レオロジーの幾何学的研究 — I
— 幾何学的方法論 —

東大工　　池 田　　恵

（5月12日受理）

§1　序

「レオロジーの幾何学的研究」と題して，筆者が今までのところで考え得た問題を，順次発表していこうと思う。まず，その I として，この論文では，「幾何学的方法論」について考えたい。本質的要因については，既に前論文[1]において述べたところであるが，より厳密な議論をする必要を感ずるので，この論文でまとめておきたい。その際，我々の念頭にある具体的な物質は文献 1）でもそうであった如く，高分子物質であり，その変形的特徴を抽出して，非線型・非ホロノーム変形論，就中，時間依存系の変形論を展開することになるが，現象論的な細かな議論は，後続の論文にゆずって，この論文では，その変形の時間依存性を如何に把握するかに重点をおいて述べる。

§2　レオロジー的変形の幾何学的把握

M.Reiner のことばに従うと，「レオロジーとは，物質の変形と流動を研究する科学である」[2] ことになるが，我々が一般的変形という場合，この変形と流動を総称しているわけで，従って我々は，レオロジーを一般的変形論の立場からみていくことになる。レオロジー的変形の特徴の本質は，文献 1）にのべた如く，その時間依存性であり，我々は変形というものを，ある状態空間（あるいは場）から他の状態空間（場）への移行，即ち幾何学的にいえば，座標変換とみなすから，結局，レオロジー的変形は，座標変換が時間に依存するという形で構成される幾何学によって把握されることになる。一般に，変形前の状態空間たる (i)—空間から変形後の状態空間たる (κ)—空間への座標変換が，今の場合，時間というパラメータを含んで，

$$x^{\kappa} = x^{\kappa}(x^{i}, t)$$

$$\tau = t \quad \Big\} \qquad (2.1)$$

の如くに規定されてくる。このような変換を rheonomic transformations といい，これに基づく幾何学を rheonomic geometry というから，[3),4)] レオロジーは rheonomic geometry で把握されるといえる。(2.1) では時間は不変だが，それが

$$\left.\begin{aligned} x^{\kappa} &= x^{\kappa}(x^{i}, t) \\ \tau &= \tau(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

の如くに変換されるのを generalized rheonomic transformations といい，その幾何学を generalized rheonomic geometry というが，[3),4)] 我々は (2.1) に基づき，かつ時間微分は速度の order までしか採用しないが，高次の時間微分を含んだ取扱いへの移行は容易であり，それは，一般には高次の「道」の幾何学 (geometry of paths of higher order)[3)] として扱われる。一階の時間微分しか採用しないことは，後続の論文のうち，孤立鎖の各要素の運動を論ずる時に慣性力を無視することに通ずる。

§3 レオノーム幾何学による記述について

そこで，この節では (2.1) に基づく rheonomic geometry についてふれておこう。この体系では，線素の扱い方が大切で，通常の如く，

$$dx^{\kappa} = A_{i}^{\kappa}(x,t)\, dx^{i} \qquad (3.1)$$

(但し，総和規約を全面的に採用する。)

と変換されるならば，dx^{κ} 自身がベクトルとなり (2.1) の変換の特殊なものになってくるが，(2.1) に基づくベクトルとしては

$$\delta x^{\kappa} \equiv dx^{\kappa} - x^{(1)\kappa} dt \quad ; \quad x^{(1)\kappa} \equiv \frac{dx^{\kappa}}{dt} \qquad (3.2)$$

