レオロジーの幾何学的研究－X

－ 孤立鎖の運動形態への洞察 －

東大工　池　田　　恵

（12月8日受理）

§1. 序

既に前論文[1)]で，孤立鎖の各要素の運動形態を，我々のレオノーム幾何学的考察によって，「道」の方程式の解析と対応させて論じたが，それら一連の考察は，従来の統計力学的考察と我々の方法論との対応関係を求めると同時に，どこまで洞察できるかを明らかにせんとする試みに他ならない。

この論文では，その孤立鎖粘弾性論[1)]に続くべきものとして，通常の統計力学的扱いに対して，我々の立場からの洞察を試みたい。我々がそのためによりどころとするのは，文献 2)，3) の二論文であり，そこでの幾何学的な扱いを，より一層おしすすめてみたいと思う。

§2. 孤立鎖の運動形態についての幾何学的要因

孤立鎖各要素の数を（2n＋1）個とする。[2),3)] 孤立鎖の全自由度（6n＋3）のはる空間を"configuration space"といい，これを我々は (α)－空間とよんでおく。これに，bond 長一定及び結合角一定の条件をおくと，実質的な孤立鎖の自由度が（2n＋4）となり，この自由度のはる空間を"chain－space"といい，我々はこれを $(\bar{\alpha})$－空間とよんでおく。

我々の基本的な方針は，物理的に意味をもつ部分空間，$(\bar{\alpha})$－空間を，いかにして物理的条件によって規定していくかということである。

補空間，$(\hat{\alpha})$－空間（$(\alpha)=(\bar{\alpha},\ \hat{\alpha})$）というのは，孤立鎖のまわりの流体を意味するから，それからの相互作用は当然考えられるわけで，その点を考慮に入れた $(\alpha)=(\bar{\alpha},\ \hat{\alpha})$ 分解を明確にしていくことに対応する。[4),1)]

又，Euclid 3次元空間，(i)－空間に対して，各要素の位置ベクトル $\underset{I}{R}$（$I=1,\ \cdots,\ 2n+1$）のはる (I)－空間というものも考えていかねばならず，

文献 2)，3）では指標の扱い方，座標変換に対する吟味がなされていない。これについては，前論文[1]でのべたところである。

次に，各要素に働く力として，Rouse-model を採用することにより，Oseen の式による流体力学的相互作用及び拡散力，弾性力などをとり入れて運動方程式を求めているが，これが「道」の方程式と対応させられて，各幾何学量に関する物理的解釈の問題が出現する。[1]

文献 2)，3）では Riemann-space 的なとらえ方をしているが，それは計量テンソル導入の段階までしか行なわれていなく，我々の立場としては，も少し徹底した形で Riemann-space あるいは non-Riemann-space 的な把握を遂行すべきである。そのためには，接続を導入して，非ホロノーム性の抽出と共に，系の散逸性，非線型性ということを考えていかねばならない。

統計力学的には，分布函数を平衡状態からの“ずれ”を表わすある種のパラメータ（速度勾配とか，外力の強さとか，せん断歪速度とか）によって Taylor 展開し，そのパラメータに関する各次数毎の方程式を，元の分布函数についての連続方程式などを介して解くことにより，perturbation への外部場からの寄与を求めようとしている。これらの扱いの特徴的なところは，“ずれ”が微少であるとして準平衡（quasi-equilibrium）が成立っていると考えて，平均化操作を行なうことであり，我々の場合では，$(\alpha)=(\bar{\alpha},\hat{\alpha})$ 分解後，更に macro に空間的かつ時間的に平均をとることを意味する。観測という平均操作に対応し，macro な平均化による平均値しか登場しないことになる。

我々は，前論文[1]の立場との関係を重視しながら，以上の観点についての幾何学的把握を行なっていきたい。

§3.　幾何学的考察 — その1

この節では，運動方程式と接続係数の関係をみていこう。

まず，(α)−空間における共変微分を，通常の如く，レオノーム幾何学的に

$$DX^{\alpha}=dX^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}X^{\beta}dx^{\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta}X^{\beta}dt \tag{3·1}$$

と定義する。但し $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$，$\Gamma^{\alpha}_{\beta}$ は接続係数で，(dx^{α},dt) は強ベクトル[6]とする。

