equiv-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\widetilde{S}(\omega_i,\omega_{i-1},\cdots,\omega_1,\omega)$$

$$-\frac{J}{2}\delta(\mathbf{r})\,T\sum_{\omega_{i+1}}\widetilde{\Gamma}(\omega_{i+1},\omega_i,\cdots,\omega_1,\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad\cdots\cdots(13)$$

ここで, order parameter $\triangle(r)$ を effective に持つ超伝導体の Green

関数を導入する。

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(r)\right)\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r}.\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

(14) 式を使って，$\widetilde{\Gamma}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$\widetilde{\Gamma}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\int \hat{G}^0_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')\Big\{\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots, \omega_1, \omega)$$

$$+\frac{J}{2}\delta(\mathbf{r}'')T\sum_{\omega_{i+1}}\widetilde{\Gamma}(\omega_{i+1}, \omega_i, \cdots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}'', \mathbf{r}')\Big\}d\mathbf{r}''$$

$$= -\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots, \omega_1, \omega)$$

$$-\frac{J}{2}\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r}, 0)\,T\sum_{\omega_{i+1}}\widetilde{\Gamma}(\omega_{i+1}, \omega_i, \cdots, \omega_1, \omega; 0, \mathbf{r}') \quad \cdots\cdots\cdots (15)$$

と書かれる。

$$\widetilde{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\hat{G}^0_{\omega_1}(\mathbf{r}, 0)\;T\sum_{\omega_2}\widetilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; 0, \mathbf{r}')$$

$$= -\hat{G}^0_{\omega_1}(\mathbf{r}, 0)\,T\sum_{\omega_3}\frac{J}{2}\Big\{-G^0_{\omega_2}(0, \mathbf{r}')\widetilde{S}(\omega_2, \omega_1, \omega)$$

$$-\frac{J}{2}\hat{G}^0_{\omega_2}(0, 0)\;T\sum_{\omega_3}\widetilde{\Gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega)\Big\}$$

$$= -\hat{G}^0_{\omega_1}(\mathbf{r}, 0)\;T\sum_{\omega_2}\left(-\frac{J}{2}\right)\Big\{\hat{G}^0_{\omega_2}(0, \mathbf{r}')\widetilde{S}(\omega_2, \omega_1, \omega)$$

$$+\hat{G}^0_{\omega_2}(0, 0)\,T\sum_{\omega_3}\left(-\frac{J}{2}\right)\hat{G}^0_{\omega_3}(0, \mathbf{r}') \times \widetilde{S}(\omega_3, \omega_5, \omega_1, \omega) + \cdots\Big\}$$

$$= -\hat{G}^0_{\omega_1}(\mathbf{r}, 0)\sum_{i=2}^{\infty}\left(\overrightarrow{\prod_{k=2}^{i-1}}\,T\sum_{\omega_k}\left(-\frac{J}{2}\right)\hat{G}^0_{\omega_k}(0, 0)\right)$$

$$T\sum_{\omega_i}\left(-\frac{J}{2}\right)\hat{G}^0_{\omega_i}(0, \mathbf{r}')\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots\omega_1, \omega) \quad (16)$$

ここで，Πの上の $\longrightarrow$ は，矢印の方向に順番に並べることを意味する。次に，$\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots, \omega_1, \omega)$ の spin の運動を追求しよう。そのとき，spin 間の Commutator が出てくるが，それを explicit に見るためには，Commutator を必要とする matrix の積を作って見ればよい，つまり，

$$(i\omega_{i-1}-i\omega_{i-2})\widetilde{S}(\omega_i,\omega_{i-1}\cdots,\omega_1,\omega)$$

$$=\beta\delta_{\omega_i,\omega}\Bigg[\begin{pmatrix}\ll_{\uparrow}S_z, & -\ll_{\uparrow}S_+\\ \ll_{\downarrow}S_z, & -\ll_{\downarrow}S_+\end{pmatrix}_{\omega_{i-1}-\omega}\left[H,\begin{pmatrix}S_z, & -S_+\\ -S_-, & -S_z\end{pmatrix}\right]_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}}\cdots\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg\\ -S_{-\uparrow}\gg & -S_{-\downarrow}\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

