テクニカル・タームの解説

Scaling Law

東大物性研　鈴　木　増　雄

二次相転移の転移点近傍に於ける異常性，特にその指標（発散の程度を表わす index ）を説明する試みがいろいろなされているが，scaling law はそれらを物理的直観的に集約したものである。もちろん，この範疇に属さない，scaling law に批判的な理論もあるが，まだ積極的な成果は得られていないように思われる。

さて，この scaling law という概念は，もともと，磁性体の問題，特にイジング・モデルに端を発し，後に，二次相転移一般について成立するものとして，拡張されて来た。ここでは，簡単の為に，磁性の言葉で説明しよう。内容を一口で言うならば，転移点 T_c の近傍では，自由エネルギー，従って磁気状態方程式は，磁化 $\langle\sigma\rangle$ と磁場 h を適当にそれぞれ温度 $\epsilon = (T-T_c)/T_c$ の何乗巾かで割った（ scaling した）もののみの変数として表わされる。即ち，磁化 $\langle\sigma\rangle$ は，

$$\langle\sigma\rangle = \frac{h}{|h|}|\epsilon|^{(d-x)/y} f(\epsilon/|h|^{y/x}) \qquad (1)$$

のように表わされ，ここに，x と y は，モデルに依存して決まる独立なパラメータである。因子 $h/|h|$ は，磁場の反転に対して，$\langle\sigma\rangle$ の符号も変るように挿入されたものである。上式のような磁気状態方程式が与えられれば，異常性を表わす index は二つのパラメータ x，y によって決まることになり，相互の関係が求まる。以上は，static scaling law であるが，これを動的現象にも拡張して，時間 t も適当に scale された型で入って来ると考えられている。従って collective mode の振動数も減衰常数も同様の温度依存性を示すことになる。

さて (1) の型の状態方程式がどのようにして得らるかを簡単に説明しよう。詳しくは，文末の文献を参照して欲しい。[1〜9] 結晶を cell に分ける。格子定数

を a_0 として，cell の一辺を La_0 としたとき，この長さを次の範囲

$$a_0 \ll La_0 \ll \xi \tag{2}$$

に来るようにする。但し，ξ は相関距離で T_c に近づくにつれて無限に長くなる。話を簡単にするために，イジング・モデルを考える。これは，相転移を起す一番簡単なモデルで，そのハミルトニアンは，

$$\mathcal{H} = -\Sigma J_{ij} S_i S_j - mH \Sigma S_j \tag{3}$$

で与えられる。但し，$S_j = \pm 1$ の二つの値だけをとるものとする。まず，cell 間の相互作用を切ったとすると，各 cell は独立となり，La_0 より長い距離の相関はなくなる。ところが，転移点近傍での熱力学的微分係数の発散をひき起すものは，まさしく，この長距離の相関である。従って，各 cell 間の相関は決定的な重要性をもっている。各格子点 r のスピン変数を σ_r とし，各 cell a に於けるスピン σ_r の代表値を μ_a とする。この各 cell に対応する変数 μ_a は，各スピンの変数 σ_r と同じような振舞をするものと考えられる。即ち，各 cell 間の有効な相互作用があって，その為に，もとのイジング・モデルのスピン間の相関と同様の相関が μ_a の間に生ずる。この二つの問題を site problem と cell problem と呼ぶことにすると，この二つの間の違いは，ただ温度 $\varepsilon = (T - T_c)/T_c$ 磁場 $h = mH/k_B T$ の値が異なるだけである。そこで，site problem の温度 ε と磁場 h に対して，cell problem のそれを $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{h}$ と書くことにする。これらのパラメータ $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{h}$ は，cell の中でのスピンの相互作用によって決まるものであるから，cell の大きさ L に依存する。しかも，h を零にすると，$\tilde{h}$ も零になるから，

$$\tilde{h} = L^x h \tag{4}$$

と仮定してよいであろう。同様に $\tilde{\varepsilon}$ についても

$$\tilde{\varepsilon} = L^y \varepsilon \tag{5}$$

磁場 h が，ごくわずか変ったときの自由エネルギー F の変化は，site problem と cell problem の二通りの見方をすることによって，次のように

なる：

$$\delta(F/k_B T) = -\sum_r \langle\sigma_r\rangle \delta h_r = -\sum_a \langle\mu_a\rangle \delta\tilde{h}_a \tag{6}$$

空間的な変化を非常にゆるやかにしたとすると，$\sum_r$についての和は，各スピンの平均値$\langle\sigma_r\rangle$に cell 内のスピンの数 L^d（d は系の次元を表わす）をかけたものになるから，（6）式より，

$$L^d \langle\sigma_r\rangle \delta h_r = \langle\mu_a\rangle \delta\tilde{h}_a \tag{7}$$