「道」の幾何学的扱いからの帰結として，粒子（各要素）の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta}\dot{x}^{\beta}=F^{\alpha} \\ &\qquad \text{但し}\quad \dot{x}^{\alpha}\equiv\frac{dx^{\alpha}}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot2)$$

で与えられることになり，[1),5)] $\dot{x}^{\alpha}$ は着目している粒子の速度であり，F^{α} は粒子への作用力である。

従来の如く，遠隔平行性を仮定してやると，場を支配する基本量は（$g_{\beta\alpha}$，$\Omega^{\alpha}_{\gamma\beta}$，$\Omega^{\alpha}_{\beta}$）の三種類であり，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} g_{\beta\alpha} &= A^{j}_{\beta}A^{i}_{\alpha}\delta_{ji}, \\ \Omega^{\alpha}_{\gamma\beta} &= -\Gamma^{\alpha}_{[\gamma\beta]} \\ \Omega^{\alpha}_{\beta} &= -\Gamma^{\alpha}_{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot3)$$

で与えられるものとする。[4),6)] 但し，A^{i}_{α} はレオノーム的変形そのものを表わすというわけではなく，座標変換の役目を果しているだけである。[6)]

metric-space としての条件は，$g_{\beta\alpha}$ の共変微分商が消失することで，それらは

$$\left.\begin{aligned} \partial_{\gamma}g_{\beta\alpha} &= \Gamma^{\delta}_{\gamma\beta}g_{\delta\alpha}+\Gamma^{\delta}_{\gamma\alpha}g_{\beta\delta}, \\ \dot{g}_{\beta\alpha} &= \Gamma^{\gamma}_{\beta}g_{\gamma\alpha}+\Gamma^{\gamma}_{\alpha}g_{\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot4)$$

で与えられる。(3・4) より

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}=\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\}-U^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}, \\ &\text{但し}\left(\begin{aligned} &\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\}\equiv\frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_{\gamma}g_{\beta\delta}+\partial_{\beta}g_{\delta\gamma}-\partial_{\delta}g_{\gamma\beta}), \\ &U^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}\equiv\Omega^{\alpha}_{\gamma\beta}-g^{\alpha\delta}g_{\gamma\varepsilon}\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}+g^{\alpha\delta}g_{\beta\varepsilon}\Omega^{\varepsilon}_{\delta\gamma} \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot5)$$

なる関係が得られることが知られており，[1),4),6)] $(3\cdot4)_2$ に対しては，

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta}=\left\{{\alpha \atop \beta}\right\}-U^{\cdot\alpha}_{\beta},$$

$$\text{但し}\left(\begin{aligned}&\left\{{\alpha \atop \beta}\right\} \equiv \frac{1}{2}\, g^{\alpha\gamma}\, \partial_t\, g_{\beta\gamma}\,,\\ &U_{\beta}^{\cdot\alpha} \equiv -\dot{x}^{\gamma}\ \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot6)$$

とおける。(3·5), (3·6) によって，(3·2) なる運動方程式から，このfield の接続係数を物理的に決定せんとするわけであるが，作用力 F^{α} の内容は，統計力学的考察においては，次のように与えられている。[2),3)] つまり，Oseen の式より

$$\left.\begin{aligned}&v^{\alpha} = v^{0\alpha} - T^{\alpha\beta}\, F_{\beta}\,,\\ &T^{\alpha\beta} = \sum_{I\neq J=1}^{2n+1} \underset{IJ}{T}^{\alpha\beta}\,,\\ &\underset{IJ}{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi\eta_0 \underset{IJ}{R}}\ \frac{\underset{IJ}{R}^{\alpha}\ \underset{IJ}{R}^{\beta}}{\underset{IJ}{R}^{2}}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot7)$$

が成立つとする。但し，$\mathbf{v}$ は孤立鎖を注入した時の流速，$\mathbf{v}^0$ は攪乱されない前の流速，η_0 は初期状態の粘性，$\underset{IJ}{\mathbf{R}} = \underset{J}{\mathbf{R}} - \underset{I}{\mathbf{R}}$ は (J)ー要素と (I)ー要素との間隔ベクトル，$\underset{IJ}{R}$ はその大きさである。