$$+\begin{pmatrix}\ll_{\uparrow}[S_z,S_z]+[S_-,S_-], & -\ll_{\uparrow}[S_z,S_z]+[S_+,S_z]\\ \ll_{\downarrow}[S_z,S_z]+[S_+,S_-], & -\ll_{\downarrow}[S_z,S_+]+[S_+,S_z]\end{pmatrix}_{\omega_{i-2}-\omega}$$

$$\cdots\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg\\ -S_{-\uparrow}\gg & -S_{-\downarrow}\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

$$+\begin{pmatrix}\ll_{\uparrow}S_z, & -\ll_{\uparrow}S_+\\ \ll_{\downarrow}S_z, & -\ll_{\downarrow}S_+\end{pmatrix}_{\omega_{i-1}-\omega}\begin{pmatrix}[S_z,S_z]+[S_+,S_-], & -[S_z,S_+]+[S_+,S_z]\\ -[S_-,S_z]+[S_z,S_-], & [S_-,S_+]+[S_z,S_z]\end{pmatrix}_{\omega_{i-3}-\omega_{i-1}}$$

$$\cdots\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg\\ -S_{-\downarrow}\gg & -S_{-\downarrow}\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

＋他の Commutator を含む項］

$$=\beta\delta_{\omega_i,\omega}\Bigg[\begin{pmatrix}\ll_{\uparrow}S_z & -\ll_{\uparrow}S_+\\ \ll_{\downarrow}S_z & -\ll_{\downarrow}S_+\end{pmatrix}_{\omega_{i-1}-\omega}\left[H,\begin{pmatrix}S_z & -S_+\\ -S_- & -S_z\end{pmatrix}\right]_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}}\cdots\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\\ -S_{-\uparrow}\gg & -S_{-\downarrow}\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

$$-2\begin{pmatrix}\ll_{\uparrow}S_z, & -\ll_{\uparrow}S_+\\ \ll_{\downarrow}S_z, & -\ll_{\downarrow}S_+\end{pmatrix}_{\omega_{i-2}-\omega}\begin{pmatrix}S_z, & -S_+\\ -S_-, & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}}\cdots\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg\\ -S_{-\uparrow}\gg & -S_{-\downarrow}\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

$$+2\begin{pmatrix}\ll_{\uparrow}S_z & -\ll_{\uparrow}S_+\\ \ll_{\downarrow}S_z & -\ll_{\downarrow}S_+\end{pmatrix}_{\omega_{i-1}-\omega}\begin{pmatrix}S_z & -S_+\\ -S_- & -S_z\end{pmatrix}_{\omega_{i-3}-\omega_{i-1}}\cdots\begin{pmatrix}S_{z\uparrow}\gg & S_{z\downarrow}\gg\\ -S_{-\uparrow}\gg & S_{-\downarrow}\gg\end{pmatrix}_{\omega-\omega_1}$$

＋他の Commutator を含む項］ ……………………………………………… (17)

ここで，漸化式を完結させるために，$\omega_{i-1}=\omega_{i-2}$ の場合を吟味する必要がある。便宜的に以下，

$$\begin{pmatrix} \ll_{\uparrow} S_z, & -\ll_{\uparrow} S_+ \\ \ll_{\downarrow} S_z, & -\ll_{\downarrow} S_+ \end{pmatrix} \equiv (\ll \mathscr{S}), \begin{pmatrix} S_z, & -S_+ \\ -S_-, & -S_z \end{pmatrix} \equiv (\mathscr{S}), \begin{pmatrix} S_{z\uparrow} \gg & S_{z\downarrow} \\ -S_{-\uparrow} \gg & -S_{-\downarrow} \end{pmatrix} \equiv (\mathscr{S} \gg) \tag{18}$$

と定義すれば，$\omega_{i-1}=\omega_{i-2}$ の場合は，

$$T \sum_{\omega_{i-1}} (\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-1}-\omega} (\mathscr{S})_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1}$$

$$= T \sum_{\omega_{i-1}} \int_0^\beta \cdots \int d\tau_{i-1} \cdots d\tau_1\, d\tau\, \delta(\tau_{i-1}-\tau_{i-2}) \exp$$

$$[i(\omega_{i-1}-\omega)\tau_{i-1}+i(\omega_{i-2}-\omega_{i-1})\tau_{i-2}$$

$$\cdots + i(\omega-\omega_1)\tau] \times (\ll \mathscr{S})_{\tau_{i-1}} (\mathscr{S})_{\tau_{i-2}} \cdots (\mathscr{S})_{\tau}$$

$$= \beta\, \delta_{\omega,\omega_{i-2}} S(S+1) (\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-3}-\omega} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ (\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-2}-\omega} (\mathscr{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