を用いなければならない。従って，

$$\delta x^{\kappa} = A_{i}^{\kappa}(x,t)\, \delta x^{i} \qquad (3.3)$$

とかかねばならぬ。これは A. Wundheiler の強ベクトルであり，[4] 我々が rheonomic geometry で変形を記述する際に，(3.3) に基づいて構成される幾何学量を実体として認識していることになる。この調子でいくと高次の時間微分線素 $\delta x^{(1)\kappa}$, $\delta x^{(2)\kappa}$, …… などについても強ベクトル化が図られねばならず，そのためには後にのべる時間的共変微分▽を用いて，$\delta x^{(1)\kappa} \equiv \nabla(\delta x^{\kappa})$, $\delta x^{(2)\kappa} \equiv \nabla(\delta x^{(1)\kappa})$, …… などを採用しなければならないことが知られている。[3] 又，文献 4) によると，我々のこの立場は，normal − frame を採用していることになる。そして更に，後にのべるように，我々は時間微分のテンソル性を要求し，そのためには時間的共変微分を用いればよいことがわかるが，このことは文献 4) の normal − coordinates への移行によって，より簡単化される。あるいは，我々も normal − coordinates への移行ができるといった方がよい。但し，文献 4) は，いわゆる film − space[1), 5)] からの縮退が図られ，単に $(x^{K}) = (x^{\kappa}, x^{0} = t)$ なる分解だけでは，強ベクトルを構成し得ず，又時間微分もテンソルにならないので，前者には normal − frame を採用し，後者には更に normal − coordinates を採用すれば，望むとおりに変更できることを主張している。このことについては，後続の論文で詳しくふれたい。

さて，空間構造が決定されるためには，計量と接続が決定されねばならないが，前者は (3.3) に基づき，

$$g_{\lambda\kappa} = A_{\lambda}^{j} A_{\kappa}^{i} \delta_{ji} \tag{3.4}$$

で導入されるとする。但し (i)──空間の計量を δ_{ji} (クロネッカー・デルタ) とした。又，

$$A_{i}^{\kappa} A_{\lambda}^{i} = \delta_{\lambda}^{\kappa}, \quad A_{i}^{\kappa} A_{\kappa}^{j} = \delta_{i}^{j} \tag{3.5}$$

が成立つとする。接続はベクトルの平行移動の概念から，任意のベクトル X^{κ} の共変微分を

$$DX^{\kappa} \equiv dX^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} X^{\lambda} \delta x^{\mu} + \Gamma_{\lambda}^{\kappa} X^{\lambda} dt \tag{3.6}$$

と定義することにより導入される。但し $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ と $\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ は接続係数で，

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} &= A^{\kappa}_{i} A^{k}_{\mu} A^{j}_{\lambda}\, \Gamma^{i}_{kj} + A^{\kappa}_{i} \partial_{\mu} A^{i}_{\lambda}\ ;\ \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\\ \Gamma^{\kappa}_{\lambda} &= A^{\kappa}_{i} A^{j}_{\lambda} \Gamma^{i}_{j} + A^{\kappa}_{i} D_{t} A^{i}_{\lambda}\ ;\quad D_{t} = \partial_{t} + x^{(1)\mu}\partial_{\mu}\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

なる変換をする。ここでも文献 1) の如く，(i)一空間を Euclid 空間とみなしてやって $\Gamma^{i}_{kj} = 0$ かつ $\Gamma^{i}_{j} = 0$ とおくことにすると

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} &= A^{\kappa}_{i}\ \partial_{\mu} A^{i}_{\lambda}\\ \Gamma^{\kappa}_{\lambda} &= A^{\kappa}_{i}\ D_{t} A^{i}_{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

と決定される。このことは遠隔平行性空間になって曲率テンソルは消失してしまうことを意味するが，一般相対性理論では重力場のポテンシャルを計量で把握し，しかもリーマン空間を用いているから曲率テンソルしか登場せず，従って曲率が計量と結びついて，曲率が消失するとは考えない。我々の場合は，慣性項は無視するから，その立場からみると，曲率消失は条件として採用され，その Riemann − Christoffel 曲率テンソルにかわるべきものとして，捩率に基づくリーマン的な，Levi − Civita の曲率テンソルが想定されることを既にのべておいた。[1)] これに関しては，前にものべた如く，孤立鎖各要素の運動方程式は，外力 F^{κ} が作用している時，

$$x^{(2)\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\, x^{(1)\lambda} x^{(1)\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda}\, x^{(1)\lambda} = F^{\kappa} \tag{3.9}$$

とかけ，これには正に二次の order の「道」の幾何学として扱わねばならないことを示し，それを compact な系として扱うためには，線素 δx^{κ} の他に $\delta x^{(1)\kappa}$ をとり入れなければならないが，[3)] 慣性項無視の条件の下では，ここでのべると同様の扱いができる。厳密に扱うことは後にゆずりたい。