一方，

$$\left.\begin{aligned}&F_{\alpha} = -\zeta\ g_{\alpha\beta}\ (v^{\beta} - \dot{x}^{\beta})\\ &\text{（但し，}\zeta\text{ は各要素の抵抗係数）}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot8)$$

なる相対速度に依存した抵抗力の形にもかけると考えると，(3·7), (3·8) より

$$\left.\begin{aligned}&F_{\alpha} = -\zeta\ g_{\alpha\beta}\ (v^{0\beta} - \dot{x}^{\beta}) - \zeta\ T_{\alpha}^{\cdot\beta}\, F_{\beta}\,,\\ &(T_{\alpha}^{\cdot\beta} \equiv T_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta})\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot9)$$

と表わせる。又，これをまとめて，一般化抵抗係数を $\zeta_{\alpha\beta}$ とおいて

$$F_{\alpha} = -\zeta_{\alpha\beta}\ (v^{0\beta} - \dot{x}^{\beta}) \qquad (3\cdot10)$$

とおくことにすると，

$$\left.\begin{aligned} &F_\alpha = -\zeta\, g_{\alpha\beta}\,(v^{0\beta}-\dot{x}^\beta) + \zeta\, T_\alpha^{\cdot\gamma}\,\zeta_{\gamma\beta}\,(v^{0\beta}-\dot{x}^\beta) \\ &\text{あるいは} \\ &\zeta_{\beta\alpha} = \zeta\, g_{\beta\alpha} - \zeta\, T_\alpha^{\cdot\gamma}\,\zeta_{\gamma\beta} \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot 11)$$

などが成立つことになる。つまり計量は抵抗係数と関係してくることになる。

今，$(3\cdot11)_1$ の F_α をもって，$(3\cdot2)$ の F_α が与えられるものと考えることにすると，慣性項を省略して，

$$\left.\begin{aligned} &\left(\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\} - U_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}\right)\dot{x}^\beta\,\dot{x}^\gamma + \left(\left\{{\alpha \atop \beta}\right\} - U_\beta^{\cdot\alpha}\right)\dot{x}^\beta \\ &\qquad \equiv -\zeta\,(v^{0\alpha}-\dot{x}^\alpha) + \zeta\, T^{\alpha\gamma}\,\zeta_{\gamma\beta}\,(v^{0\beta}-\dot{x}^\beta) \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot 12)$$

なる対応がつけられる。$\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\}$，$\left\{{\alpha \atop \beta}\right\}$ は計量のみに依存し，一応 $U_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}$，$U_\beta^{\cdot\alpha}$ とは性格を異にすると考え，$(3\cdot12)$ の右辺において，前者は $v^{0\alpha}$ による作用力，後者は $\dot{x}^\alpha$ による作用力に対応していると考えてやると，

$$\left.\begin{aligned} &\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\}\dot{x}^\beta\,\dot{x}^\gamma + \left\{{\alpha \atop \beta}\right\}\dot{x}^\beta \equiv -\zeta\, v^{0\alpha} + \zeta\, T^{\alpha\gamma}\,\zeta_{\gamma\beta}\, v^{0\beta}, \\ &U_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}\,\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + U_\beta^{\cdot\alpha}\,\dot{x}^\beta \equiv -\zeta\,\dot{x}^\alpha + \zeta\, T^{\alpha\gamma}\,\zeta_{\gamma\beta}\,\dot{x}^\beta \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot 13)$$

なる対応がつく。前論文[1]では，相対速度に着目して，F_α そのものをここでの $U_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}$，$U_\beta^{\cdot\alpha}$ に依存した成分におきかえてしまって，考えていった。

本質的な散逸性を表わすのは $(3\cdot13)_2$ であり，我々もそれに着目するが，$(3\cdot13)_1$ の方は，恒等式とみなしてやって，接続，計量を物理的に決定することを考えていきたい。

$(3\cdot13)_2$ は，更に簡単に

$$U_{(\gamma\beta)}^{\cdot\cdot\alpha}\,\dot{x}^\gamma + U_\beta^{\cdot\alpha} \equiv -\zeta\,\delta_\beta^\alpha + \zeta\, T^{\alpha\gamma}\,\zeta_{\gamma\beta} \qquad (3\cdot 14)$$