(19) 式から

$$(\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-1}-\omega} (\mathscr{S})_0 (\mathscr{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1}$$

$$= - \sum_{\omega_{i-2} \neq \omega_{i-1}} (\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-1}-\omega} (\mathscr{S})_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ \beta^2 \delta_{\omega,\omega_{i-2}} S(S+1) (\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-3}-\omega} (\mathscr{S})_{\omega_{i-4}-\omega_{i-3}} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ \beta (\ll \mathscr{S})_{\omega_{i-2}-\omega} (\mathscr{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \cdots (\mathscr{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

となり，(17)，(20) 式から，

$$\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \cdots \omega_1, \omega)$$

$$= \frac{1}{i\omega_{i-1} - i\omega_{i-2}} \beta\, \delta_{\omega_i,\omega}(1-\delta_{\omega_{i-1},\omega_{i-2}})\Big[(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_i-\omega}([H,\mathcal{S}])_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}$$

$$- 2(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-2}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ 2(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-1}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-1}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ \text{他の項}\Big]$$

$$+ \beta\, \delta_{\omega_i,\omega}\delta_{\omega_{i-1},\omega_{i-2}}\Big[- \sum_{\omega_{i-1}\neq\omega_{i-2}}(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-1}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ \beta^2\delta_{\omega,\omega_{i-2}}S(S+1)(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-4}-\omega_{i-3}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ \beta(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-2}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}\Big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (21)$$

Kawamura が詳細に検討しているように，$\log$ 発散を示す項は，

$$g(i\omega) \equiv T\sum_{\omega'}\frac{\rho_0(\omega')}{i\omega' - i\omega}, \quad \rho_0(\omega) = -i\Pi\rho\ \mathrm{sign}\ \omega \qquad (22)$$

から出て来るので，most divergent term に注目している限り，$g(i\omega)$ なる項が最大に入ってくる項のみを残して，他の項は無視してよい。さらに，$[H,\mathcal{S}]\cong$ の近似を使えば，most divergent term を導く，$\widetilde{S}$ は次の項のみをとればよい。

$$\widetilde{S}(\omega_i,\omega_{i-1},\cdots,\omega_1,\omega)$$

$$= \beta\,\delta_{\omega_i,\omega}\frac{1-\delta_{\omega_{i-1},\omega_{i-2}}}{i\omega_{i-1}-i\omega_{i-2}}\Big[-2(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-2}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}$$

$$+ 2(\langle\!\langle \mathcal{S})_{\omega_{i-1}-\omega}(\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-1}}\cdots(\mathcal{S}\rangle\!\rangle)_{\omega-\omega_1}\Big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

ここで，上の漸化式の初期条件として，

$$\widetilde{S}(\omega_2,\omega_1,\omega) \cong -\beta^2 S(S+1)\ \delta_{\omega_2,\omega}\,\delta_{\omega_1,\omega} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

を使えば,

$$\widetilde{S}(\omega_i,\omega_{i-1},\cdots,\omega_1,\omega)=-\beta^2\delta_{\omega_i,\omega}2^{i-2}S(S+1)\sum_{k=1}^{i=1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}{}^{(k)}\frac{1}{i\omega_k-i\omega_j}\right)\delta_{\omega_{k,\omega}} \qquad (25)$$

ここで, $\Pi^{(k)}$ は積の内 $j=k$ を除くことを意味する。

§3. $\hat{t}$ - matrix

(3) 式を (14) 式を用いて, 書きなおせば,

$$\hat{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\frac{J}{2}\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r},0)\,\hat{\Gamma}_\omega(0,\mathbf{r}') \qquad (26)$$

となる。I で述べたように, $\hat{t}(\omega)$ - matrix を次のように定義しよう。

$$\hat{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')\equiv\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\hat{G}^0_\omega(\mathbf{r},0)\,\hat{t}(\omega)\,\hat{G}^0_\omega(0,\mathbf{r}') \qquad (27)$$