一方，(3.6) を

$$DX^{\kappa} = (\nabla_{\mu} X^{\kappa})\,\delta x^{\mu} + (\nabla X^{\kappa})\, dt \tag{3.10}$$

と共変微分商で表わすと，各々，

$$\left.\begin{aligned}\nabla_{\mu} X^{\kappa} &\equiv \partial_{\mu} X^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda},\\ \nabla X^{\kappa} &\equiv D_{t} X^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda} X^{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

で定義され，これらに基づくテンソル量は次のごとく定義される。

$$\left.\begin{aligned}
&2[\nabla_\nu \nabla_\mu] X^\kappa = R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} X^\lambda - 2 S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda} \nabla_\lambda X^\kappa \\
&2[\nabla_\mu \nabla] X^\kappa = P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} X^\lambda - 2 Q_\mu^{\cdot\lambda} \nabla_\lambda X^\kappa \\
&2[\nabla \ \nabla] X^\kappa = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

但し，

$$\left.\begin{aligned}
&R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} \equiv 2(\partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{[\nu|\alpha|}^{\kappa} \Gamma_{\mu]\lambda}^{\alpha} + \Omega_{\nu\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\kappa}), \\
&P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \equiv D_t \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - \partial_\mu \Gamma_\lambda^\kappa + \Gamma_\nu^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \Gamma_\lambda^\nu + \Omega_\mu^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa}, \\
&S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \equiv \Gamma_{[\nu\mu]}^{\kappa} + \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}, \\
&Q_\lambda^{\cdot\kappa} \equiv \Gamma_\lambda^\kappa + \Omega_\lambda^\kappa
\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

と定義される。[1),3)] [ ] は交代記号である。又，非ホロノーム対象 $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ と Ω_λ^κ は，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_{[\mu}\partial_{\lambda]} X^\kappa \equiv -\Omega_{\mu\lambda}^{\nu} \partial_\nu X^\kappa \\
&(D_t \partial_\lambda - \partial_\lambda D_t) X^\kappa \equiv -\Omega_\lambda^\nu \partial_\nu X^\kappa
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

で定義される。(3.8) からは $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}=0$ かつ $P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=0$ で曲率は消失してしまい，この場合 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=0$ でもあるが，空間的散逸性は $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ が代表すると考える。この $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ に基づいて Levi − Civita の曲率が出現することについては，Weissenberg 効果の出現に関して既にのべておいた。[1)] 我々がここで問題とするのは $Q_\lambda^{\cdot\kappa}$ である。これは変形の時間的変化のテンソル形であるが，Ω_λ^κ はその時間的散逸性を代表し，(3.14) の定義に D_t 操作を代入すれば，

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_\lambda^\kappa = \omega_\lambda^\kappa + 2 x^{(1)\mu} \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} + \partial_\lambda x^{(1)\kappa} \\
&\qquad \text{但し} \quad (\partial_t \partial_\lambda - \partial_\lambda \partial_t) X^\kappa \equiv -\omega_\lambda^\mu \partial_\mu X^\kappa
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

と計算される。文献 1) では簡単のために

$$Q_{\lambda}^{\cdot\kappa} = A_{i}^{\kappa}\partial_t A_{\lambda}^{i} \tag{3.16}$$

に帰着させ，他の成分は，我々の観測の平均化操作によって消失させられると考えたが，ここでは文献 4）の normal − coordinates への移行を考える。そうすると，そこでの時間微分はいわゆる Lie −微分[6] にならねばならないから，たとえば計量の時間微分にしても，

$$\overset{*}{\partial}_t g_{\lambda\kappa} \equiv \partial_t g_{\lambda\kappa} + x^{(1)\mu}\partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} - g_{\mu\kappa}(\partial_{\lambda} x^{(1)\mu}) - g_{\lambda\mu}(\partial_{\kappa} x^{(1)\mu}) \tag{3.17}$$

を採用しなければならないが，一方我々は，計量については（3.11）より

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{\mu} g_{\lambda\kappa} &= \partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} g_{\nu\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu} g_{\lambda\nu} = 0 \\ \nabla\ g_{\lambda\kappa} &= D_t\, g_{\lambda\kappa} - \Gamma_{\lambda}^{\nu} g_{\nu\kappa} - \Gamma_{\kappa}^{\nu} g_{\lambda\nu} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