とかかれ，$U_\beta^{\cdot\alpha}$ 自身は着目する各要素の運動の時間的変化に伴う量であり，$U_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}$は他要素からの影響をまとめたものと解すことができる。これは，前論文[1]の如く，各要素の番号づけを explicit に接続係数の中にとり入れてやれば，わかることである。

§ 4. 幾何学的考察 — その 2

文献 2)，3) では Riemann−space 形式を想定していることが，我々の立場からは注目に値するわけで，その意味で，純幾何学的な考察を行なうことも必要であると信ずる。

問題は，各要素に働く力の計算を介しての応力一歪一時間関係であり，それについては，我々が既に前論文[1]において，レオノーム幾何学的考察という方針で考えてきたわけであるが，この節では，それをふまえながら，孤立鎖各要素の運動形態を示すべき $(\bar{\alpha})$−空間の様相を調べておきたい。つまり，$(\alpha)=(\bar{\alpha},\hat{\alpha})$ 分解を行なう。

まず，(3・2) において，$\dot{x}^{\bar{\alpha}}$ は各要素の速度であり，着目せる点というのが，各要素のことであると考えれば，(3・2) は

$$\ddot{x}^{\bar{\alpha}}+\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}\dot{x}^{\bar{\beta}}\dot{x}^{\bar{\gamma}}+\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\dot{x}^{\bar{\beta}}=F^{\bar{\alpha}} \tag{4・1}$$

に帰着する。物理的に考えると，単に $(\alpha)=(\bar{\alpha},\hat{\alpha})$ 分解をしたものが，直ちに観測されるのではなく，より macro に更に平均化されなければ認識されないわけである。従って $\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}$，$\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$ については，更に平均化し，$\bar{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}$，$\bar{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$ を求めなければならない。[7]（cf. 2 節）

さて，(3・5)，(3・6) から

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}=\overline{\left\{{\bar{\alpha}\atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right\}}-\bar{U}^{\cdot\cdot\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}},\\
&\text{但し}\begin{cases}
\left\{{\bar{\alpha}\atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right\}\equiv\left[{\bar{\alpha}\atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right]+\left\{\left\{{\bar{\alpha}\atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right\}\right\},\\
\left(\begin{aligned}
&\left[{\bar{\alpha}\atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right]\equiv\frac{1}{2}g^{\bar{\alpha}\bar{\delta}}\left(\partial_{\bar{\gamma}}g_{\bar{\beta}\bar{\delta}}+\partial_{\bar{\beta}}g_{\bar{\delta}\bar{\gamma}}-\partial_{\bar{\delta}}g_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}\right),\\
&\left\{\left\{{\bar{\alpha}\atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right\}\right\}\equiv\frac{1}{2}g^{\bar{\alpha}\hat{\delta}}\left(\partial_{\bar{\gamma}}g_{\bar{\beta}\hat{\delta}}+\partial_{\bar{\beta}}g_{\hat{\delta}\bar{\gamma}}\right),
\end{aligned}\right.\\
\bar{U}^{\cdot\cdot\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}\equiv W^{\cdot\cdot\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}+Y^{\cdot\cdot\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}},
\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{4・2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &W_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha} \equiv \Omega_{\bar\gamma\bar\beta}^{\bar\alpha} - g^{\bar\alpha\bar\delta} g_{\bar\gamma\bar\varepsilon} \Omega_{\bar\beta\bar\delta}^{\bar\varepsilon} + g^{\bar\alpha\bar\delta} g_{\bar\beta\bar\varepsilon} \Omega_{\bar\delta\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}, \\ &Y_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha} \equiv \bar{U}_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha} - W_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha}, \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar\Gamma_{\bar\beta}^{\bar\alpha} = \overline{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\}} - \bar{U}_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha}, \\ &\text{但し}\left\{\begin{aligned} &\overline{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\}} \equiv [{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}] + \{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\}\}, \\ &\quad\left(\begin{aligned} &[{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}] \equiv \frac{1}{2} g^{\bar\alpha\bar\delta} \partial_t g_{\bar\delta\bar\beta}, \\ &\{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\}\} \equiv \frac{1}{2} g^{\bar\alpha\hat{\bar\delta}} (\partial_t g_{\bar\beta\hat{\bar\delta}}), \end{aligned}\right. \\ &\bar{U}_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha} \equiv W_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha} + Y_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha}, \\ &\quad\left(\begin{aligned} &W_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha} \equiv -\dot{x}^{\bar\gamma} ([{}^{\bar\alpha}_{\bar\gamma\bar\beta}] - W_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha}), \\ &Y_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha} \equiv -\dot{x}^{\bar\gamma} (\{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\gamma\bar\beta}\}\} - Y_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha}), \end{aligned}\right. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot3)$$