となる。（4）と（7）より，

$$\sigma_r = L^{x-d} \mu_a \tag{8}$$

特に，一様な磁場 h に対しては，$\langle\sigma_r\rangle$は ϵ と h に依存するから，

$$\langle\sigma\rangle = F(\epsilon, h) \tag{9}$$

と書くことにする。更に，変数 μ_a は，もとの site problem と同様の系を記述するものと期待されるから，平均値 $\langle\mu_a\rangle$は，有効温度 $\tilde{\epsilon}$ と有効磁場 $\tilde{h}$ を用いれば，（9）と同じ関数型で表わされると仮定してよいであろう（これが scaling law である！）。即ち，

$$\langle\mu\rangle = F(\tilde{\epsilon}, \tilde{h}) \tag{10}$$

となる。（8），（9），（10）を組み合せると，

$$\langle\sigma\rangle = F(\epsilon, h) = L^{x-d} F(L^y\epsilon, L^x h) \tag{11}$$

なる関数方程式が得られる。L は（2）式を充す勝手な値をとることが出来るから，結局，関数型 F（ϵ，h）は，（1）のように与えられることになる。（1）の型を認めると，異常性を表わす index を x，y で表わすことが出来る。例えば，自発磁化を

$$\langle\sigma\rangle \sim |\epsilon|^{\beta} \tag{12}$$

とすれば，（1）より，

$$\beta = (d-x)/y \tag{13}$$

という関係が導かれる。その他も同様である。

次に dynamic scaling law を簡単に説明しよう。[10〜15] この場合には，時間も適当に scaling を行うことができ，モードの振動数も減衰常数も波数と温度に関して同じ異常性をもつことになる。今の段階では，この考えは静的な場合ほど信頼性は無い。今，一般に，波数 k をもった物理量に対する相関関数 $\Xi_k(t)$ を考える。この解析的な性質を議論するために，図1．のように，k－κ 平面を考え（$\kappa = \xi^{-1}$），それを三つの部分 I，II，III に分ける。物理現象は，それぞれの領域で異った特徴を持っている。I と III の領域は，波数 k が $\kappa = \xi^{-1}$ に比べて充分小さい領域で，乱れの波長 $1/k$ が熱的揺ぎの波長即ち相関距離 ξ よりも大きく，流体力学的取り扱いが可能な領域であり，hydrodynamic regime と呼ばれている。更に，I は長距離相関の存在する領域で，III は，それの存在しない領域である。II は，逆に，乱れの波長が熱的揺ぎの波長よりも充分小さい領域であり，流体力学的取り扱いのできない領域である。これは，critical regime と呼ばれていて，動的な臨界現象に特有な領域である。

さて，dynamic scaling law の大前提は図1の原点（k＝0，T＝T_c）を除いて，相関関数は，$k\xi$ と $\omega_{k,\xi}\, t$ の二変数だけの解析関数になるということである。但し，$\omega_{k,\xi}$ は，k と ξ^{-1} のある homogeneous な関数である。即ち，

$$\omega_{k,\xi} = \kappa^{\theta} g(k/\kappa) \tag{14}$$

と書ける。この法則（仮定）を用いると，もし，モードの振動数（即ち(14)の実数部分）の異常性がわかると，減衰常数（虚数部分）の異常性もわかり，波数 k と温度 κ に関して全く同じ振舞をする。更に，もし，ある物理量が領域 I で調べられたとすると，それを L_1 線上で接続させて，領域 II での異常性を，更に L_2 で接続させて，領域 III での異常性を議論することが出来る。

References

1. L.P.Kadanoff et al, Rev. Mod. Phys. 39 (1967), 395.
2. L.D.Landau and E.M.Lifshitz: Statistical Physics (Pergamon 1958) §116, §135.
3. B.Widom; J.Chem. Phys. 43 (1965), 3898.
4. C.Domb and D.L.Hunter; Proc. Phys. Soc. 86 (1965), 1147.
5. L.P.Kadanoff; Physics 2 (1966), 263.
6. A.Z.Patashinsky and V.L.Pokrovsky; Sov. Phys.—JETP 50 (1966), 439
7. M.Suzuki; Prog. Theor. Phys. 38 (1967) 289, 744, 1225; ibid 39 (1968) 349.
8. R.Abe: Prog. Theor. Phys. 38 (1967) 72.
9. M.Suzuki: J.Phys. Soc. Japan 22 (1967), 757.
10. B.I.Halperin and P.C.Hohenberg: Phys. Rev. Letters 19 (1967), 700.
11. K.Kawasaki, Prog. Theor. Phys. 39 (1968), 1133; 40 (1968), 35.
12. H.Mori and H.Okamoto; Phys. Letters 26A (1968), 285.
13. M.Suzuki, H.Ikari and R.Kubo: Proc. of the International Conference on Statistical Mechanics (Kyoto, 1968; in press).
14. K.Tomita and T.Kawasaki: International Conference on Statistical Mechanics (Sept 9—14 (1968), Kyoto) Kyoto), Abstract p.105
15. R.Nathans, F.Menzinger, and S.J.Prckart; J.Appl. Phys. 39 (1968) 1237.