が成立つことを知っているから，$(3.18)_2$ と（3.17）を比較することにより，時間微分としては ∇ を用いればよく，かつ最も簡単には，

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{\lambda}^{\kappa} = (-\Omega_{\lambda}^{\kappa}) \equiv -\partial_{\lambda}\, x^{(1)\kappa} \\ &\text{あるいは}\quad \omega_{\lambda}^{\kappa} + 2x^{(1)\mu}\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

なる条件を課すことにより normal − coordinates へ移行することができる。最も簡単に $(3.19)_2$ を $\omega_{\lambda}^{\kappa} = 0$ かつ $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0$ と仮定してしまうと，今まで我々がレオロジー的変形を表わすための基本量として採用してきた（$g_{\lambda\kappa}$, $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$, $Q_{\lambda}^{\cdot\kappa}$）が（$g_{\lambda\kappa}$, $\Omega_{\lambda}^{\kappa}$）の二種類に帰着せられ，時間的変化のみを抽出してくることになる。

文献 4）での A. Wundheiler[*)] の expansion tensor（Dehnung − tensor）というのは $(3.18)_2$ の $C_{0\lambda\kappa} \equiv D_t g_{\lambda\kappa}$ に相当していることがわかり，更に $(3.18)_2$ 式は，計量の時間的変化として，文献 7）の鎖の数分布函数の時間的変化の方程式と同等であり，計量対分布函数の対応づけから，後

＊） Prace Matematyczno − fizyczne，Warszawa，40 − 2（1933），97 − 142．の copy をゆずってほしい。

の論文で考えられるごとき，統計力学的考察との対応が可能となる。

§4　レオロジー方程式の導出

以上のべた如く，レオロジー的変形を表わすための基本量としては，本質的には，時間的変化に着目した $(g_{\lambda\kappa},\ \Omega_\lambda^\kappa)$ を採用すればよいことになったが，レオロジー的物性を規定するためには，あくまでも，応力－変形－時間関係式，即ちレオロジー方程式を導出することが必要となるから，我々も力学的立場からそれを求めることにする。

まず，エネルギー函数を単位体積・時間当り

$$W = W(g_{\lambda\kappa},\ \Omega_\lambda^\kappa) \tag{4.1}$$

とおくことにし，着目している領域V，時間間隔Iに対しては，

$$\delta\int_{V\times I} W\, d\mathfrak{X} dt = \int_{V\times I}\left[\sigma^{\kappa\lambda}\delta g_{\lambda\kappa} + \Sigma_\kappa^{\cdot\lambda}\delta\Omega_\lambda^\kappa\right] d\mathfrak{X} dt = 0 \tag{4.2}$$

なるエネルギー変分原理を摘用する。但し，それぞれの応力成分は

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{\kappa\lambda} &\equiv \frac{\partial W}{\partial g_{\lambda\kappa}} \\ \Sigma_\kappa^{\cdot\lambda} &\equiv \frac{\partial W}{\partial \Omega_\lambda^\kappa} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

で定義する。ところで，$g_{\lambda\kappa}$ は（3.4）で，Ω_λ^κ は，今の場合（3.19）で与えられるものとし，変形 A_i^κ を

$$A_i^\kappa(x,t) = \delta_i^\kappa + \alpha_i^\kappa(x,t) \tag{4.4}$$

で表わすことにし，しかも (α_i^κ) に関しては二次以上の量を省略することにすると，（3.4），（3.19）及び $(3.8)_2$ より

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} &= \delta_{\lambda\kappa} + 2\alpha_{(\lambda\kappa)} : \left(\begin{aligned} \alpha_{\lambda\kappa} &\equiv \alpha_\lambda^j \delta_\kappa^i \delta_{ji}, \\ \delta_{\lambda\kappa} &\equiv \delta_\lambda^j \delta_\kappa^i \delta_{ji} \end{aligned}\right. \\ \Omega_\lambda^\kappa &= \partial_t \alpha_\lambda^{\cdot\kappa} + x^{(1)\mu}\partial_\mu \alpha_\lambda^{\cdot\kappa} : \ \alpha_\lambda^{\cdot\kappa} \equiv \alpha_\lambda^i \delta_i^\kappa \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