と計算される。(4・2), (4・3) を用いて，平均化運動方程式を書きなおすと,

$$\begin{aligned} \bar{F}^{\bar\alpha} = &\{([{}^{\bar\alpha}_{\bar\gamma\bar\beta}] - W_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha}) \dot{x}^{\bar\beta} \dot{x}^{\bar\gamma} + ([{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}] - W_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha}) \dot{x}^{\bar\beta}\} \\ &+ \{(\{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\gamma\bar\beta}\}\} - Y_{\bar\gamma\bar\beta}^{\cdot\cdot\bar\alpha}) \dot{x}^{\bar\beta} \dot{x}^{\bar\gamma} + (\{\{{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\}\} - Y_{\bar\beta}^{\cdot\bar\alpha}) \dot{x}^{\bar\beta}\} \end{aligned} \quad (4\cdot4)$$

とかける。右辺第一項の｛　｝は純平均的力であり，第二項の｛　｝は相互作用力の平均に相当する。前者は純粋に $g_{\bar\beta\bar\alpha}$ から派生する量であるが，後者は $g_{\bar\beta\hat{\bar\alpha}}$ から派生する。

次には $\bar{\bar{F}}^{\bar\alpha}$ を求める必要がある。そこで，(3・6) より同様の計算を行なってやると,

$$\overline{F}^{\bar\alpha} = -\left(\zeta\,\delta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} - \zeta\,\overline{T}^{\bar\alpha\bar\beta}\,\overline{\zeta}_{\bar\beta\bar\gamma}\right)\left(v^{0\bar\gamma} - \dot{x}^{\bar\gamma}\right)$$
$$-\zeta\,\overline{T^{\bar\alpha\hat\beta}\,\zeta_{\hat\beta\bar\gamma}\left(v^{0\bar\gamma} - \dot{x}^{\bar\gamma}\right)} \tag{4・5}$$
$$-\zeta\,\overline{T}^{\bar\alpha\bar\beta}\,\overline{\zeta_{\bar\beta\hat\gamma}\,v^{0\hat\gamma}} - \zeta\,\overline{T^{\bar\alpha\hat\beta}\,\zeta_{\hat\beta\hat\gamma}\,v^{0\hat\gamma}}$$

と分解され，これを（4・4）に代入して，左右両辺を比較検討すると，純平均量にのみ着目してやることにすると，

$$\left(\left[{\bar\alpha \atop \bar\gamma\bar\beta}\right] - W_{\bar\gamma\bar\beta}{}^{\cdot\cdot\bar\alpha}\right)\dot{x}^{\bar\beta}\,\dot{x}^{\bar\gamma} + \left(\left[{\bar\alpha \atop \bar\beta}\right] - W_{\bar\beta}{}^{\cdot\bar\alpha}\right)\dot{x}^{\bar\beta}$$
$$\equiv -\left(\zeta\,\delta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} - \zeta\,\overline{T}^{\bar\alpha\bar\beta}\,\overline{\zeta}_{\bar\beta\bar\gamma}\right)\left(v^{0\bar\gamma} - \dot{x}^{\bar\gamma}\right), \tag{4・6}$$

を得る。$W_{\bar\gamma\bar\beta}{}^{\cdot\cdot\bar\alpha}$, $W_{\bar\beta}{}^{\cdot\bar\alpha}$ の項は，散逸力を代表し，Oseen の式と直接的に関係すると考えられる。（4・6）から最も簡単に，