今,

$$\widetilde{S}(\omega_i,\omega_{i-1},\cdots,\omega_1,\omega)\equiv\delta_{\omega_i,\omega}S(\omega_{i-1},\omega_{i-2},\cdots,\omega_1,\omega) \qquad (28)$$

とすれば, (5), (16), (25), (28) 式から, S は diagonal であることに注目して,

$$\hat{\Gamma}_\omega(0.\mathbf{r}')=-\sum_{i=2}^{\infty}\left\{(-\frac{J}{2}T)^{i-1}T\sum_{\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_{i-1}}\hat{G}^0_{\omega_1}(0,0)\right\}$$
$$S(\omega_{i-1},\omega_{i-2},\cdots,\omega_1,\omega)\,\hat{G}^0(0,\mathbf{r}') \qquad (29)$$

となる。こうして, (26), (27), (29) 式から

$$\hat{t}(\omega)=-\sum_{i=2}^{\infty}\left\{(-\frac{J}{2}T)^i\sum_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{i-1}}\hat{G}^0_{\omega_1}(0,0)\cdots\hat{G}^0_{\omega_{i-1}}(0,0)\right\}$$
$$S(\omega_{i-1},\omega_{i-2},\cdots,\omega_1,\omega) \qquad (30)$$

以下, △について, linear まで考慮して, $\hat{t}(\omega)$ — matrix の most divergent term を拾おう。そこで，

$$\hat{G}^0_\omega(0,0)=\begin{pmatrix}\rho_0(\omega) & \int K_0(S,\omega)\triangle(S)\,d^3S\\ \int K_0(S,\omega)\triangle(S)\,d^3S & \rho_0(\omega)\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

を使う。ここで $\mathcal{G}^0_\omega$ を normal 状態の green 函数として，Iで定義したように，

$$K_0(S,\omega)\equiv\mathcal{G}^0_\omega(S)\,\mathcal{G}^0_{-\omega}(S) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

である。こうして，

$$\hat{t}_{ii}(\omega)=S(S+1)\sum_{i=2}^{\infty}2^{i-2}\beta^2\left(-\frac{J}{2}T\right)^i\sum_{\omega_1,\cdots,\omega_{i-1}}\rho_0(\omega_1)\cdots\rho_0(\omega_{i-1})$$

$$\sum_{k=1}^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}{}^{(k)}\frac{1}{i\omega_k-i\omega_j}\delta_{\omega_k,\omega}$$

$$=\frac{S(S+1)J^2}{4}\rho_0(\omega)\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)\left(J\mathcal{g}(i\omega)\right)^{i-2}$$

$$=\frac{S(S+1)J^2}{4}\rho_0(\omega)\frac{1}{(1-J\mathcal{g}(i\omega))^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

$\hat{t}(\omega)$ － matrix の off diagonal 成分に於いて，$\mathcal{g}(i\omega)$ の現れ方は，$\hat{G}^0_{\omega_\ell}(0,0)$ の off diagonal 成分と $\Pi^{(k)}(1/i\omega_k-i\omega_j)$ の積において，$j=\ell$ の場合と，$j\neq\ell$ の場合で，夫々 $(\mathcal{g}(i\omega))^{i-2}$，$(\mathcal{g}(i\omega))^{i-3}$ となり，most divergent term のみを考えている範囲内においては，$(\mathcal{g}(i\omega))^{i-2}$ のみをとればよく，$\tilde{S}$ の漸化式も，(23) 式で十分である。従って，

$$\hat{t}_{12}(\omega)=-\sum_{i=2}^{\infty}\left\{\beta^2\left(-\frac{J}{2}T\right)^i\sum_{\omega_1,\cdots,\omega_{i-1}}\sum_{\ell}\rho_0(\omega_1)\cdots\right.$$

$$\left.\int K_0(S,\omega_\ell)\triangle(S)\,d^3S\cdots\rho_0(\omega_{i-1})\right\}$$

$$\times \left[-2^{i-2} S(S+1) \sum_{k=1}^{i-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1}{}^{(k)} \frac{1}{i\omega_k - i\omega_j} \right) \delta_{\omega_k, \omega} \right]$$

$$= \frac{S(S+1) J^2}{4} \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) (J g(i\omega))^{i-2} \int K_0(S, \omega) \triangle(S) d^3 S$$

$$= \frac{S(S+1) J^2}{4} \frac{1}{(1 - J g(i\omega))^2} \int K_0(S, \omega) \triangle(S) \, d^3 S \qquad \cdots\cdots (34)$$

