7）　M. Suzuki：　J. Math. Phys. **9** (1969) 2064.
Prog. Theor. Phys. **40** (1968) 1246,
41 (1969) 1438.

8）　R. B. Griffiths：　to be published in J. Math. Phys.

9）　C. N. Yang and C. P. Yang; Phys. Rev. **147** (1966) 303.

反強磁性Ising模型とLee－Yang函数の性質（Ⅱ）

東大教養・図学教室　浅　野　太　郎

（９月１０日受理）

§１　序　　論

Ising model に関して有効な諸定理[1)2)3)4)5)6)7)8)]は多く強磁性の場合に限られ，Spin間相互作用が反強磁性結合を含む時には成立が保証されない。例えば，Griffiths 不等式については反例が示されている。[2)] 一般に，任意の反強磁性体に関して成立する定理が存在しないだろう事はむしろ当然である。三ケの Spin からなる系を考えよう。第一と第二の Spin が反強磁性的結合をしていれば，この二つは反平衡になりたがる。しかし，もし全ての相互作用が反強磁性的であるとしたら第三の Spin は何ちらを向いたら良いのだろうか。それは Spin 間相互作用の相対的な大きさによって定る事になろう。これは反強磁性の場合は，問題が本質的に多体問題だという事を示している。一方，Lee－Yang の定理[1)]や Griffiths の不等式[2)]の証明の要点は，問題を事実上二体問題に直してしまう事にある。

反強磁性の場合も適当な条件をつけて，この多体問題の困難を除けるなら厳密な定理が得られる。実際，最近接相互作用の場合には単純立方格子ならこの困難がない。そしてこの場合は，Yang[9)]の変換で強磁性の場合に直せるのだった。[9)] 以下この Series で，我々はより複雑な場合を考えていく事になろう。こ

こでは，前報で与えた Lee－Yang 函数の性質が，Griffiths 不等式と密接に関連している事を示す例をあげておこう。

§2　Griffiths 不等式と Lee－Yang 函数

Griffiths 不等式の始めの二つ，

$$\text{(i)}\quad \langle S_i \rangle_0 \geq 0 \quad \text{all } h_i \geq 0$$

$$\text{(ii)}\quad \langle S_i\, S_k \rangle_0 \geq 0 \quad \text{all } h_i = 0$$

は，Lee－Yang 函数の性質の直接の結果である事を示す。前報で[6]，我々は，Lee－Yang 函数 $f(Z_1, \cdots, Z_N)$ は，絶体値に於いて各 Z_i の絶体値の増加函数である事を示した。

強磁性 Ising 模型の分配函数 F_0 は，$Z_i(=\exp(\beta h_i))$ の Lee－Yang 函数である。[1] そこで，$h_i \geq 0$ にすれば，

$$Z_i \geq 1, \quad F_0(Z_1 \cdots Z_N) \geq 0$$

で，

$$\langle S_i \rangle_0 = [F_0(Z_1, \cdots, Z_N)]^{-1} Z_i \frac{\partial}{\partial Z_i} F_0(Z_1, \cdots, Z_N) \geq 0$$

が導かれる。又，外場がない時の強磁性 Ising 模型を考えると，系が Spin 反転に関して不変だから，

$$\mathrm{Tr}\,\exp(-\beta H_0) = 2\,\mathrm{Tr}'\,\exp(-\beta H_0)$$

ここに Tr′ は，k 番目の Spin S_k が常に $\frac{1}{2}$ の値をとる様な Subspace に於ける Tr を意味する。即ち，S_k が前報の ghost Spin になっている。これは，前に述べた様に，

$$h_i = \frac{1}{2} J_{ik} \qquad (i \neq k;\ k\text{: fixed})$$

という不均一磁場がある場合の分配函数である。従って，問題の分配函数は，

$$y_i = \exp\left(\beta \frac{1}{2} J_{ik}\right) \qquad (i \neq k,\ k\text{: fixed})$$

の函数として Lee－Yang 函数になる。そこで，前記の議論をくりかえせば，

z_i を y_i でおきかえて，

$$\langle S_i\, S_k \rangle \geq 0 \qquad \text{all } h_i = 0$$

が導かれる。

参 考 文 献

1） T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. 87 (1952) 410.

2） R. B. Griffiths, J. Math. Phys. 8 (1967) 478, 484.
Commun. Math. Phys. 6 (1967) 121.
D. G. Kelly and S. Sherman, J. Math. Phys. 9 (1968) 466.

3） R. B. Griffiths, Phys. Rev. 136 (1964) A437.

4） J. Ginibre, A. Grossman and D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 3 (1966) 187. and also see the references in 3), 4) and 5).

5） M. E. Fisher, Phys. Rev. 162 (1967) 480.

6） T. Asano, Prog. Theor. Phys. 40 (1968) 1328.
J. Phys. Soc. Japan 25 (1968) 1220.

7） M. Suzuki, J. Math. Phys. 40 (1969) 2064 : Prog. Theor. Phys. 40 (1969) 1246 ; 41 (1969) 1438.

8） R. B. Griffiths, to be published in J. Math. Phys.

9） C. N. Yang and C. P. Yang, Phys. Rev. 147 (1966) 303.
M. E. Fisher and R. J. Burford, Phys. Rev. 156 (1967) 583.