あるいは

$$\Omega_{\lambda\kappa} \equiv \Omega^{\nu}_{\lambda}\delta_{\nu\kappa} = D_t\alpha_{\lambda\kappa} \ (\equiv \dot{\alpha}_{\lambda\kappa})$$

とかけるから，それぞれの変分をとり，(4.2) に代入し，部分積分を行って，自由境界条件が満足されているとするならば，場の方程式，即ちレオロジー方程式として，

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^{(1)\mu} : \Sigma^{\kappa\lambda}(\partial_\mu \alpha_{\lambda\kappa}) = 0 \ ; \quad \Sigma^{\kappa\lambda} \equiv \Sigma_{\nu}^{\cdot\lambda}\delta^{\nu\kappa}, \\ &\delta\alpha_{\lambda\kappa} : 2\sigma^{\kappa\lambda} - \partial_t\Sigma^{\kappa\lambda} - (\partial_\mu\Sigma^{\kappa\lambda})\, x^{(1)\mu} - \Sigma^{\kappa\lambda}(\partial_\mu x^{(1)\mu}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

を得る。今

$$\tilde{\sigma}^{\kappa\lambda} \equiv 2\sigma^{\kappa\lambda} - \Sigma^{\kappa\lambda}(\partial_\mu x^{(1)\mu}) \tag{4.7}$$

とおき，応力ー変形ー時間関係式として $(4.6)_2$ に着目することにすれば

$$\tilde{\sigma}^{\kappa\lambda} = D_t\Sigma^{\kappa\lambda} \equiv (\dot{\Sigma}^{\kappa\lambda}) \tag{4.8}$$

とかけるから，これが我々の観測にかかる方程式といえる。$\tilde{\sigma}^{\kappa\lambda}$ は一般には非対称であり，純変形 (α^{κ}_{i}) から派生する応力は，時間的変化を考慮に入れることによって非対称になり，それが交叉応力効果の本質的原因をなし，非線型化を現出させるといえる。

さて，(4.3) から W の形を

$$W = \frac{1}{2}E^{\kappa\lambda\mu\nu}g_{\nu\mu}g_{\lambda\kappa} + F^{\kappa\lambda\mu\nu}g_{\nu\mu}\Omega_{\lambda\kappa} + \frac{1}{2}G^{\kappa\lambda\mu\nu}\Omega_{\nu\mu}\Omega_{\lambda\kappa} \tag{4.9}$$

なる二次形式と仮定すると，constitutive equations として

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{\kappa\lambda} &= E^{\kappa\lambda\mu\nu}g_{\nu\mu} + F^{\kappa\lambda\mu\nu}\Omega_{\nu\mu} \\ \Sigma^{\kappa\lambda} &= F^{\kappa\lambda\mu\nu}g_{\nu\mu} + G^{\kappa\lambda\mu\nu}\Omega_{\nu\mu} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

を得る。但し $E^{\cdots}$, $F^{\cdots}$, $G^{\cdots}$ は一般的な物質係数である。(4.8) において (4.10) との組合わせから $\tilde{\sigma}^{\kappa\lambda}$ に着目し，それを変形の時間的変化で表わそうとするならば，三次元の一般化 Voigt 模型を得，逆に $\dot{\Sigma}^{\kappa\lambda}$ に着目して同様

に考えていけば三次元の一般化 Maxwell 模型を得ることになるが，後の論文で扱う網目構造粘弾性では，通常，もっぱら一般化 Maxwell 模型を扱っているから，[7),8)] 我々としても，その線で考えていく。(4.10)$_2$ から $\dot{\Sigma}^{\kappa\lambda}$ を計算し (4.10)$_1$ から (4.7) の $\tilde{\sigma}^{\kappa\lambda}$ を計算し，両者が (4.8) で結ばれていると考えていく。(4.5) を考慮に入れると，

$$\dot{\Sigma}^{\kappa\lambda} = \dot{\mathrm{F}}^{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\nu\mu} + (\mathrm{F}^{\kappa\lambda\mu\nu} + \dot{\mathrm{G}}^{\kappa\lambda\mu\nu})\dot{\alpha}_{\nu\mu} + \mathrm{G}^{\kappa\lambda\mu\nu}\ddot{\alpha}_{\nu\mu} \quad (4.11)$$