こうして，十分低温においては，Dを伝導体の幅とすれば，

$$g(i\omega) = -\rho \ \ell n \frac{D}{|\omega|} \qquad \cdots\cdots (35)$$

となるから，今，

$$r_\omega^2 \equiv \frac{S(S+1) J^2}{4} \frac{1}{\left(1 + J\rho \ell n \frac{D}{|\omega|}\right)^2} \qquad \cdots\cdots (36)$$

とすれば，

$$\hat{t}_{11}(\omega) = \hat{t}_{22}(\omega) = \rho_0(\omega) \, r_\omega^2 \qquad \cdots\cdots (37)$$

$$\hat{t}_{12}(\omega) = \hat{t}_{21}(\omega) = r_\omega^2 \int K_0(S, \omega) \triangle(S) \, d^3 S \qquad \cdots\cdots (38)$$

となる。

§4. $\triangle(r)$ の空間的変化

Ｉで議論したように，Coherence length ξ_0 として，$r \gg \xi_0$ の領域での $\triangle(r)$ の空間的変化に対する積分方程式は，次のように記述される。

$$\triangle(r) - g T \sum_\omega \int K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|, \omega) \triangle(S) d^3 S$$

$$= - g T \sum_\omega \hat{t}_{12}(\omega) K_0(r, \omega) - g T \sum_\omega \frac{\hat{t}_{11}(\omega)}{\rho_0(\omega)} K_0(r, \omega)$$

$$\int K_0(S, \omega) \triangle(S) \, d^3 S \qquad \cdots\cdots (39)$$

(39) 式に，(37)，(38) 式を代入すれば，

$$\triangle(r) - g\, T \sum_{\omega} \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|,\omega)\triangle(S)\, d^3S$$

$$= -\ 2gT\sum_{\omega} r_{\omega}^2 \int K_0(S,\omega)\triangle(S)\, d^3S,\ \ K_0(r,\omega) \quad\cdots\cdots (40)$$

となる。以下Iの議論と平行して行えばよい。

$$L(r)\triangle(r) \equiv \frac{1}{g\rho}\left[\triangle(r) - gT\sum_{\omega}\int d^3S\, K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|,\omega)\triangle(S)\right] \quad (41)$$

と定義すれば，

$$L(r)\triangle(r) = -\frac{2}{\rho}\ T\ \sum_{\omega} r_{\omega}^2 < K_0(\omega)\triangle(S) > K_0(r,\omega) \quad\cdots\cdots (42)$$

となる。また，

$$< (L+z)\triangle > \equiv 0 \quad\cdots\cdots (43)$$

なるような，z を導入すれば，

$$\ell n \frac{T_{c0}}{T_c} = z \quad\cdots\cdots (44)$$

として，遷移温度 T_c を決めることが出来る。ここで，T_{co} は pure super state の遷移温度である。今，T_c の極近傍での現象を考えている限り，z は (44) 式から exact に求まる。従って，

$$\triangle(r) = \triangle_0 - \frac{1}{L+z}\left[\frac{2}{\rho}T\sum_{\omega} r_{\omega}^2 < K_0(\omega)\triangle > K_0(r,\omega) - z\triangle\right] \quad (45)$$

$$z<\triangle> = \frac{2}{\rho}\ T\ \sum_{\omega} r_{\omega}^2 < K_0(\omega)\triangle > < K_0(\omega) > \quad\cdots\cdots (46)$$

と書くことが出来，

$$\triangle(r) \equiv (1+f(r))\triangle_0 \quad ; \quad \triangle_0 = \triangle(\infty) \quad\cdots\cdots (47)$$