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\left[{\bar\alpha \atop \bar\beta}\right] - W_{\bar\beta}{}^{\cdot\bar\alpha}\right)\dot{x}^{\bar\beta} \equiv -\zeta\left(v^{0\bar\alpha} - \dot{x}^{\bar\alpha}\right),\\
&\left(\left[{\bar\alpha \atop \bar\gamma\bar\beta}\right] - W_{\bar\gamma\bar\beta}{}^{\cdot\cdot\bar\alpha}\right)\dot{x}^{\bar\beta}\,\dot{x}^{\bar\gamma} \equiv \zeta\,\overline{T}^{\bar\alpha\bar\beta}\,\overline{\zeta}_{\bar\beta\bar\gamma}\left(v^{0\bar\gamma} - \dot{x}^{\bar\gamma}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4・7}$$

とおき，更に，

$$\left.\begin{aligned}
&\left[{\bar\alpha \atop \bar\beta}\right]\dot{x}^{\bar\beta} \equiv -\zeta\,v^{0\bar\alpha},\\
&W_{\bar\beta}{}^{\cdot\bar\alpha}\,\dot{x}^{\bar\beta} \equiv -\zeta\,\dot{x}^{\bar\alpha}
\end{aligned}\right\} \tag{4・8}$$

及び

$$\left.\begin{aligned}
&\left[{\bar\alpha \atop \bar\gamma\bar\beta}\right]\dot{x}^{\bar\beta}\,\dot{x}^{\bar\gamma} \equiv -\zeta\,\overline{T}^{\bar\alpha\bar\beta}\,\overline{\zeta}_{\bar\beta\bar\gamma}\,v^{0\bar\gamma},\\
&W_{\bar\gamma\bar\beta}{}^{\cdot\cdot\bar\alpha}\,\dot{x}^{\bar\beta}\dot{x}^{\bar\gamma} \equiv \cdot\,\zeta\,\overline{T}^{\bar\alpha\bar\beta}\,\overline{\zeta}_{\bar\beta\bar\gamma}\,\dot{x}^{\gamma}
\end{aligned}\right\} \tag{4・9}$$

とおくことにする。（cf. 1））

(4・8)$_2$, (4・9)$_2$ より,

$$\left.\begin{aligned} & W_{\bar{\beta}}^{\cdot\bar{\alpha}} \equiv -\zeta\,\delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}, \\ & W_{(\bar{\gamma}\bar{\beta})}^{\cdot\cdot\ \bar{\alpha}}\,\dot{x}^{\bar{\beta}} \equiv +\zeta\,\bar{T}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\,\bar{\zeta}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot 10)$$

とおける。(4・10) より, (4・8)$_1$, (4・9)$_1$ から

$$\left.\begin{aligned} & \left[{\bar{\alpha} \atop \bar{\beta}}\right] \dot{x}^{\bar{\beta}} \equiv W_{\bar{\delta}}^{\cdot\bar{\delta}}\,v^{0\bar{\alpha}}, \\ & \left[{\bar{\alpha} \atop \bar{\gamma}\bar{\beta}}\right] \dot{x}^{\bar{\gamma}} \equiv W_{(\bar{\gamma}\bar{\beta})}^{\cdot\cdot\ \bar{\alpha}}\,v^{0\bar{\gamma}} \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot 11)$$

などの関係式が得られる。

文献 2), 3) の扱い方で特徴的なのは, (α) − 空間を物理的条件によって自由度を制限して, $(\bar{\alpha})$ − 空間を得ることで, その相互作用が Oseen の式によって規定されているわけである。我々はこれを $(\alpha)=(\bar{\alpha},\hat{\alpha})$ 分解として把握する。[4),6)] この際, 場を支配する基本量は, その他にも相互作用を規定する Euler − Schouten 曲率テンソル $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\hat{\kappa}}$, $H_{\mu}^{\cdot\hat{\kappa}}$ が存在し, 今の場合は相対的速度に依存した抵抗力の出現にまとめられていると考えられる。