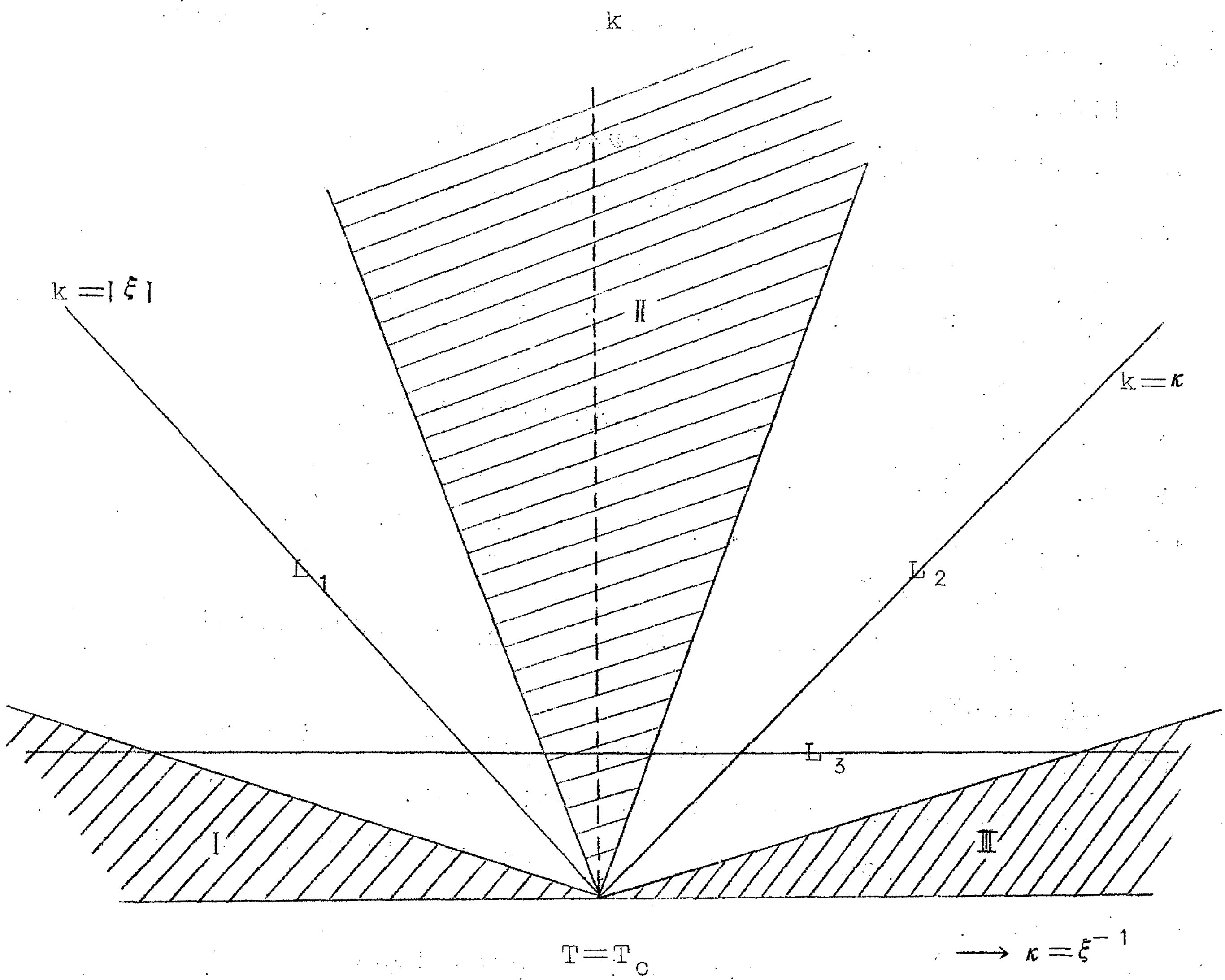

図 1. K − κ 平面