及び

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\sigma}^{\kappa\lambda} \equiv \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\nu\mu} + \mathscr{F}^{\kappa\lambda\mu\nu}\dot{\alpha}_{\nu\mu} \\ &\text{但し}\quad \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv 2\mathrm{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} - \mathrm{F}^{\kappa\lambda\mu\nu}(\partial_\alpha x^{(1)\alpha}) \\ &\qquad\quad \mathscr{F}^{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv 2\mathrm{F}^{\kappa\lambda\mu\nu} - \mathrm{G}^{\kappa\lambda\mu\nu}(\partial_\alpha x^{(1)\alpha}) \end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

とかける。(4.11) の $\ddot{\alpha}$ の慣性項を省略し，それと (4.12) を等置すれば，物質係数の関係として，

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \dot{\mathrm{F}}^{\kappa\lambda\mu\nu} \\ \mathscr{F}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \mathrm{F}^{\kappa\lambda\mu\nu} + \dot{\mathrm{G}}^{\kappa\lambda\mu\nu} \end{aligned}\right\} \quad (4.13)$$

などが得られる。又，(4.11)，(4.12) より (4.10)$_2$ を考慮すると，

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Sigma}^{\kappa\lambda} &= \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\nu\mu} + \mathscr{F}^{\kappa\lambda\mu\nu}\dot{\alpha}_{\nu\mu} \\ &\equiv \Theta^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta} + (\mathscr{E}^{\kappa\lambda\gamma\delta} - \Theta^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta\gamma\delta})g_{\delta\gamma} \\ &\text{但し}\ \Theta^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\alpha\beta} \equiv \mathscr{F}^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathrm{G}_{\alpha\beta\nu\mu}\ :\ \mathrm{G}_{\alpha\beta\nu\mu}\ \text{は}\ \mathrm{G}^{\mu\nu\beta\alpha}\ \text{の逆テンソル} \end{aligned}\right\} \quad (4.14)$$

とかける。右辺第一項からの寄与は，本質的に Maxwell ―模型を現出させるところの成分であって，この中に，いわゆる相対的変形[8)]からの寄与も含まれているといえる。第二項は，主として非線型な時間的散逸成分を代表し，かつ圧力方程式を含むといえる。(4.14) は，別な風にも書き直せ，同じく，(4.11)，(4.12)，(4.10)$_2$ より，

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\Sigma}^{\kappa\lambda} &= \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\nu\mu} + \mathscr{F}^{\kappa\lambda\mu\nu} \dot{\alpha}_{\nu\mu} \\
&\equiv \Lambda^{\kappa\lambda}{}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\, \Sigma^{\alpha\beta} + \mathrm{K}^{\kappa\lambda\gamma\delta} \dot{\alpha}_{\delta\gamma} \\
\text{但し}\quad \Lambda^{\kappa\lambda}{}_{\cdot\cdot\alpha\beta} &\equiv \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} \mathrm{F}_{\nu\mu\alpha\beta} \;:\; \mathrm{F}_{\nu\mu\alpha\beta}\ \text{は}\ \mathrm{F}^{\beta\alpha\mu\nu}\ \text{の逆テンソル} \\
\mathrm{K}^{\kappa\lambda\gamma\delta} &\equiv \mathscr{F}^{\kappa\lambda\gamma\delta} - \mathscr{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} \mathrm{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{F}_{\nu\mu\alpha\beta}
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}
$$

とかける。これは正に一般化 Maxwell ー模型の応力ー変形ー時間関係式を与えるものであり，（4.15）を通常の扱い方と比較すると，$\Lambda^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}$ は平均的非ホロノーム性の物質係数であり，文献 7）では鎖切断係数とよんでおり。$\mathrm{K}^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}$ は平均的弾性係数に相当することがわかる。

これで（4.10）から（4.15）への移行により，各々の物質係数及び観測にかかる形での応力ー変形ー時間関係が求められることになった。これらを具体的に考えていくために，ここで一つの試みとして，$(3.18)_2$ の関係式，即ち，

$$
\dot{g}_{\lambda\kappa} = \Gamma_\lambda^{\ \nu} g_{\nu\kappa} + \Gamma_\kappa^{\ \nu} g_{\lambda\nu} \tag{4.16}
$$