なる f を導入して，z，f を r^2 の巾級数に展開して，摂動として解こう。今，

$$z = z_1 + z_2 + \cdots \qquad (48)$$

$$f = f_1 + f_2 + \cdots \qquad (49)$$

とすれば，

$$f_1(r) = -\frac{1}{L+z}\frac{2}{\rho}T\sum_{\omega} r_{\omega}^2 < K_0(\omega) > K_0(r,\omega) \qquad (50)$$

$$f_2(r) = \left(\frac{2}{\rho}\right)^2 T^2 \sum_{\omega,\omega'} r_{\omega}^2 r_{\omega'}^2 \frac{1}{L+z} < K_0(\omega)\frac{1}{L+z}K_0(\omega') > K_0(r,\omega) < K_0(\omega') > \qquad (51)$$

$$z_1 = \frac{2}{V\rho}T\sum_{\omega} r_{\omega}^2 < K_0(\omega) > < K_0(\omega) > \qquad (52)$$

$$z_2 = \frac{2}{V\rho}T\sum_{\omega} r_{\omega}^2 < K_0 f_1 > < K_0(\omega) > \qquad (53)$$

となる。上式を導くとき，右辺の夫々の項に比べて，$\frac{1}{V}$ の order の項は落してある。こうして，z_1, f_1 のみについて示せば，

$$z_1 = \frac{S(S+1)J^2}{V\,T_c}\,\rho\sum_{n>0}\frac{1}{(2n+1)^2\left(1+J\rho\,\ell n\frac{1}{(2n+1)\pi T_c}\right)^2} \qquad (54)$$

$$f_1(r) = \frac{6}{7\pi\zeta(3)}\frac{m^2}{\xi_0^2}\frac{S(S+1)}{4}J^2 T\sum_{\omega}\frac{1}{\left(1+J\rho\,\ell n\frac{D}{|\omega|}\right)^2}\cdot\frac{1}{|\omega|}$$
$$\times\left[\frac{v_F}{2|\omega|}\frac{1}{r}e^{-\frac{2(\omega)}{v_F}r} - E_1\left(\frac{2|\omega|}{v_F}r\right) - \frac{v_F}{2|\omega|}\frac{1}{r}\right]$$
$$= \frac{3S(S+1)}{7\pi^2\zeta(3)}\frac{m^2}{\xi_0^2}J^2\left[\frac{1}{\left(1+\rho J\ell n\frac{D}{\pi T}\right)^2}\left\{\frac{\xi_0}{r}e^{-\frac{r}{\xi_0}} - E_1\left(\frac{r}{\xi_0}\right)\right\}\right.$$
$$\left.-\sum_{n>0}\frac{1}{\left(1+\rho J\,\ell n\frac{D}{(2n+1)\pi T}\right)^2}\frac{1}{(2m+1)^2}\cdot\frac{\xi_0}{r}\right] \qquad (55)$$

この結果は，局在 spin を static に取扱ったものの各項に，

$1/(1+\rho J \ell n \dfrac{D}{(2m+1)\pi T})^2$ を乗じたものになっている。Jの3次までは，Kawamura が議論しているように，most divergent term が exact であるから，当然のこととして，Iの結果に一致する。Iで述べたように，

$1=\rho|J|\ell n \dfrac{D}{\pi T_k}$ のとき発散することが，こうして明らかにされた。

Griffin[6] は，遷移温度を求めているが，(54) 式は本質的に彼のものに一致する。彼は t − matrix として，normal の場合を使っているが，その正当性を，ここで別の角度から保証しているように思われる。

§5. 結　論

多時間 Green 関数の方法は，空間的変化を exact に扱え，systematic に見通しよく出来ることを示した。

order parameter $\Delta(r)$ の空間的変化において，温度が，Kondo 温度より高い場合，most divergent term まで求った，lower divergent term を考慮したものも，検討する価値はあろう。最も興味ある問題は，Kondo 温度以下の場合で，目下研究中である。

終りに，御指導して下さった高野文彦先生に感謝致します。

参　考　文　献

1)	北村豊平	物性研究	<u>10</u>	431	('68)
2)	S. Doniach	Phys. Rev	<u>144</u>	382	('66)
3)	A. A. Abrikosov	Physics	<u>2</u>	5	('65)
4)	川村　清	物性研究	<u>10</u>	282	('68)
5)	K. Kawamura	Prog. Theor. Phys	<u>39</u>	1375	('68)
6)	A. Griffin	Phys. Rev. Letters	<u>15</u>	703	('65)