$(\bar{\alpha})$ − 空間の速度成分 $\dot{x}^{\bar{\alpha}}$, $(\hat{\alpha})$ − 空間のそれを $v^{\hat{\alpha}}$ とおくと, その相互作用は

$$\left.\begin{aligned} & \dot{x}^{\bar{\alpha}} = \lambda_{\hat{\beta}}^{\bar{\alpha}}\,v^{\hat{\beta}}\,; \\ & \left(\begin{aligned} & v^{\hat{\beta}} = -\frac{F^{\hat{\beta}}}{\zeta}; \\ & F^{\hat{\beta}} = -\zeta_{\cdot\,\bar{\gamma}}^{\hat{\beta}}\,(v^{0\bar{\gamma}} - \dot{x}^{\bar{\gamma}}) - \zeta_{\cdot\,\hat{\gamma}}^{\hat{\beta}}\,v^{0\hat{\gamma}} \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot 12)$$

とかけ, (3・8) より

$$\dot{x}^{\bar{\alpha}} = v^{\bar{\alpha}} + \frac{F^{\bar{\alpha}}}{\zeta} \quad (4\cdot 13)$$

であるが,

$$\lambda^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}} \equiv \delta^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}} + \pi^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}} \tag{4·14}$$

などとおくと，(4·12) から

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\bar{\alpha}} &= v^{\bar{\alpha}} + \pi^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}} v^{\hat{\beta}} \\ &\left(\equiv v^{\bar{\alpha}} + \frac{F^{\bar{\alpha}}}{\zeta}\right) \end{aligned} \tag{4·15}$$

に対応してき，$\lambda^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ についての情報が得られることとなる。(4·15) と (3·10) より

$$\begin{aligned} F^{\bar{\alpha}} &= \zeta\ \pi^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}}\ v^{\hat{\beta}} \\ &\equiv -\zeta^{\bar{\alpha}}_{\cdot\bar{\beta}} (v^{0\bar{\beta}} - \dot{x}^{\bar{\beta}}) - \zeta^{\bar{\alpha}}_{\cdot\hat{\beta}} v^{0\hat{\beta}} \end{aligned} \tag{4·16}$$

などの関係も得られる。但し，$F^{\hat{\alpha}}$ は，いわば溶液全体としての圧力関係を規定し，$v^{\hat{\alpha}}$ は溶液全体としての流れを意味し，$v^{0\hat{\alpha}}$ は初期状態の無限遠の速度，$v^{0\bar{\alpha}}$ は初期状態の着目している点での流速である。

かくして，$(\alpha) = (\bar{\alpha}, \hat{\alpha})$ 分解による，粘性抵抗力による非線型性の吟味，及び相互作用抽出のための $\lambda^{\bar{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ なる量の意味付け等の議論が可能となった。

§5. その他

前論文[1]でのべたところは，各要素の位置ベクトル $\mathbf{R}_{I}$ $(I = 1, \cdots, 2n+1)$ に着目し，(I)－空間に於て (3·2) と (3·8)～(3·11) に対応する式を求めていき，更に (3·13)，(3·14) に相当する関係を求めたわけで，今までのべたところと本質は異ならない。

孤立鎖問題では固有粘度が問題となるが，通常の取扱いは (I)－空間でのベクトル形式であるが，これらについても前論文[1]と同様にして洞察していくことが可能であろう。

§ 6. まとめ

孤立鎖形態を，その自由度の性格で分解し，chain－space という部分空間に着目することは，すべからく非ホロノーム部分空間分解という考え方で把握され，そして，特に Oseen の式で表わされる流体力学的相互作用が存在して，二つの場の間の相互作用成分が出現することが特徴的である。

我々の扱い方では，いわゆる Rouse－model よりも一般化されたモデルを用いており，必然的に非線型性が出現することになるから，それを model 的に具体化していくことも興味ある問題といえる。

§ 7. 参考文献

1） 池田　恵，物性研究，12－4（1969），245.

2） J.J.Erpenbeck & J.G.Kirkwood, J.Chem. Phys., 29（1958），909.

3） J.Riseman & J.G.Kirkwood, Rheology, 1（ed. by Eirich）（1956），495.

4） 池田　恵，物性研究，12－6（1969），365.

5） T.Suguri, J.Math. Soc. Japan, 4（1952），231.

6） 池田　恵，物性研究，13－1（1969），17.

7） K.Kondo & M.Fujinaka, Memoirs, 1, B－V（1955），335.