に着目し，更に簡単のために，文献 8）の如く，

$$
\left.\begin{aligned}
&\Sigma^{(\kappa\lambda)} \equiv \rho(t)\, g^{\kappa\lambda} \\
&\text{あるいは}\quad \Sigma_{(\lambda\kappa)} \equiv \lambda(t)\, g_{\lambda\kappa} \;:\; \lambda(t) = \rho^{-1}_{(t)}
\end{aligned}\right\} \tag{4.17}
$$

とおくことにすれば，$(4.17)_2$，$(4.5)_3$ より，

$$
\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{(\lambda\kappa)} &= \dot{\lambda}(t)\, g_{\lambda\kappa} + \lambda(t)\, \dot{g}_{\lambda\kappa} \\
&= \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \Sigma_{(\lambda\kappa)} + \Gamma_{(\lambda}^{\ \nu} \Sigma_{|\nu|\kappa)} + \Gamma_{(\kappa}^{\ \nu} \Sigma_{\lambda)\nu} \\
&= \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \Sigma_{(\lambda\kappa)} - \dot{\alpha}_{(\lambda}{}^{\cdot\nu} \Sigma_{|\nu|\kappa)} + \dot{\alpha}_{(\kappa}{}^{\cdot\nu} \Sigma_{\lambda)\nu}
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

（但し　（　）は対称成分をとることを意味する。）

とおけ，$\Gamma_\lambda^{\ \kappa}$ あるいは $\dot{\alpha}_\lambda{}^{\cdot\kappa}$ の中に含まれる相対的変形を抽出すれば文献 8）の応力ー変形ー時間関係式に移行でき，そのためには，外部変形 β と相対的変

形γにより

$$\alpha_{\lambda}^{\cdot\kappa} = \beta_{\lambda}^{\cdot\kappa} + \gamma_{\lambda}^{\cdot\kappa} \tag{4.19}$$

の如く分解して考えていけばよい。その際物理的条件からはγあるいは$\dot{\gamma}$がβと結びつけられ，たとえば比例定理だと，

$$\dot{\gamma}_{\lambda}^{\cdot\kappa} = -\gamma(t)\,(\delta_{\lambda}^{\kappa} - \alpha_{\lambda}^{\cdot\kappa}) \tag{4.20}$$

などとおくことができ，[8] βが与えられれば，(4.19)，(4.20) から $\gamma(t)$ を介して α が求められ (4.17) から Σ が求められることとなる。但し通常は $\dot{\Sigma}=0$ の定常状態を考えることが多い。又，$\gamma(t)$ は体積変形を代表し，従って圧力方程式に関係してくるが，文献 8) では constant とおいている。このような考え方に基づき，具体的に高分子物性，就中，粘弾性を論じていこうと思うが，この論文では，ひとまず，このあたりで打ちきり，それらについては，次の論文にゆずりたい。

§5　その他

レオロジーの特徴をその時間依存性に集約し，レオノーム幾何学で考察するわけで，我々が着目するのは非ニュートン流動や交叉応力効果などの非線型現象であり，前者は物質係数の時間（速度勾配）依存性として，後者は，二次元から三次元への不適合的くりこみとして把握する如き統一的立場で解釈していこうとする。具体的には，網目構造と孤立鎖各要素に着目するが，その他にも表現のちがいのみで同じ考え方ができるものがレオロジーの中にも多数存在すると思われるので，順次調べていきたいと思っている。

参考文献

1)　池田恵，物性研究，12・No.2 (1969). 117.

2)　M. Reiner, Deformation, Strain and Flow—An Elementary Introduction to Rheology. H. S. Lewis, London (1960).

3)　T. Suguri, J. Math. Soc. Japan, 4 (1952), 231.

4) N. Oshima, Memoirs, 1, B−II (1955), 240.

5) J. A. Schouten, Tensor Analysis for Physicists. Oxford, Clarendon Press (1951).

6) J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I Groningen−Batavia, Noordhoff (1935).

7) M. Yamamoto, J. Phys. Soc. Japan, 11 (1956), 413.

8) S. Hayashi, J. Phys. Soc. Japan, 18 (1963), 131.